مقدمة فى
الأستاتيكا الهندسية

أعداد

أ.د / عبد الله مسعد زين الدين
أ.د / طارق كمال الدين زين العابدين
د / احمد عبد الله الشافعى

قسم الهندسة الزراعية والنظم الحيوية
كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية



مقدمة فى
الأستاتيكا الهندسية

أعداد

أ.د / عبد الله مسعد زين الدين
أ.د / طارق كمال الدين زين العابدين
د / احمد عبد الله الشافعى

قسم الهندسة الزراعية والنظم الحيوية
كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية





اسم الكتاب: مقدمة فى الأستاتيكا الهندسية

المؤلفين هيئة تدريس جامعة الاسكندرية

2015

رقم الايداع : ٢٠١٤/١٥٨٢٢

الترقيم الدولى ٤- ١٩٨ -٣٩٣- ٩٧٧- ٩٧٨ ISBN

الفهرسة: مقدمة فى الأستاتيكا الهندسية - هيئة تدريس جامعة الاسكندرية

بستان المعرفة ٢٠١٥

٢٢٦ ص ١٧ * ٢٤.٥

تدمك ٤ – ١٩٨ -٣٩٣- ٩٧٧- ٩٧٨

أ- العنوان-

الناشر

مكتبة بستان المعرفة

ج. م .ع - كفر الدوار - الحدائق –أمام أبراج الحلوانى

☎: ٠٤٥/٢٢٠٢٦٢٩ &

الإسكندرية ٠١٢٢١١٥١٢٣٧

E-mail: bostan_elma3rafa@yahoo.com

الطباعة و التجهيزات الفنية:

دار الجامعيين لطباعة والتجليد الإسكندرية

بسم الله الرحمن الرحيم

" و قل ربى زدنى علماً "

أردت بهذا الكتاب أن يعطي ما يحتاجه طالب الهندسه الزراعيه من مواضيع في الإستاتيكا الهندسيه تفيده في السنه الأولى و السنوات التاليه حيث أشتمل على مواضيع في الإتزان و الإحتكاك و التى تخدم فيما يلي من دراسة المواد المتعلقة من أسس الخرسانة و الحديد و كذلك اتزان الجرار و الألات و ما شابه ذلك .

و قد نهجت في هذا الكتاب على نهج الكتب الجامعية الأخرى من حيث كتابة المعادلات بالحروف اللاتينيه حتى يسهل على الطالب متابعة الإطلاع على المراجع العلمية باللغات الأجنبية في سهولة و يسر و الكتاب يحوي عدداً وفيراً من التمارين المحلوله و غير المحلوله و ذلك تيسيراً على الطالب و ضماناً لفهمه .

و قد راعيت أن يكون هذا الكتاب بقدر الإمكان خالي من الأخطاء المطبعية و أن يكون تبويبه بحيث تتسلسل مواضيعه مع التدرج الطبيعي للمستوى العلمي للطالب . و لذا أرجو أن يكون هذا الكتاب بمثابة الأداة التى تسهل على الطالب الحصول على كل ما يحتاجه في دراسة الإستاتيكا و في حدود ما يتطلبه طبيعة طالب الهندسة الزراعية .

و الكتاب يصلح أيضا للأخوة الزملاء المحاضرين لإستخدامه ككتاب جامعي في مجال الهندسة الزراعية .

" ربنا لا تؤاخذنا ان نسينا أو أخطأنا انك انت السميع العليم "

صدق الله العظيم

أستاذ دكتور عبد الله زين الدين

بكالوريوس في الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية – جامعة الاسكندرية – جامعة نوفا أسكوشيا – هماليفاكس – كندا

أستاذ بقسم الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

دكتور : طارق كمال الدين على زين العابدين

بكالوريوس في الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية – كلية الهندسة – جامعة نوفا أسكوشيا – هماليفاكس – كندا

أستاذ مساعد بقسم الهندسة الزراعية – كلية الزراعة – جامعة الإسكندرية

الفهرس

الباب الأول

الكميات القياسية والمتجهة

١ - مقدمة

يعتبر علم الميكانيكا أحد العلوم الفيزيائية ويقوم بدراسة حالة الأجسام من حيث السكون والحركة وذلك نتيجة تأثير قوى خارجية على تلك الأجسام والتى تغير من حالتها من سكون إلى حركه أو العكس. ونجد التطورات التكنولوجيه الحديثه فى نظرية الأستقرار ومتانة الأنشاءات والآلات وتصميم الصواريخ ومركبات الفضاء والتحكم الألى بها والآلات الكهربيه وأجهزتها وسلوك الجزئيات والذرات تعتمد على القواعد الأساسيه لعلم الميكانيكا.

ويعتمد علم الميكانيكا بصورة أساسيه على علم الرياضيات ولهذا تستخدم تلك المبادئ فى حل المسائل العلميه. ومن العروف أن علم الميكا نيكا ينقسم إلى قسمين وهما: الديناميكا ويختص بدراسه حركة الأجسام ولذا يسمى أيضا علم الحركة. والقسم الثانى الأستاتيكا علم السكون وهو موضوع هذا الكتاب ويعرف على أنه علم يعنى بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازن هذة القوى على الأجسام كما تبحث في توزيع القوى بين الأجسام المتصلة و طرائق الإرتكاز و الإتصال و هي بذلك أساس نظريات الإنشاء الهندسي أو بمعنى آخر هو علمٌ يقوم بدراسة الأجسام الماديه تحت تأثير القوى.

ويشمل الأتزان حالة السكون المستمر والحركة المنتظمة فى خط مستقيم أو الحركه الدورانيه المنتظمة لجسم متماسك حول محوره بشرط لايطرأ اى تغير على حالة الجسم وتنقسم الأستاتيكا إلى أستاتيكا الأجسام المتماسكة وهى موضوع الدراسة وأستاتيكا الأجسام المرنة وأخيرا أستاتيكا الموائع ولدراسة الاستاتيكا وجهتان متميزتان أولهما الاستاتيكا التحليلية والثانية الاستاتيكا البيانية.

و قبل دراسة القوانين الأساسية و عرض التعاريف الأولية لعلم الإستاتيكا يجب التعرف على الكميات و كيف تقسم مع التطرق لدراسة المتجهات بعض الشيء حيث أنها تفيد في عملية تحليل وتركيب القوى .

٢ – الكميات القياسية والمتجهة :

يبنى علم الميكانيكا على نوعين من الكميات أحداهما قياسية والأخرى اتجاهية

أ– الكميات القياسية (Scalors) :

تعرف تلك الكميات من مقاديرها فقط اى بعدد من وحدات معينة وليس لها اتجاه فراغي ومن امثلتها الزمن والطول والكتلة وهي تعرف أيضا على أنها كميات أساسية **(fundamental quantities)** والحجم والكثافة ومقدار السرعة والعجلة والطاقة وهي تعرف على انها كميات مشتقة **(derived quantities)**. ولكل منها وحداتة **(units)** الخاصة التي تعبر بها الكميات وهي في الغالب ثلاث أنظمة مبنية على أساس وحدات الكميات الأساسية وهي:

١– النظام المترى المطلق (النظام العلمى SI)

متر – كيلو جرام – ثانية (M.K.S. system)

٢– النظام الفرنسي المطلق

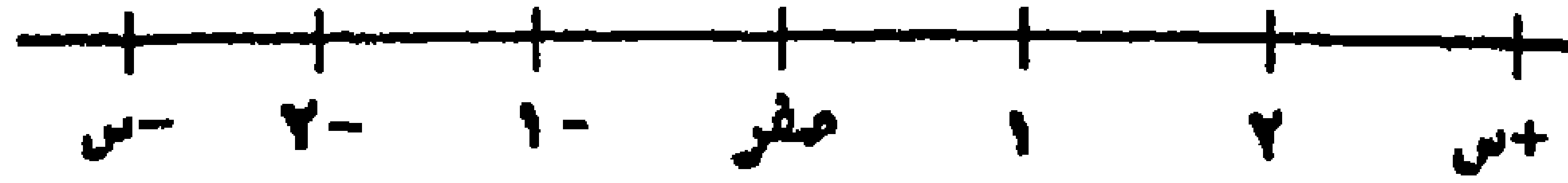
سنتيمتر – جرام – ثانية **(C.G.S. sytem)**

٣– النظام البريطاني

قدم – باوند – ثانية **(F.P.S. system)**

ومن الملاحظ أن تلك الكميات لا تتضمن بطبيعتها معنى الأتجاه ويمكن تمثيل هذة الكميات على

مقياس مدرج بحيث تختص احدى جهتيه من نقطة الأصل أو الصفر للكميات الموجبة وتختص الجهة الأخرى للكميات السالبة كما يحدث في الرسومات البيانية (شكل ١-١). أيضا تخضع تلك الكميات للعمليات الحسابية والجبرية العادية للاعداد.



شكل (١-١) . يوضح تمثيل الكميات القياسيةعلى مقياس مدرج.

ولنذكر هنا بعض القوانين الأساسية من علم جبر الأعداد - وكلها من البديهيات الأولية - وذلك لمضاهاتها فيما بعد بمثيلاتها في جبر المتجهات:

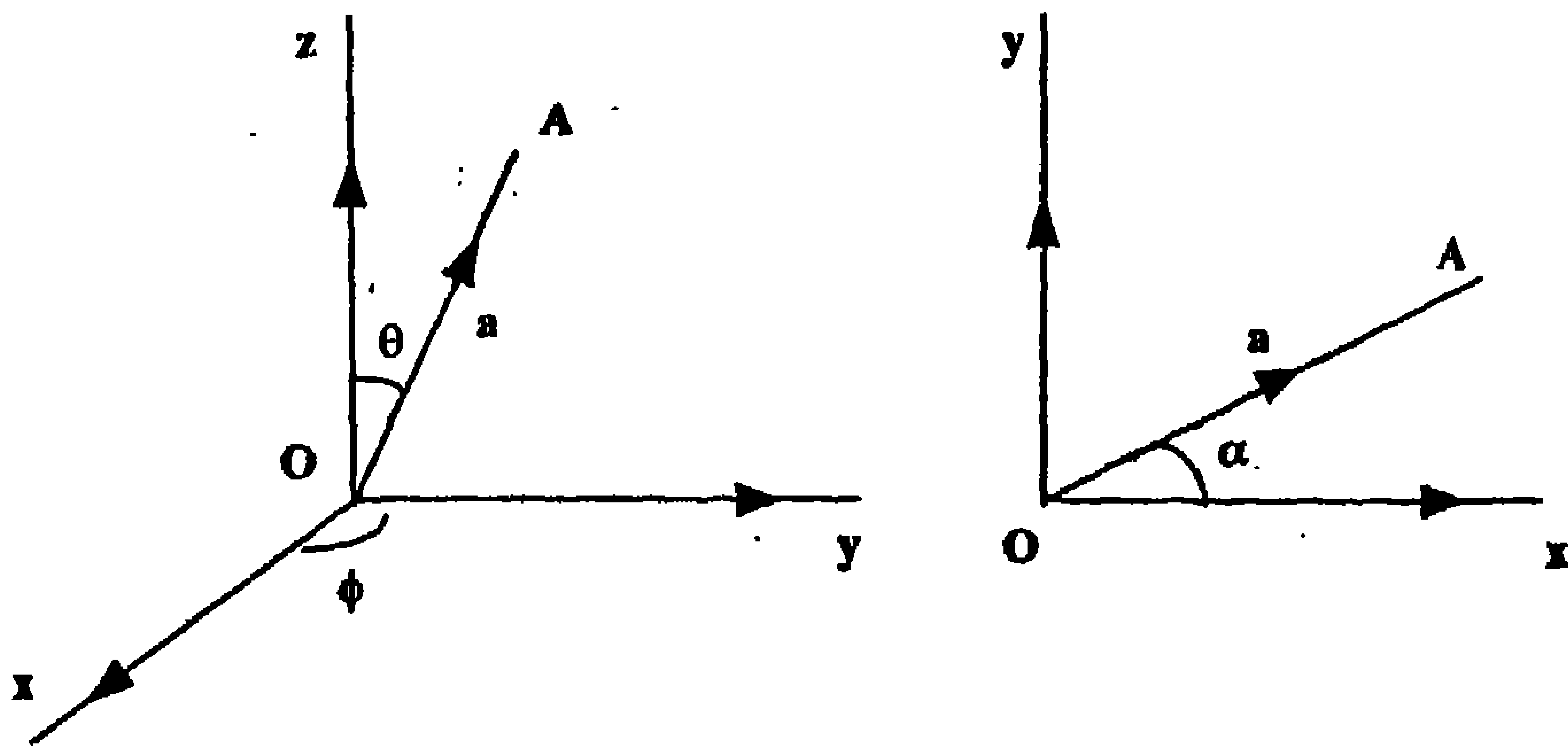
قانون التبادل (Commutative Law) (I) $a + b = b + a$

قانون الترتيب (Associative Law) (II) $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

قانون التوزيع (Distributive Law) (III) $m(a + b) = ma + mb$

ب- الكميات المتجة (Vectors) :

تعرف الكميات المتجة بأنها كميات لها مقدار واتجاه وهي تخضع لقانون متوازى الاضلاع الذى يبين طريقة جمعها. ومن أمثلتها الانتقال أو الأزاحة و السرعة والعجلة والقوة والعزم والدفع وكمية الحركة وكلها لايتم التعرف عليها الا بذكر اتجاهها. ولهذا فأن الكمية المتجة تحدد بمقدار (Magnitude) أى بعدد من الوحدات كالمتر فى الثانية للسرعة أو وزن الكيلو جرام للقوة. أما الأتجاه فيحدد بزاويا ميل المتجه على محاور ثابته كما فى الشكل (١-٢). فإن تعين اتجاه المتجهات الواقعة فى مستوى يتم بتحديد زاوية الميل (α) مع المحور الأفقى (+ X) وذلك مأخوذاً ضد عقارب الساعة. أما إذا وقعت تلك المتجهات في الفراغ فيحدد اتجاهها بزاويتين (θ , ϕ) مع المحورين (Z, X)



شكل (١-٢) تحديد اتجاه المتجهات أ- في مستوى ب- في الفراغ

ويرمز للمتجه بحرف واحد مثل a, b, c, ... كما يرمز له بحرفين أحداهما فى أول نقطة والآخر فى آخر نقطة وفوقهما خط أفقي أو سهم مثل ($\overrightarrow{AB}$ or $\overline{AB}$) مع مراعاة مطابقة ترتيب الحرفين لاتجاه سهم المتجه. أيضاً يرمز له بالرمز V ويمثل طوله بالمقدار V ويرسم فوقه خط مستقيم له رأس سهم يشير إلى اتجاهه. ويكتب بخط خفيف مائل (ايطالى) *V* معبراً عن قيمته بينما تستعمل الكتابة الغامقة فى حالة الكميات المتجه

وتصنف المتجهات إلى ثلاثة أصناف هى متجهات حرة ، منزلقة أو ثابتة.

٣ - أنواع المتجهات :

١- المتجه الحر (Free vector)

وهو غير مقيد باتجاه وحيد فى الفضاء ومثل ذلك الجسم المتحرك بدون دوران تعتبر حركة أى نقطة من الجسم أو ازاحتها كمتجه. ويعين المتجه الحر فى المستوى كميتان قياسيتان هما المقدار a والميل α أو مركبتاه الأفقية a_x والراسية a_y أما فى الفراغ فتلزم لتعين المتجه الحر ثلاث كميات قياسية هى مركباتة فى اتجاهات المحاور الكرتيزية (x, y, z) مثلاً.

٢- المتجه المقيد بخط عمل (المنزلق)(Line-bound vector)

وهو المتجه الذى يتقيد بأتجاه معين فى الفضاء وتتجه الكمية بأتجاهه. ولهذا يجوز عند دراسة التأثير الخارجي لقوة ما على جسم صلب أن تطبق هذه القوة على أى نقطة على أمتداد خط عملها دون أن يتغير تأثيرها على الجسم ككل. يلزم لتحديد تلك المتجه فى المستوى ثلاث كميات قياسية هى المقدار وتقاطع خط العمل مع محورى الأحداثيات مثلاً.

٣- المتجه المقيد بنقطة تأثير (الثابت) (Point-bound vector)

وهو المتجه المقيد بنقطة ثابتة فى الفضاء وعليه يشغل المتجه فى هذه الحالة موقعاً محدداً فى الفضاء ، ويحدد المستوى اربع كميات قياسية هى أحداثيات نقطة تأثير ومقدار وميل المتجه ومن أمثلتها القوة المؤثرة على جسم مرن أو مائع.

ومن المتعارف عليه أن المتجهات لها مقداراً و اتجاها كما أنها تخضع لقانون متوازى الأضلاع عند التركيب لتلك المتجهات (جمع أو طرح)

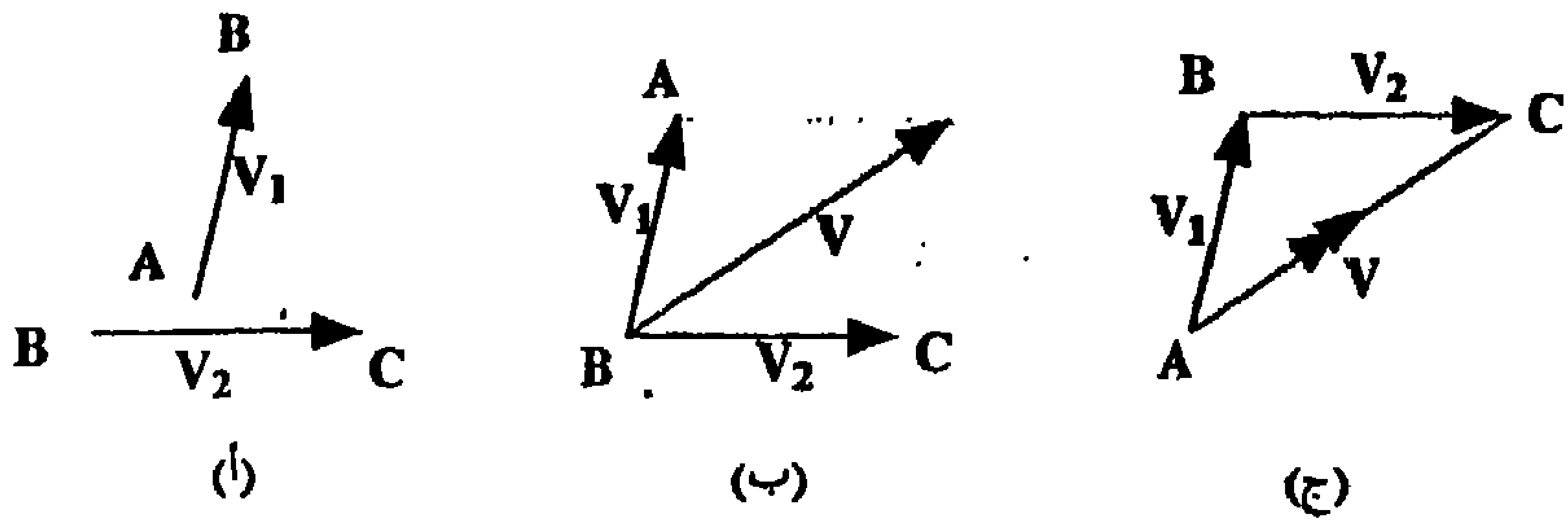
٤ - جمع المتجهات :

فإذا فرض أن هناك متجهين $\overline{AB}$ وآخر $\overline{BC}$ و يرمز لها V_1 و V_2 على الترتيب كما فى الشكل (١أ) وبمعاملة كلا من V_1 و V_2 على أنهما متجهين حرين فيجوز أستبدالهما بالمتجة المكافئ V و الذى يمثل قطر متوازى الاضلاع المكون V_1 و V_2 كضلعين له كما فى الشكل (١ب) و يمثل هذا التركيب أو جمع المتجهات بالمعادلة:

$$V = V_1 + V_2$$

أو

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$



الشكل (١-٣)

وهو جمع لكميات ذات اتجاه وليس جمع كميات غير متجه وعلامة + الواردة في هذه المعادلة لاتدل على جمع جبرى وإنما على التركيب للمتجهات بأعتبار المتجهين V_1 و V_2 حرين فيمكن جمعهما بأستخدام قانون المثلث بأضافة ذيل أحداهما إلى رأس الأخر كما هو في الشكل (١ ج) للحصول على المتجه المكافئ ولذا تبديل ترتيب جمع المتجهات لايؤثر على حاصل الجمع وبعباره أخرى

$$V_1+V_2 = V_2+V_1$$

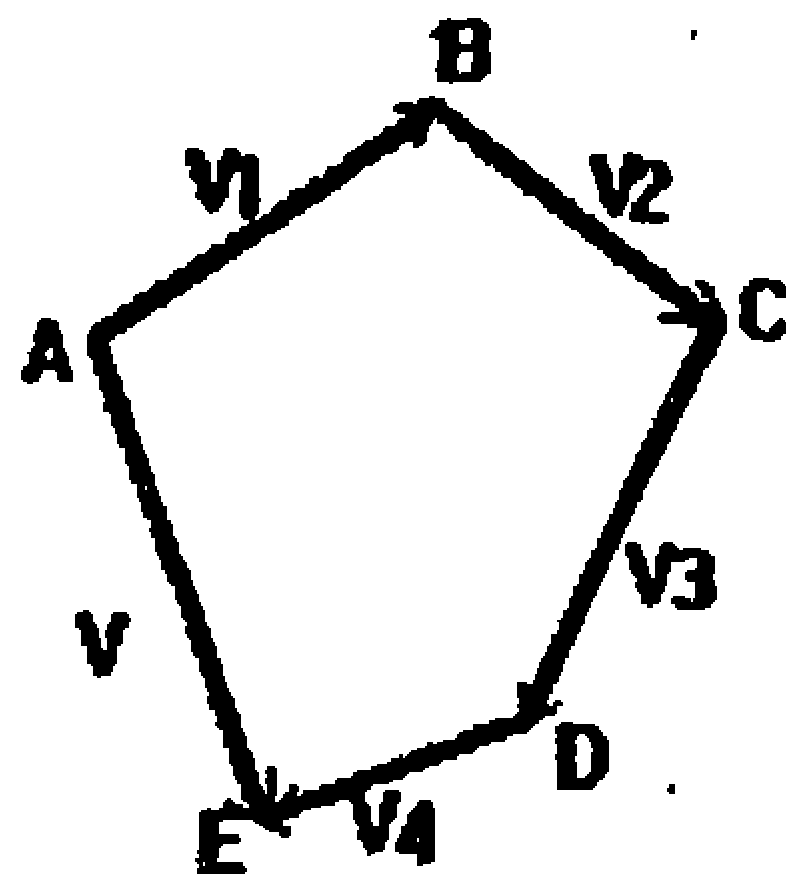
ويمكن تصميم فكرة جمع المتجهين على أى عدد من المتجهات بما يسمى مضلع المتجهات ABCDE والممثل بالمتجهات V_1, V_2, V_3, V_4 والمحصله V حيث المعادلة

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

أو

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

المعادلة تدل على أن المتجه AE أو V هو محصلة المتجهات الأربعة الأخرى على يمين المعادلة ويراعى الإنتقال على أضلاع المضلع فى اتجاه دائرى واحد وأن تكون المحصلة هى المتجه القافل للمضلع أى الواصل بين أول و آخر نقطه فيه شكل (١-٤)



شكل (١ - ٤)

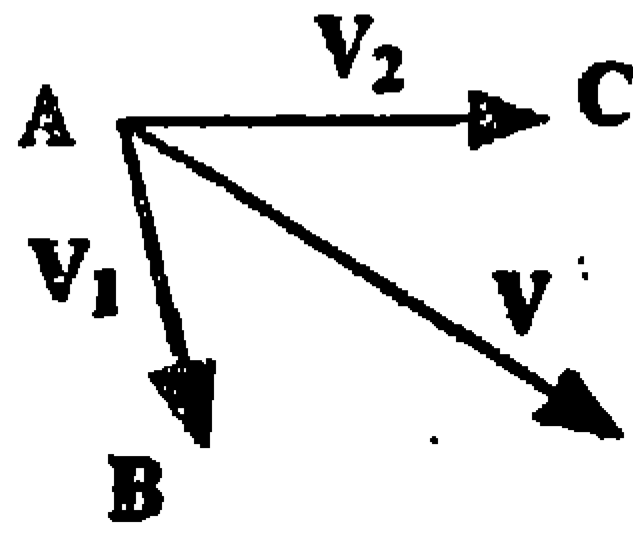
٥ - طرح المتجهات :

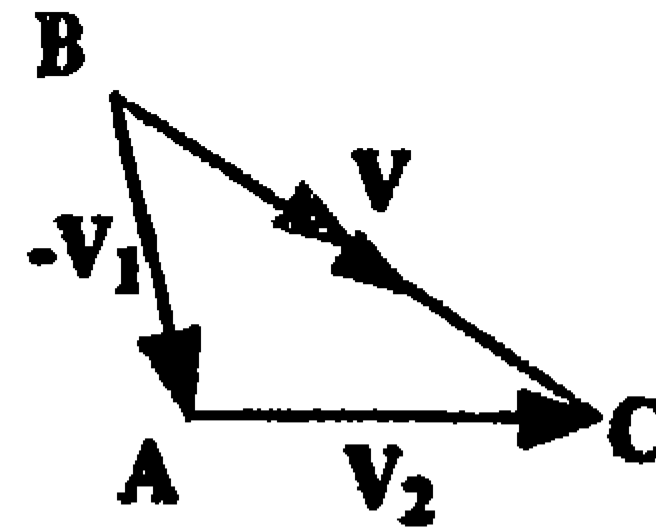
يمكن الحصول على طرح المتجهين V_1-V_2 وبسهولة و ذلك بأضافة V_1 إلى V_2 أنظر شكل (١-٥) طبقاً لقانون متوازى الأضلاع أو قانون المثلث ويعبر عادة عن الفرق V^{-} بين المتجهين بالمعادلة الأتجاهيه التالية

$$V^{-} = V_1 + V_2$$

حيث تعنى العلامة السالبة أمام المتجه عكس أتجاه الأنتقال عليه أى عكس سهمه وبذلك يكون

$$\overline{AB} = -\overline{BA}$$





(أ) (ب)

الشكل (١-٥)

٦ – استعمال فكرة جمع المتجهات في حل بعض المسائل الهندسية:

يمكن الاستعانة بفكرة جمع المتجهات في اثبات بعض المسائل الهندسية كمسألة وقوع ثلاث نقط على استقامة واحدة فمثلا ثلاث نقط A, B, C تقع على استقامة واحدة اذا تحققت المعادلة الإتجاهية الآتية:

$$\overline{AB} = n \cdot \overline{AC}$$

وفيها n كمية قياسية عددية، فمعنى المعادلة السابقة أن المتجهين $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ متوازيان والنسبة بين مقداريها هي n ولما كان المتجهان مشتركين في النقطة A وجب أن يكونا على استقامة واحدة.

٧ – ضرب كمية قياسية في كمية متجهة :

إذا ضربت كمية متجة a في كمية قياسية n أنتج ذلك كمية متجهة موازية للأولى مقدارهـا n من المرات مقدار الأولى. وكذلك قسمة المتجه a على كمية قياسية n يعطي متجها موازياً للأول مقداره $\frac{a}{n}$

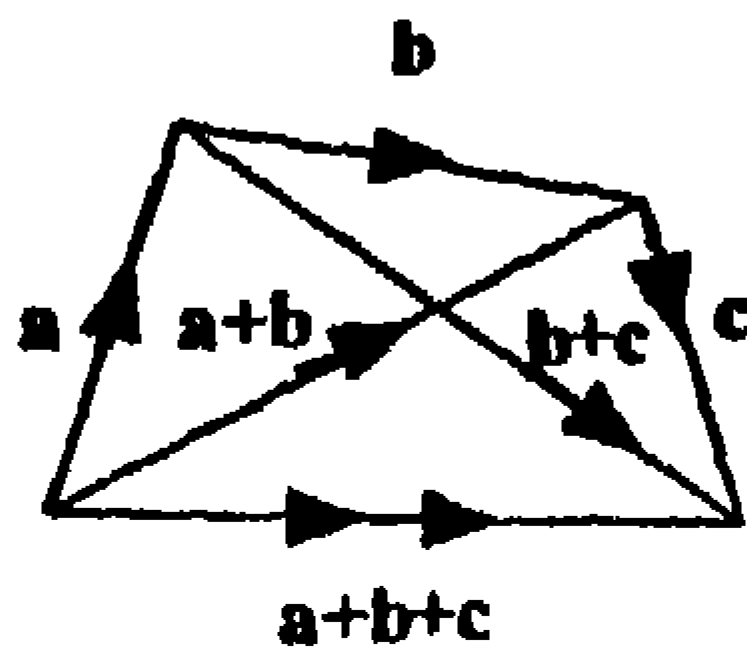
ويمكننا بناء على ما تقدم أن نجزم بصحة القوانين الأساسية الآتية فيما يتعلق بجمع المتجهات:

(I) $a + b = b + a$

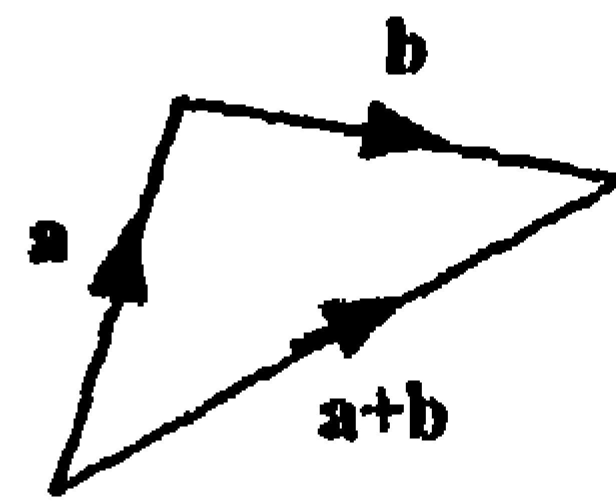
(II) $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

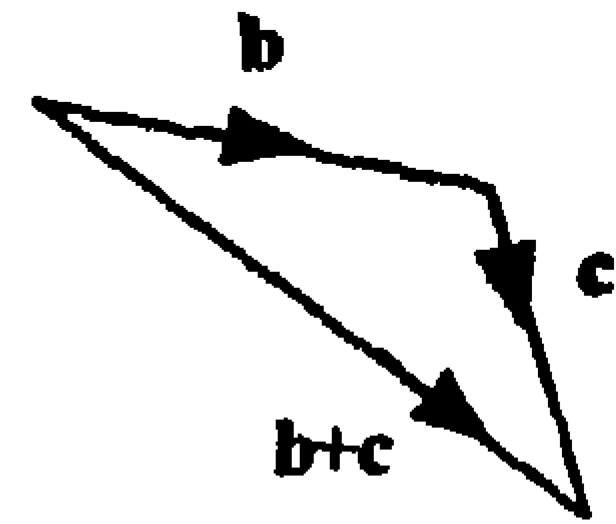
(III) $m [a + b] = ma + mb$

والبراهين واضحة في الشكل (١–٦) أ ، ب ، جـ

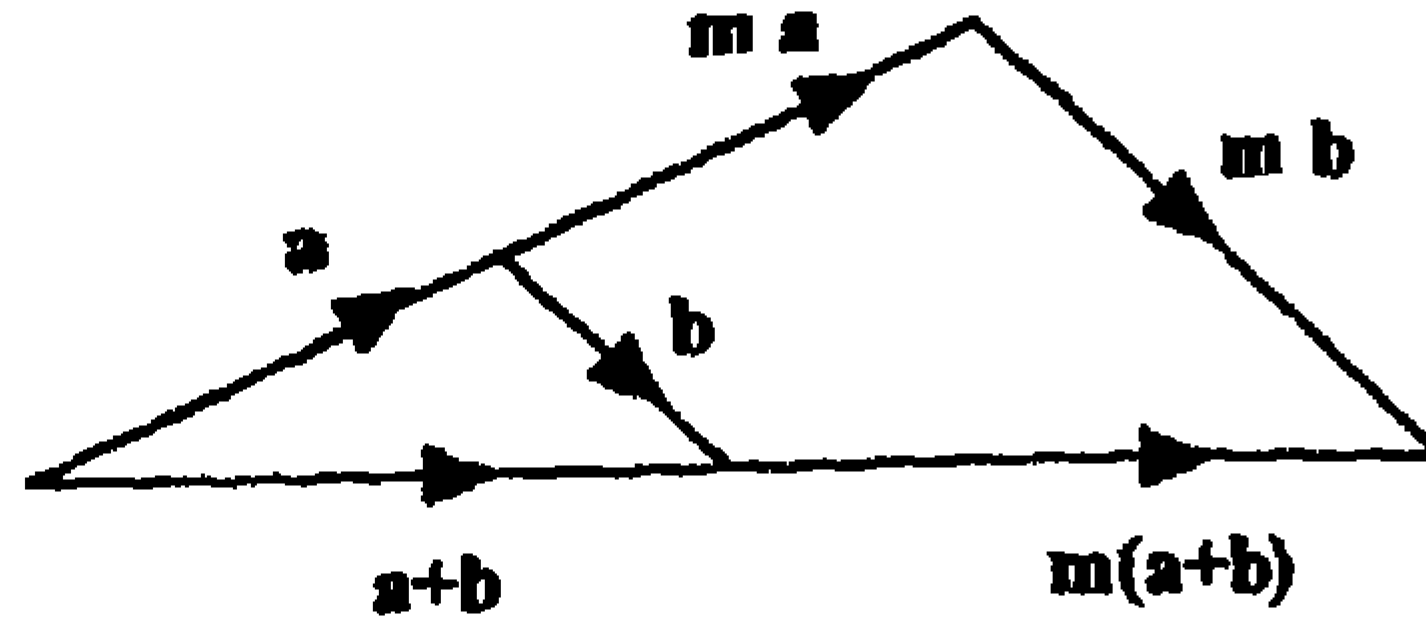


(ب)





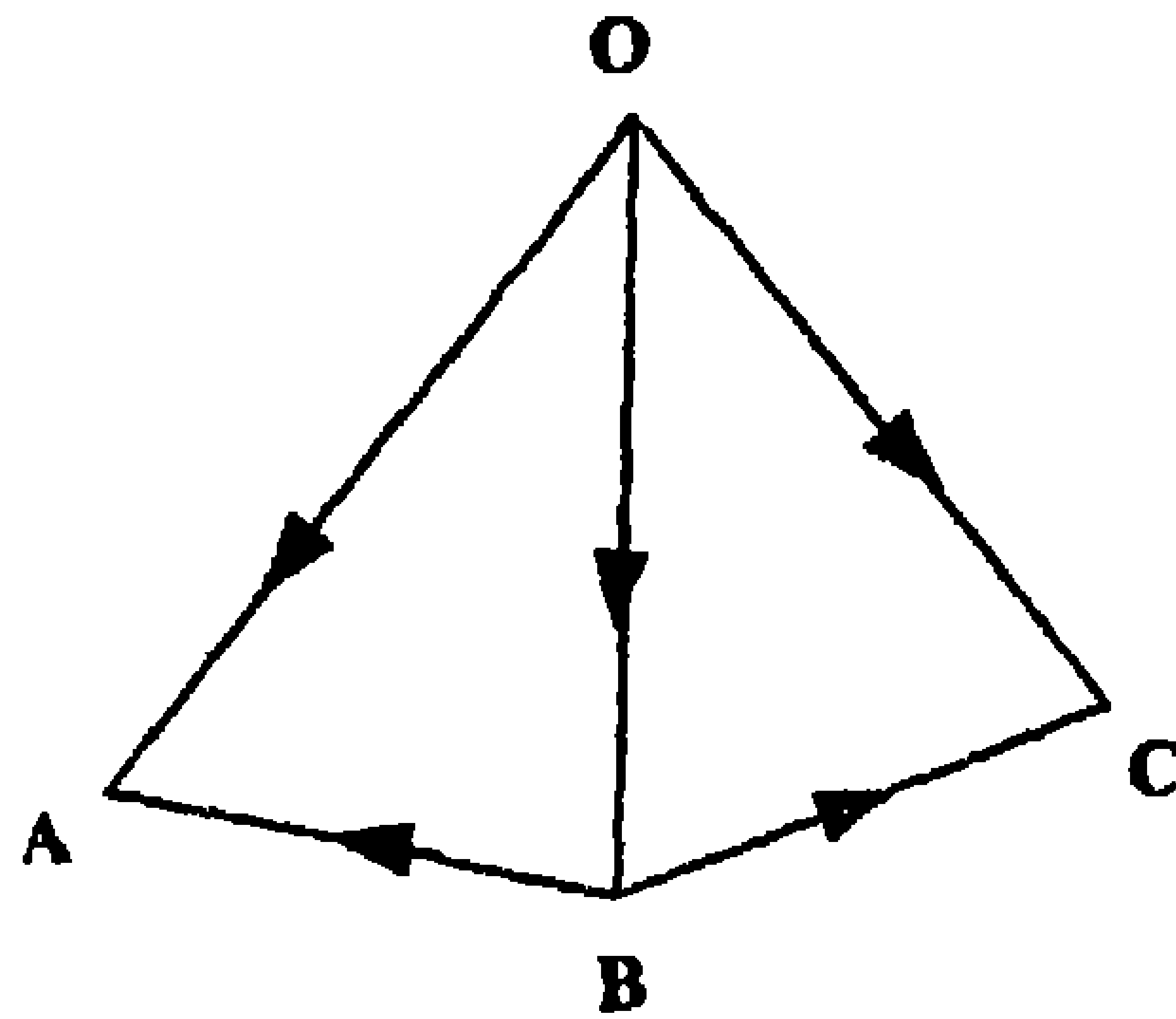
(أ)



(جـ)

شكل (١-٦) القوانين الأساسية فى جمع المتجهات

أمثلة توضيحية:



(١) إذا تحققت المعادلتان الآتيتان

$$p.OA+q.OB+r.OC=0$$
$$\&p+q+r=0$$

بالنسبة إلى المتجهات المبينة بشكل (١-٩)

فأثبت أن النقط الثلاثة A, B, C على استقامة واحدة علما بأن الكميات (p, q, r) كميات قياسية.

الحل:

$$p.\overline{OA}+q\overline{OB}+r.\overline{OC}$$
$$=p.(\overline{OB}+\overline{BA})+q.\overline{OB}+r.(\overline{OB}+\overline{BC})$$
$$=(p+q+r)\overline{OB}+p.\overline{BA}+r.\overline{BC}$$
$$=0+p.\overline{BA}+r.\overline{BC}=0$$

$$\therefore\ \overline{BA}=-\frac{r}{p}.\overline{BC}$$

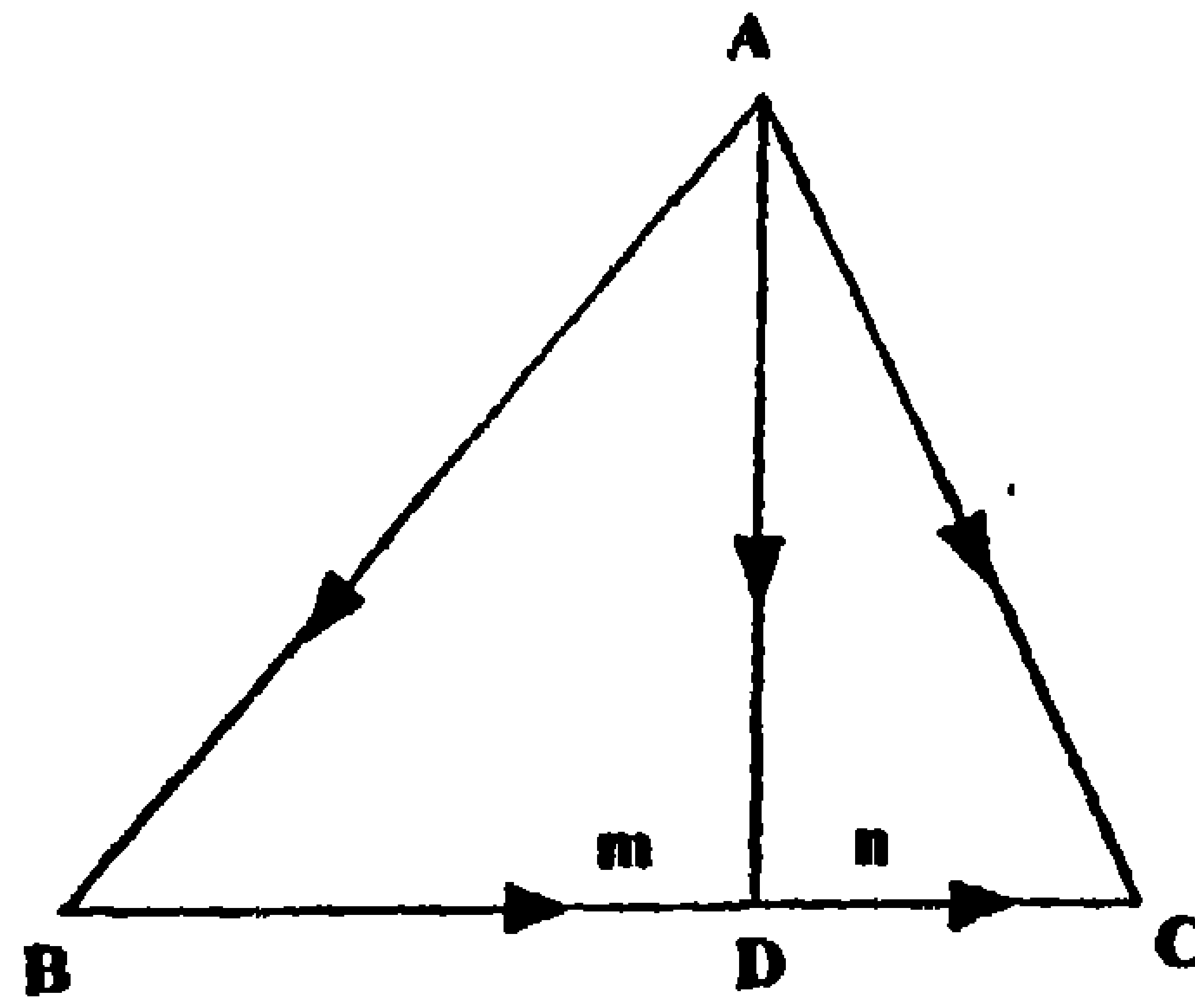
وهو الشرط اللازم لوقوع النقط الثلاثة (A, B, C) على استقامة واحدة

(٢) نظرية إذا قسمت قاعدة المثلث (A B C) في نقطة D بنسبة $\frac{m}{n}$ فأثبت أن

$$m.\overline{AC}+n.\overline{AB}=(m+n)\overline{AD}$$

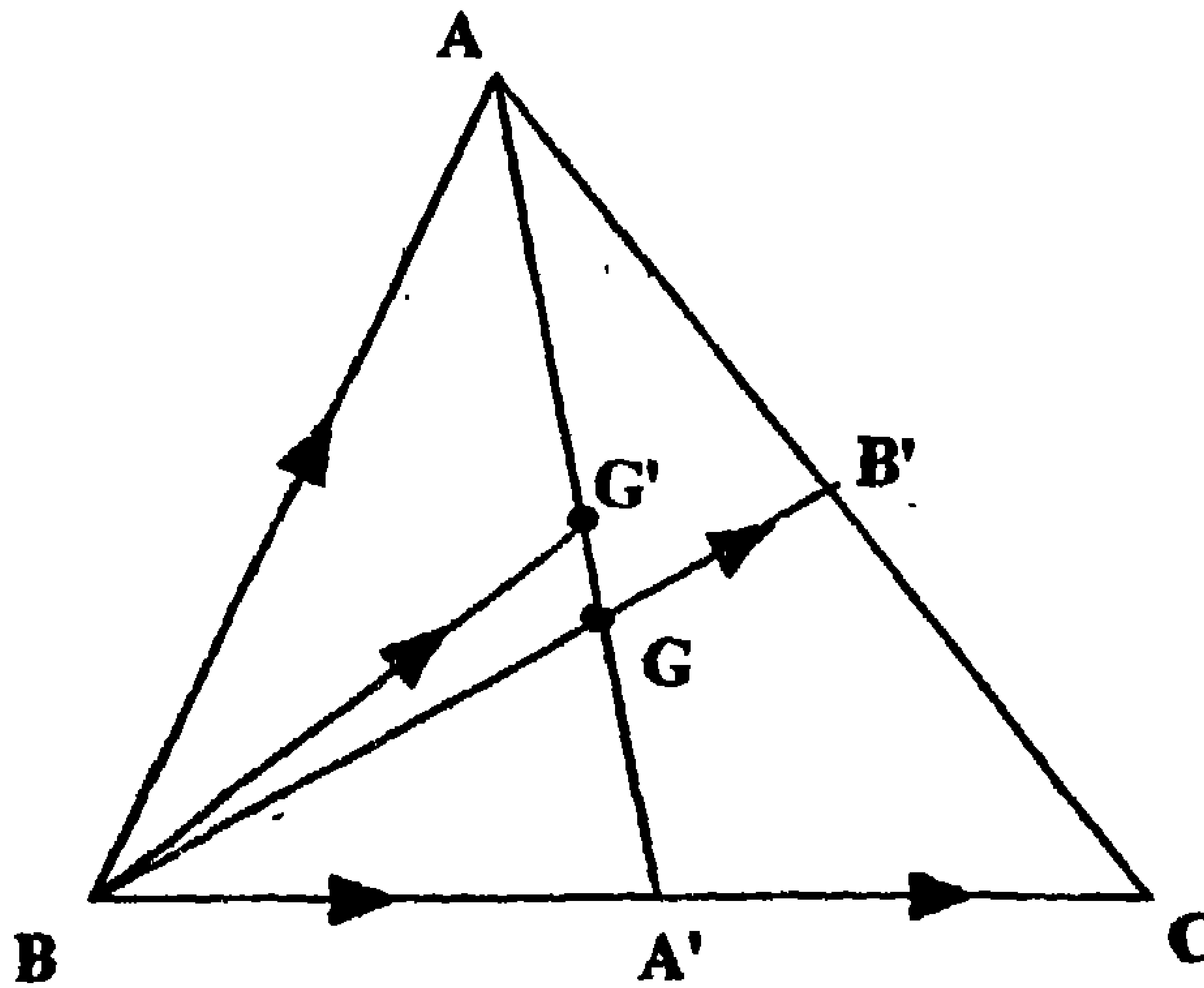
الحل

$$m.\overline{AC}+n\overline{AB}$$
$$=m.(\overline{AD}+\overline{DC})+n.(\overline{AD}+\overline{DB})$$
$$=(m+n)\overline{AD}+(m.\overline{DC}+n.DB)$$
$$=(m+n)\overline{AD}$$



والقوس الأخير أختفى بسبب تقسيم القاعدة بالنسبة $\frac{m}{n}$

(٣) أثبت أن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كلا منها بنسبة ١ . ٢



الحل:

لنفرض أن AA' ، BB' مستقيمان متوسطان في المثلث $C\ B\ A$ تلاقيا في G. إن لم تقسم G المستقيم AA' بالنسبة ١ : ٢ لنفرض أن أخرى G'. تقسمه بنسبة ١ : ٢

بتطبيق نتيجة النظرية (٢) على كل من المثلثين ABC ، AA'B على الترتيب نحصل على:

$$1.\overline{BA}+2.\overline{BA'}=(1+2).\overline{BG'}$$
$$1.\overline{BA}+1.\overline{BC'}=(1+1).\overline{BB'}$$

ومن المعادلة الأولى

$$\overline{BA}+\overline{BC}=3.\overline{BG'}$$

ومن المعادلة الثانية

$$\overline{BA}+\overline{BC}=2.\overline{BB'}$$

$$\therefore 3\,\overline{BG'}=2\overline{BB'}$$
$$\therefore \overline{BB'}=\frac{3}{2}\overline{BG'}$$

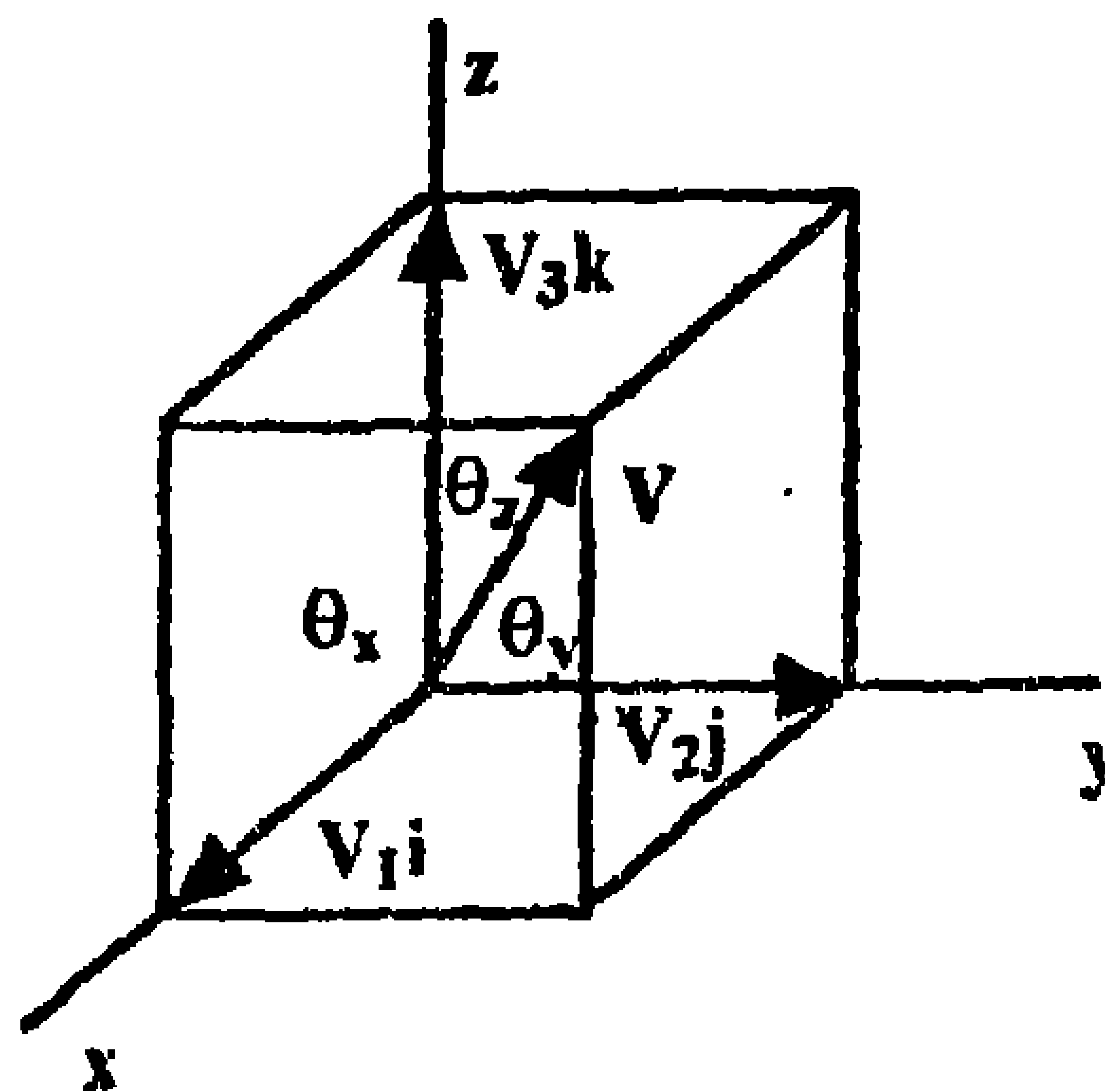
وهذه تعني انطباق المتجه $\overline{BB'}$ على المتجه $\overline{BG'}$ وأن مقدار الأول يساوي مرة ونصف مقدار الأخير وعليه فالنقطة G' تقع على G وتقسم $\overline{AA'}$ بنسبة ١ : ٢

ويمكن التعميم على المستقيم المتوسط الثالث $\overline{CC'}$ وهذا يثبت المطلوب.

٨ – الوحدات المتجهة الأساسية (i,j,k) :

هى وحدات منطبقة على المحاور الكارتيزية المتعامدة (x,y,z) بحيث تنطبق الوحدة المتجهة i على المحور x وفى اتجاهه الموجب والوحدة المتجهة j تقع على المحور y وفى اتجاهه الموجب و الوحده المتجهه k على المحور z+ وفى اتجاهه الموجب وتخضع اتجاهات المحاور (x,y,z) وأيضا الوحدات المتجهة (i,j,k) لقاعدة البريمة اليمنية أى أن الانتقال من المحور (x+) الى المحور (y+) يحدث أنتقالاً للبريمة اليمنية الموازيه لمحور z فى الاتجاه الموجب له

واذا كان لدينا متجة V لة مركبات ثلاث (V_1,V_2,V_3) فى اتجاه المحاور الكارتيزية (x,y,z) على الترتيب فأنه من الممكن التعبير عن التجهه V بالمعادلة الاتجاهيه الأتيه



$$V = V_1\, i + V_2\, j + V_3\, k$$

وفيها المقادير الثلاث (V_1,V_2,V_3) كميات قياسيه وتعنى بالمعادله أن المتجه V هو محصله متجهات ثلاثة $V_1\, i$ فى الاتجاه x , $V_2\, j$ فى الاتجاه y , $V_3\, k$ فى الاتجاه z وهذه طريقه يسيره للتعبير عن المتجه بدلالة مركباته القياسيه

واذا أستعملت الاتجاهات l, m , n بدلاله جيب تمام الاتجاهات ينتج

$$l = \cos \theta x , \qquad m = \cos \theta y , \qquad n = \cos \theta z$$

وتكتب المركبات المتجة كما يلى

$$V_x = lV. \qquad V_y = mV , \qquad V_z = nV$$

حيث أن

$$V^2 = V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}$$

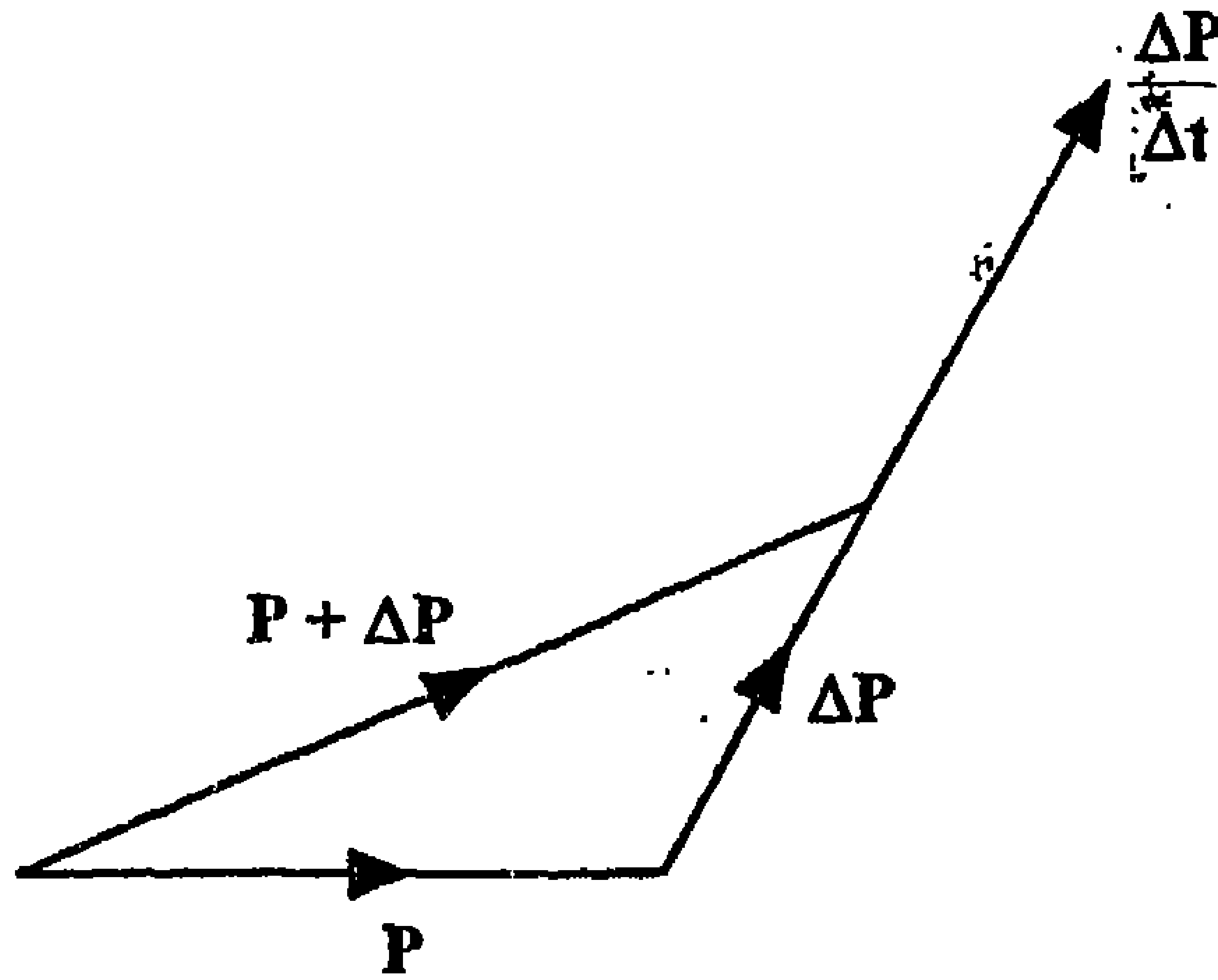
علماً بأن

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

٩ – تفاضل المتجه بالنسبة للزمن

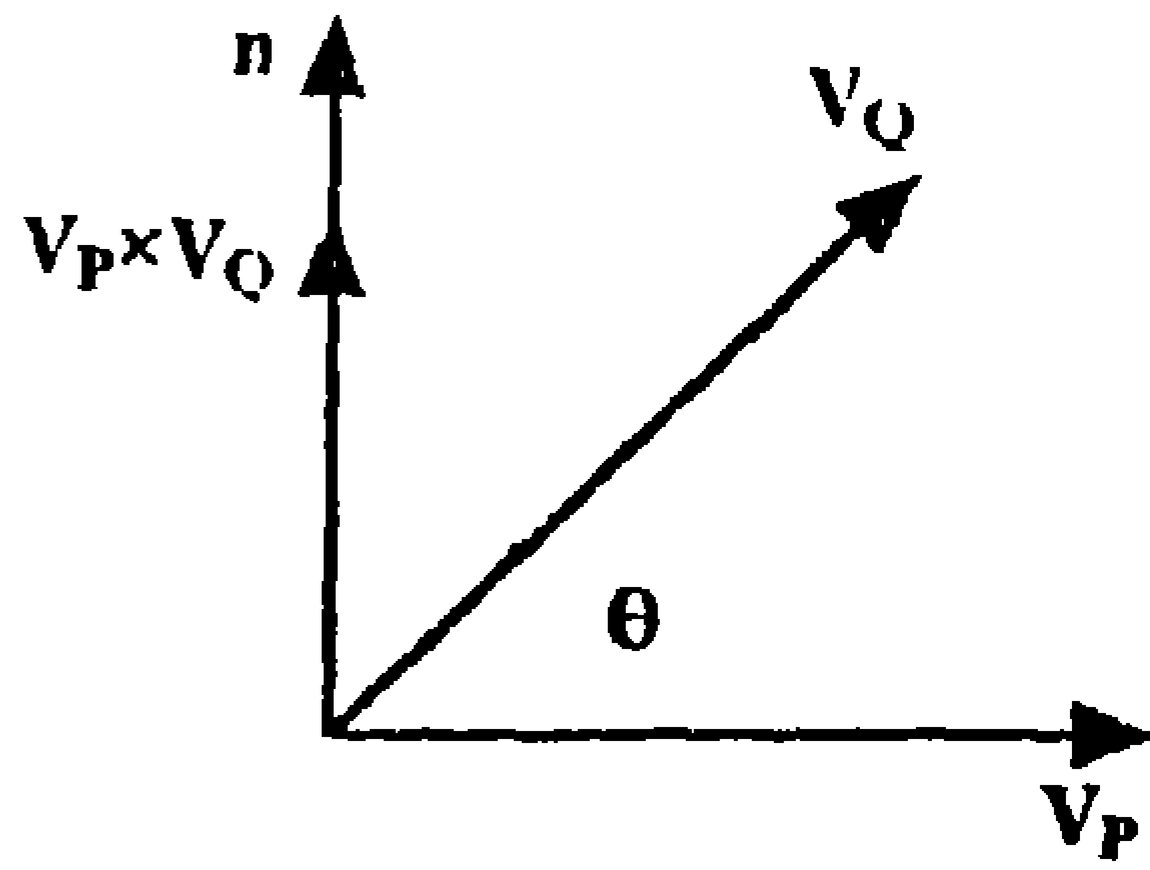
إذا أعطى المتجه المتغير R كدالة في الزمن t (وهو كمية قياسية) أمكن مفاضلة دالة المتجه بالنسبة إلى الزمن كما تفاضل الدوال العادية نظراً لأن قسمة كمية متجهة ΔP على كمية قياسية Δt لن يغير من اتجاه المتجه ΔP بل من مقداره فقط (شكل ١ – ١٢).

وبأخذ نهاية المقدار $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ عندما تقترب Δt من الصفر نحصل على المعامل التفاضلي $\frac{dP}{dt}$ وهي كمية متجهة



وتسري القواعد الأساسية لتفاضل الدوال القياسية على تفاضل الدوال المتجهة إلى متغير قياسي.

١٠ - الضرب الإتجاهي لمتجهين :



حاصل الضرب الإتجاهي لمتجهين V_P ، V_Q بمتجه ثابت عمودي على كل من المتجهين و مقداره يساوي مقدار V_P في مقدار V_Q في جيب الزاوية بينهما . و يرمز لحاصل الضرب الإتجاهي بالرمز ($V_P \times V_Q$) أي أن

$$(V_P \times V_Q) = V_P V_Q \sin\theta n$$

فيها n وحدة متجه عمودي على المتجهين تؤلف معهما

ثلاثيا يمينا كما في الشكل و بناء على هذا فان قانون التبادل لايسري على الضرب الإتجاهي لتغيير ترتيب المتجهين يغير سهم النتيجة .

$$(V_P \times V_Q) = -(V_Q V_P)$$

و تبعا لتعريف حاصل الضرب الإتجاهي لمتجهين يمكن كتابة النتائج الأتيه لضرب الوحدات المتجهة الرئيسيه ضرب أتجاهياً

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k \quad , \quad j \times k = i \quad , \quad k \times i = j$$

١١ - الضرب القياسي لمتجهين :

يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين V_P , V_Q بأنه الكميه القياسية الناتجه من ضرب مقدار الأولى في مقدار الثانية في جيب تمام الزاوية بينهما .أو بعبارة أخرى حاصل ضرب أحدهما في مسقط الأخر عليه. و يرمز لحاصل الضرب بالرمز V_P , V_Q

$$V_P \times V_Q = V_P . V_Q \cos\theta$$

و يطبق الضرب القياسي لمتجهين في تعريف الشغل فإن الشغل المبذول لقوة F انتقلت نقطة تأثيرها انتقال صغير ΔS بحاصل ضرب مقدار القوة F في مقدار ΔS في جيب تمام الزاويه بينهما و يكون الشغل الصغير ΔW

$$\Delta W = F \cdot \Delta S \cos \theta$$

و من هنا يتضح تطبيق قانون التبادل و التوزيع على الصورتين

$$V_P * V_Q = V_Q * V_P$$

$$V_P (V_Q + R) = V_P \cdot V_Q + V_P \cdot R$$

و المعادلة الأخيرة المعبرة عن قانون التوزيع ليست إلا صورة لقانون الإسقاط . فمسقط محصلة V_Q , R على V_P يساوي مجموع مسقطي V_Q على V_P , R على R .

و للحصول على ناتج الضرب القياسي لمتجهين V_P , V_Q بدلالة مركباتهما تتبع طريقة الوحدات المتجهة الأساسية i , j , k السابق شرحها من قبل و يمكن التعبير عن المتجهين V_P , V_Q بدلالة مركباتهما و الوحدات المتجهة الأساسية على الوجه الأتي :

$$V_P = V_{P_1} i + V_{P_2} j + V_{P_3} k$$

$$V_Q = V_{Q_1} i + V_{Q_2} j + V_{Q_3} k$$

و فيها (V_{P_1} , V_{P_2} , V_{P_3}) هي مركبات المتجه V_P في اتجاهات المحاور الكارتيزية المتعامدة (x , y , z) و كذلك بالنسبة الى V_Q . و تبعا لتعريف حاصل الضرب القياسي لمتجهين يمكن كتابة النتائج الأتية لضرب الوحدات المتجهة الأساسية ضرب قياسي :

$$i\,i = j\,j = k\,k = 1$$

$$j\,i = j\,k = k\,i = 0$$

أمثلة محلوله

مثال ١:

أوجد تحليليا محصلة متجهات

$\underline{a} \equiv (10, 30^\circ), \underline{b} \equiv (30, 60^\circ), \underline{c} \equiv (10, 210^\circ)$

الحل

بكتابة كل متجه بدلالة مركبتيه

$$a_x = 10\cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \quad , a_y = 10\sin 30^\circ = 5$$
$$b_x = 30\cos 60^\circ = 15 \quad , b_y = 30\sin 60^\circ = 15\sqrt{3}$$
$$c_x = 10\cos 210^\circ = -5\sqrt{3} \quad , c_y = 10\sin 210^\circ = -5$$

$$\underline{a} = 5\sqrt{3}\ i + 5\ j$$
$$\underline{b} = 15\ i + 15\sqrt{3}\ j$$
$$\underline{c} = -5\sqrt{3}\ i - 5\ j$$
$$\underline{R} = a + b + c$$
$$= (5\sqrt{3} + 15 - 5\sqrt{3})\ i + (5 + 15\sqrt{3} - 5)\ j$$
$$= 15\ i + 15\sqrt{3}\ j$$

$$\therefore |\underline{R}| = \sqrt{(15)^2 + (15\sqrt{3})^2} = 30$$
$$\tan\theta = \sqrt{3} \ \therefore \theta = 60^\circ , \underline{R} \equiv (30, 60^\circ)$$

مثال (٢)

اذا كان $a = -3i - 2j \ , \ \underline{b} = 2i + 3j \ , \ \underline{c} = \sqrt{3}\ i + j$

أوجد المتجه $R = 2\underline{a} + 3\underline{b} - 5\underline{c}$

الحل

$$R = +2(-3i-2j)+3(2i+3j)-5(\sqrt{3}j+j)$$
$$= -5\sqrt{3}\,i + 0\,j$$

$$\therefore R = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + 0} = 5\sqrt{3}$$
$$\tan\theta = \frac{0}{-5\sqrt{3}} = 0 \quad \therefore \theta = 180^\circ$$
$$\therefore R \equiv (5\sqrt{3}, 180^\circ)$$

مثال (٣) اذا كان

$$\underline{a} = 2i + 5j + 8k$$
$$\underline{b} = 2i + 1j + 2k$$
$$\underline{c} = -i - 2j + 2k$$

أوجد R حيث $\underline{R} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$

الحل:

$$R = (2+2-1)\,i + (5+1-2)\,j + (8+2+2)\,k$$
$$= 3i + 4j + 12k$$

$$\therefore R = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (12)^2} = 13$$
$$\cos\alpha_R = \frac{3}{13}, \cos\beta_R = \frac{4}{13}, \cos\gamma_R = \frac{12}{13}$$

مثال (٤)

اذا كان

$\underline{r}_1 = 3\,i - 2\,j + k$

$\underline{r}_2 = 2\,i - 4\,j - 3\,k$

$\underline{r}_3 = -\,i - 2\,j + 2\,k$

أوجد المتجه $R = 2\,\underline{r}_1 - 3\,\underline{r}_2 - 5\,\underline{r}_3$

الحل

$R = 2\,(3i - 2\,j + k) - 3\,(2\,i - 4\,j - 3\,k) - 5\,(-\,i + 2\,j + 2\,k)$

$\therefore R = 5\,i - 2\,j + k$

$R = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}$

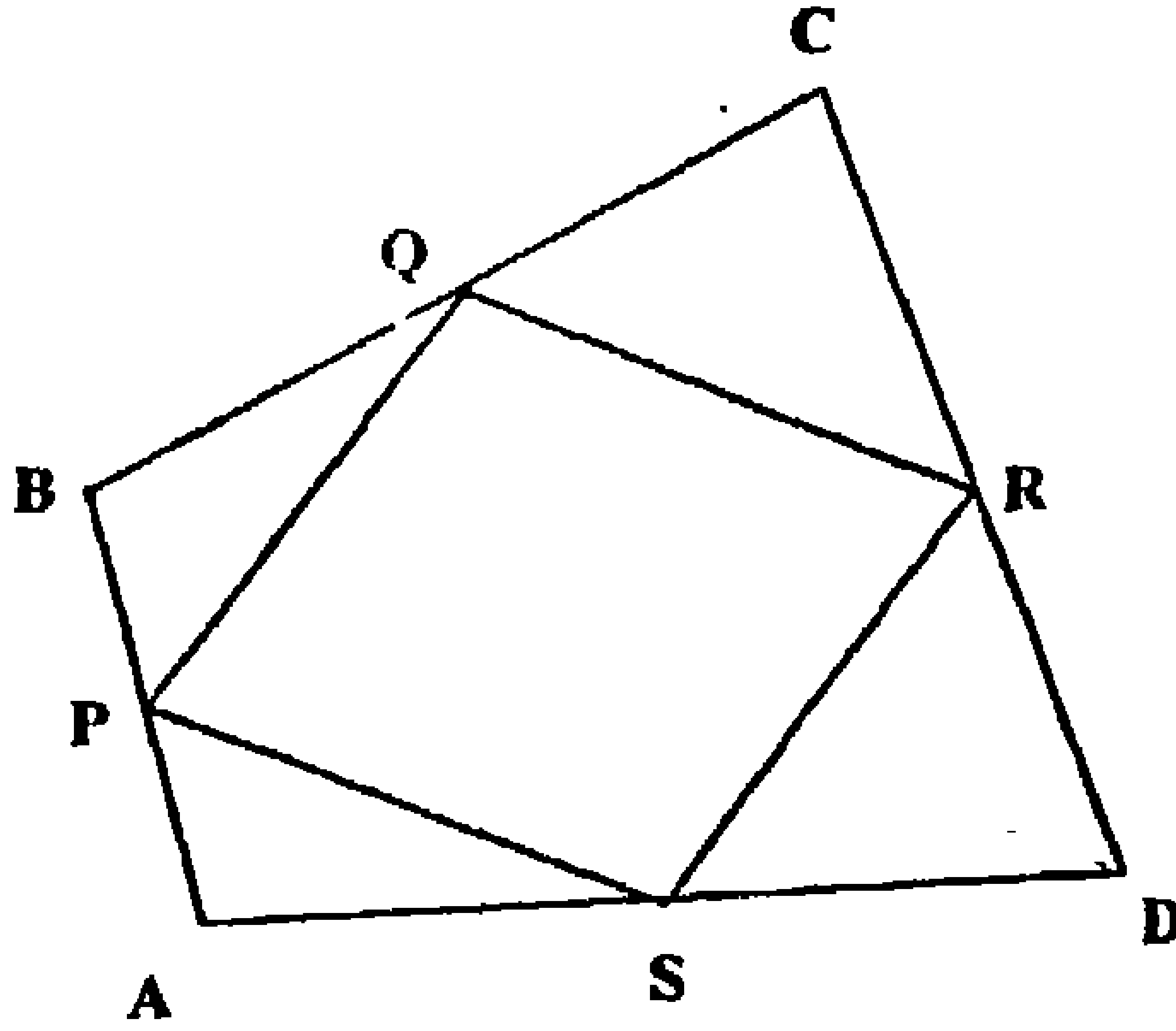
$\cos\alpha_R = \dfrac{5}{\sqrt{30}}\ ,\ \cos\beta_R = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}\ ,\ \cos\gamma_R = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$

مثال (٥)

أثبت أنه اذا وصلت نقط منتصفات الأضلاع المتجاورة لأي شكل رباعي بخطوط مستقيمة .. فأن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي أضلاع.

الحل:

ليكن الشكل الرباعي المعطي ABCD بنقط منتصفات الأضلاع المتجاورة هي p , Q , R , S كما بالشكل بالنظر إلى الشكل ينتج الآتي



$$\vec{PQ}=\frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC})\text{.....................(1)}$$

وبالمثل

$$\vec{QR}=\frac{1}{2}(\vec{BC}+\vec{CD})\text{.....................(2)}$$

$$\vec{RS}=\frac{1}{2}(\vec{CD}+\vec{DA})\text{.....................(3)}$$

$$\vec{SP}=\frac{1}{2}(\vec{DA}+\vec{AB})\text{.....................(4)}$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ثم المعادلتين (٢) ، (٤) مع مراعاة أنه $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$

$$\vec{PQ}+\vec{RS}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA})=\vec{0}$$

$$\vec{QR}+\vec{SP}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA})=\vec{0}$$

$$\therefore \vec{PQ}=-\vec{RS}\ ,\ \vec{QR}=-\vec{SP}$$

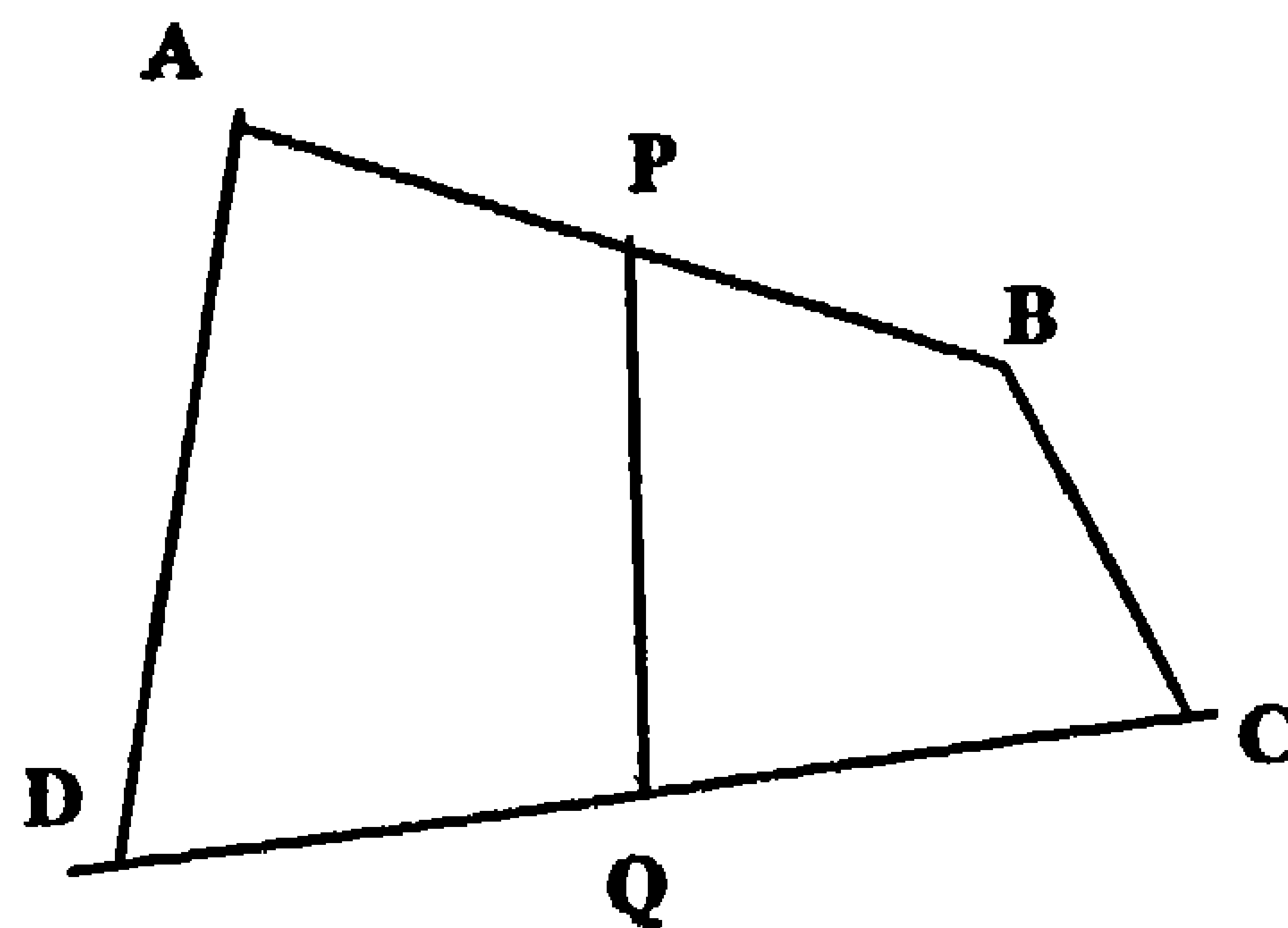
أو

$$\vec{PQ}=\vec{SR}\quad ,\ \vec{QR}=\vec{PS}$$

وهذا يعني أنه في الشكل الرباعي PQRS كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين أي أنه متوازي أضلاع.

مثال (٦)

في الشكل الرباعي ABCD .. اذا كانت نقطة P هي نقطة منتصف AB ونقطة Q هي منتصف CD .. أثبت أن $\vec{AD}+\vec{BC}=2\vec{PQ}$



الحل .

واضح من الشكل أنه

$$\vec{AD}=\vec{AQ}+\vec{QD}$$
$$\vec{BC}=\vec{BQ}+\vec{QC}$$

وبالجمع ينتج أن

$$\vec{AD}+\vec{BC}=\vec{AQ}+\vec{BQ}+\vec{QD}+\vec{QC}$$

حيث أنه Q هي منتصف DC

$$\therefore \overrightarrow{QD} = -\overrightarrow{QC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ}$$

وحيث أن P هي منتصف AB

$$\therefore \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{PQ}$$

وهذا يعني أنه

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{PQ}$$

وهو المطلوب اثباته

مثال (٧)

أوجد قيمة μ لكي يكون المتجهان الآتيان متعامدين

$$\underline{a} = 2\,i + \mu\,j + k$$

$$\underline{b} = 4\,i - 2\,j - 2\,\mu\,k$$

الحل

بما أن شرط تعامد المتجهين هو

$$a \cdot b = 0$$

وهذا يعني أن

$$2\,(4) + (\mu)\,(-2) + (1)\,(-2\mu) = 0$$

$$8 - 2\,\mu - 2\,\mu = 0$$

ومنها $\mu = 2$

مثال (٨)

بين أن المتجهات

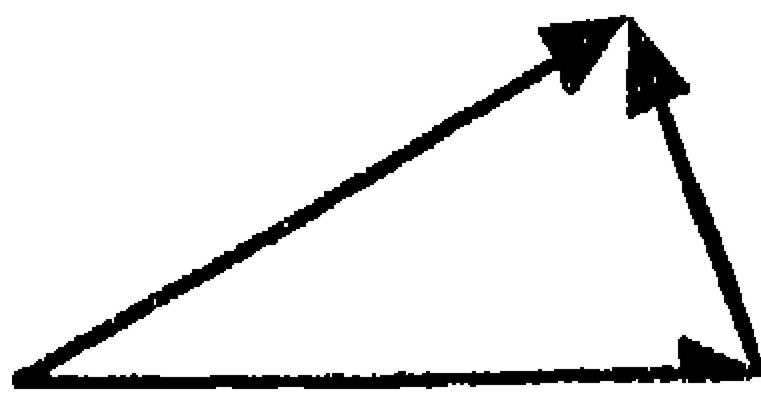
$\underline{a} = 3\,i - 2\,j + k$

$\underline{b} = i - 3\,j + 5\,k$

$\underline{c} = 2\,i + j - 4\,k$

تكون مثلثا قائم الزاوية

الحل



المتجهات a , b , c ستكون مثلثا اذا كان

أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين



أو مجموع المتجهات الثلاثة = صفر

بالمجاورة سنجد أن

$$a = b + c$$

∴ المتجهات ستكون مثلثا .. ولإثبات أنه قائم الزاوية نحسب حاصل الضرب القياسي للمتجهات مثنى مثنى ينتج أن

$$a \cdot b = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) \neq 0$$

$$b \cdot c = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(4) \neq 0$$

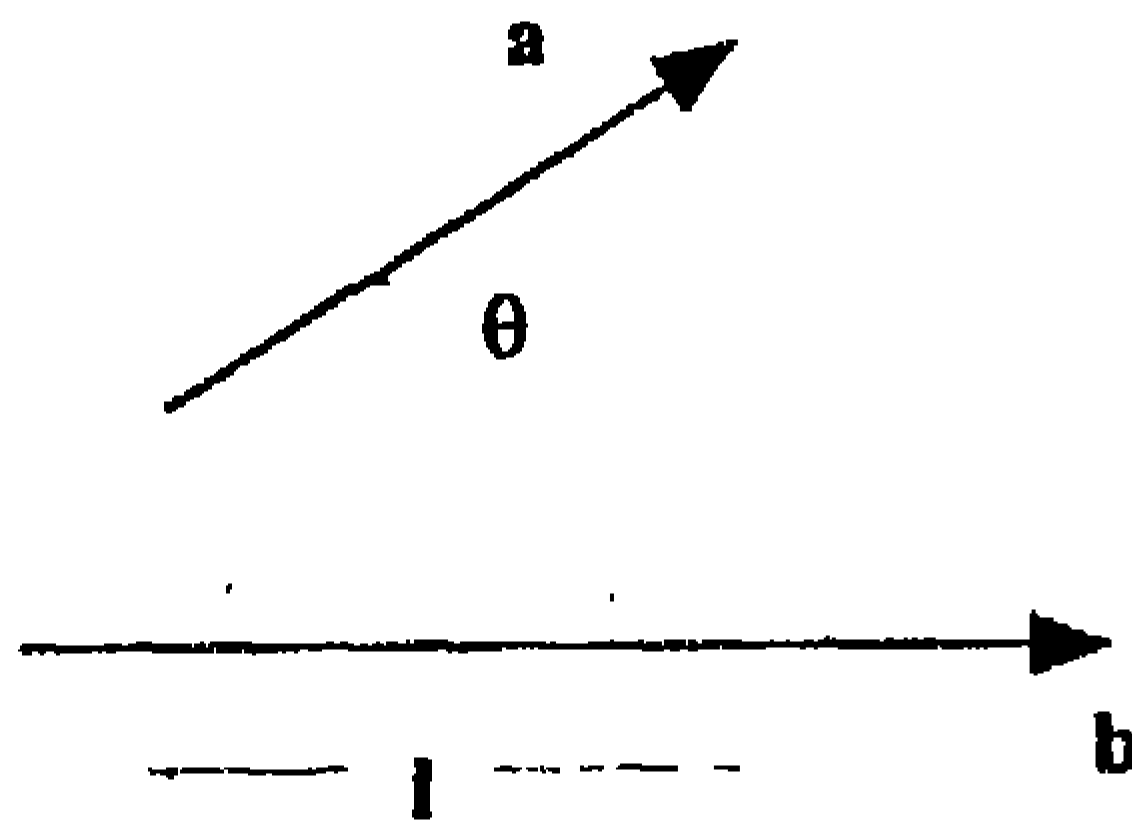
$c \cdot a = (2)(3) + (1)(-2) + (-4)(1) = 0$

∴ في المثلث الناتج يكون المتجه a عموديا على المتجه c أي أن المتجهات المعطاة تكون مثلثا قائم الزاوية.

تطبيقات لحاصل الضرب القياسي لمتجهين

ولحاصل الضرب القياسي لمتجهين تطبيقات عديدة نذكر منها

(أ) ايجاد مسقط متجه a على آخر b



نفرض أن مسقط a على b هو l حيث

$$l = a \cos \theta$$

$$= a \cdot 1 \cos \theta$$

$$\therefore l = a \cdot b$$

وهذا يعني أن طول مسقط المتجه $\underline{a}$ على المتجه $\underline{b}$

يقدر بحاصل الضرب القياسي للمتجه $\underline{a}$ في متجه الوحدة $\underline{b}$ للمتجه $\underline{b}$

مثال (٩)

أوجد مسقط المتجه

$$\underline{a} = \underline{i} - 2\,\underline{j} + \underline{k}$$

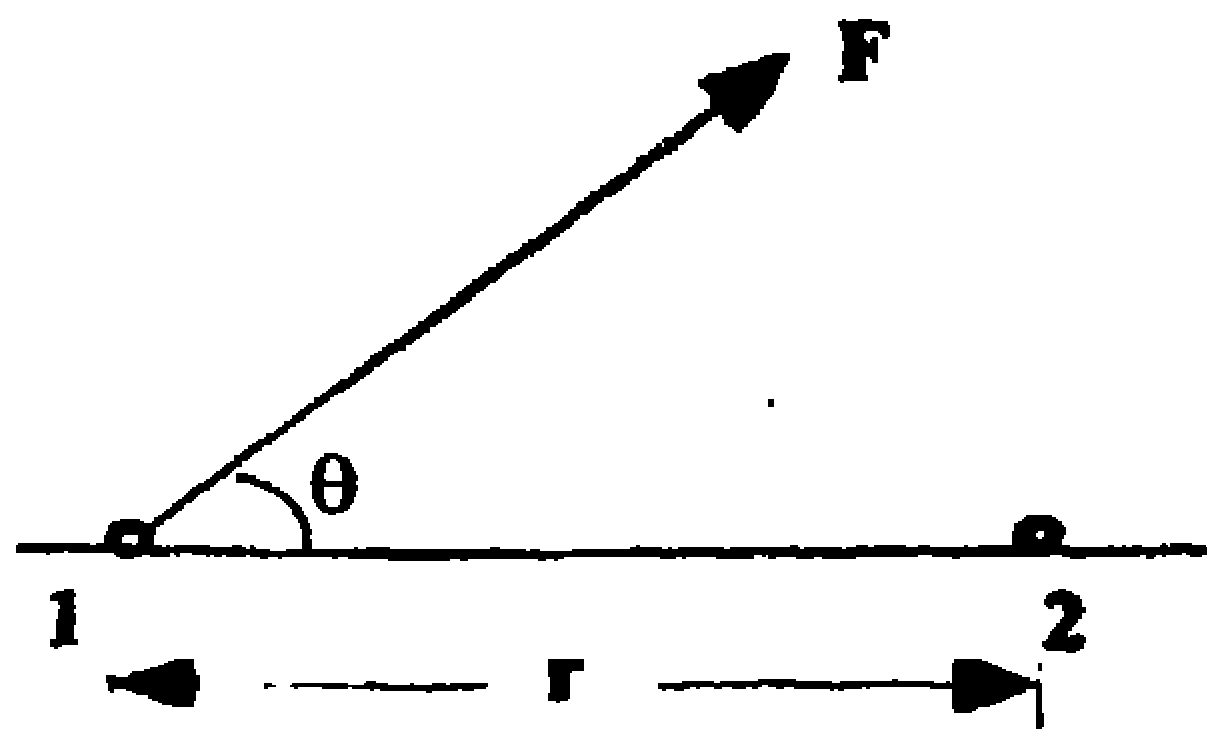
على المتجه $\underline{b} = 4\,\underline{i} - 4\,\underline{j} + 7\,\underline{k}$

الحل

$$l = \underline{a}.\underline{b} = \underline{a}.\frac{\underline{b}}{b}$$

$$= (i - 2j + k).(\frac{4i - 4j + k}{\sqrt{16 + 16 + 49}})$$

$$= (1)(\frac{4}{9}) + (-2)(-\frac{4}{9}) + (1)(\frac{7}{9}) = \frac{19}{9}$$



شغل قوة F بين موضعين

معروف أنه للقوة الثابتة المقدار $\underline{F}$ المؤثرة على نقطة مادية يكون الشغل المبذول بـ $\underline{F}$ لتحريك النقطة بين موضعين هو (١) ، (٢) البعد بينهما r هو

$$W_{1 \to 2} = F\, r \cos\theta$$
$$= F . r$$

مثال (١٠)

أوجد الشغل المبذول بالقيمة

$\underline{F} = 2i - j - k$

لتحريك جسيم على طول المتجه $r = 3i + 2j - 5k$

الحل

$W = \underline{F} . \underline{r}$

$= (2i - j - k) . (3i + 2j + 5k)$

$= (2)(3) + (-1)(2) + (-1)(-5)$

$= 9$ N.m

ويتضح من هذا المثال أن شغل قوة F مركباتها F_x ، F_y ، F_z تنقل نقطة تأثيرها انتقالاً صغيراً r مركباته x, y, z يساوي المجموع الجبري لشغل مركبات القوة .. ويعني ذلك أن

$$W = F_x . x + F_y . y + F_z . z$$

الباب الثاني

التعاريف و القوانين الأساسية

كما سبق لنا أن علم الأستاتيكا هو علم دراسة الأجسام المادية تحت تأثير الإتزان من حيث سكون مستمر أو حركة منتظمة في خط مستقيم و أيضا الحركة الدورانية المنتظمة لجسم متماسك حول محور حر و لذا يجب التعرف على أسس علم الأستاتيكا و التي تشمل بعض التعاريف و القوانين الأساسية .

١ - التعاريف الأوليه في علم الإستاتيكا:

أ - الجسيم: هو جسم تضاءلت أبعاده بحيث يمكن تمثيله بنقطه هندسيه.

ب - الجسم المتماسك: هو الجسم الذي يمكن إهمال ما يطرأ على شكله من تغيرات في الدراسه المعنيه ، وبذلك تعتبر أبعاده وحجمه ثابته ؛ ويمثل بشكل هندسي ثابت.

جـ - الجسم المرن: وهو الجسم الذي تتناسب التغيرات المستحدثه فيه والعوامل المؤثره (القوه) وفقا لقانون هوك (Hook) للتوسع في دراسة الأجسام المرنه موكول إلى نظريات المرونه . (Theoru of Elasticity)

د - الجسم المائع المثالي: ويفترض فيه إنعدام المقاومه للقوى المماسه للأسطح الداخليه والخارجيه (قوى القص وقوى الشد السطحي) ؛ ولذا فهو لا يتخذ شكل معين فتتبع العلاقه بين الضغط والحجم قانون بويل (Boyel) ، أو قانون شارل (Charles) حسب الأطوال.

هـ - الإنتشار المتقطع والإنتشار المتواصل: إستاتيكيا فإنه يمكن إعتبار الأجسام مجموعات من الجسيمات وعندئذ تستعمل علامة Σ (Sigma) للدلاله على مجموع عدد منها.

فيعبر عن مجموع عدد من الجسيمات m_i يكتب:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots\dots + m_n$$

أما الجسم المتواصل الإنتشار فيعبر عن جزء متناهي في الصغر منه برمز التفاضل (dm) ولتجميعه برمز التكامل (dm) ∫ ، وصورة الإنتشار المتواصل هي المستعمله في الأجسام المرنه والأجسام المائعه.

والإنتشار المتواصل نوعين ؛ إما متجانس (Homogenity) وذلك إذا كانت الكثافه للإنتشار ثابته ، وآخر غير متجانس (Non-Hemogeneous أو Hetorogeneous) في حالة عدم توافر تلك الخاصيه.

والأجسام وفقا لثبوت صفات التكوين الجزيئي في الإتجاهات المختلفه من عدمه تنقسم إلى متماثلة التكوين (Isontropic) وغير متماثلة التكوين (Non-Isontropic) ، فمثلا الخشب تختلف صفاته في إتجاه الألياف عنها في الإتجاه العمودي على الألياف فهو غير متماثل التكوين.

و - القوه: هي العامل الرئيسي في الإستاتيكا ويمكن تعريفها بأنها المدرك الحسي من نوع الشد أو الضغط الذي يعمل على تغير حالة الحركه أو السكون للأجسام مالم يتوازن أو يتلاشى تأثيره بفعل عوامل أخرى من نوعه وهي إما مركزه أو موزعه على الأجسام بإنتظام.

وتمثل رياضيا بمتجهات ذات خطوط عمل محدده .Sliding vectors أو Line-bound vectors ؛ وذلك للدلاله على إمكان نقلها على خط العمل نفسه دون تغير في تأثيرها على الجسم المتماسك ، وقد خصصنا بابا على عمليات تركيب وتحليل المتجهات المعنيه بخط عمل سواءً بالطريقه البيانيه Graphical Method أو الطرق التحليليه Analytical Methods.

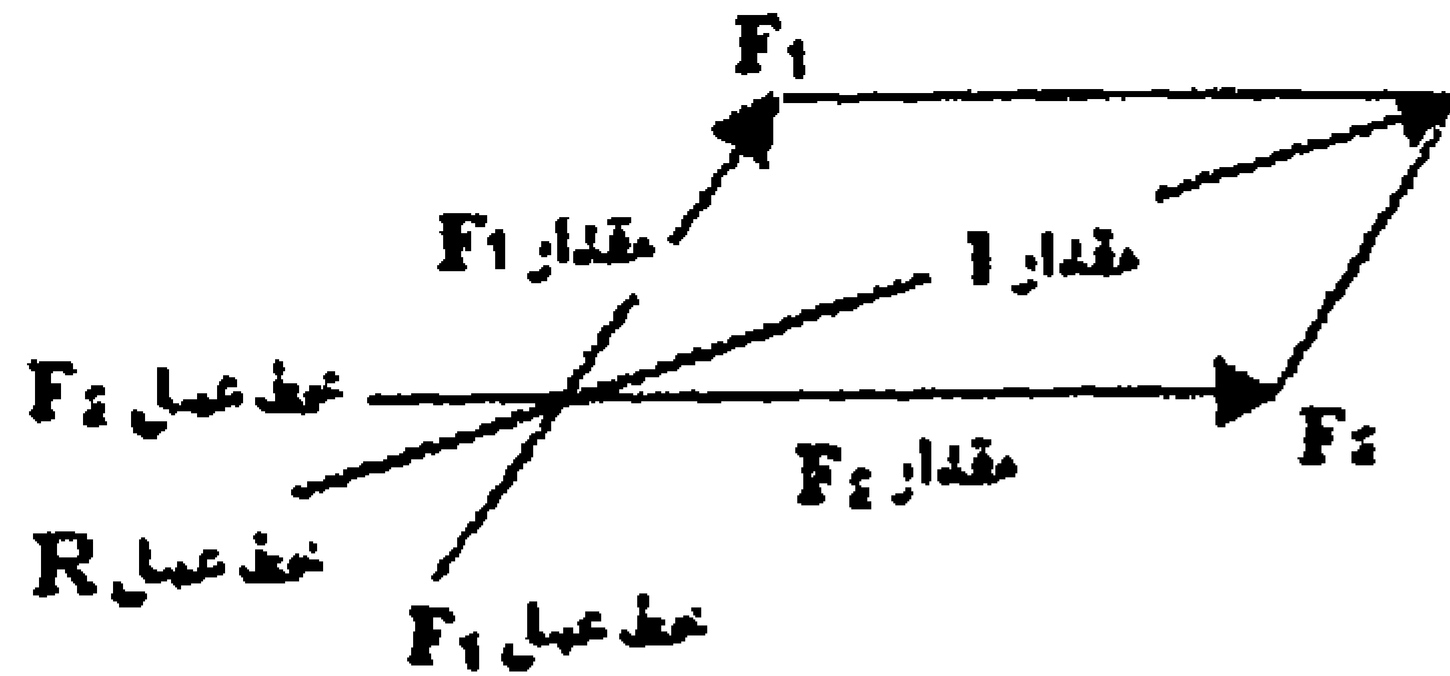
ويمكن قياس مقدار القوه بما تحدثه من إستطالة في زنبرك معاير ومقارنة مقادير القوى المختلفه على هذا الأساس.

ز - الكتله: هي الصفه الميكانيكيه للأجسام الماديه التي تعبر عن خاصية القصور الذاتي (Inertia) ، أي مقاومة التغير في الحركه. وليست لها أهميه تذكر في الإستاتيكا العاديه عن أنها صفه رقميه للأجسام تتناسب مع أوزانها في المكان الواحد على سطح الأرض . ولكنها تلعب الدور الرئيسي في الديناميكا عموما وفي إستاتيكا المتحركات.

٢ - القوانين الأساسيه:

أ - قانون تركيب وتحليل القوى:

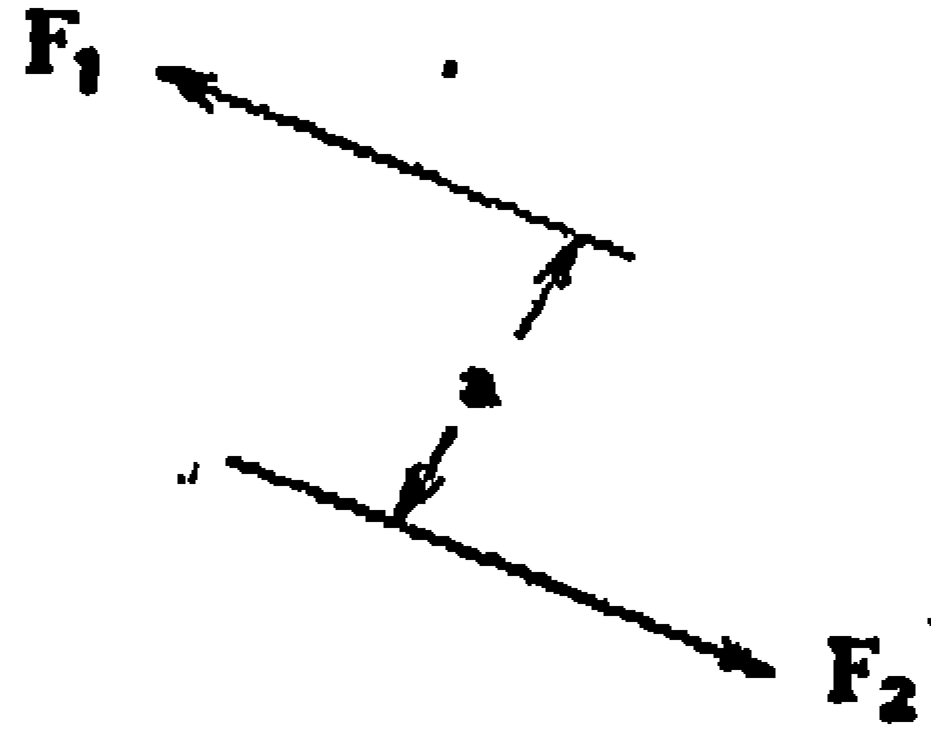
ويعرف بقانون متوازي الأضلاع للقوى وينص على أنه إذا أثرت قوتان على جسم أو على جسم متماسك فإن تأثيرهما يعادل تأثير قوه واحده تسمى المحصله (Resultant) تعمل على قطر متوازي الأضلاع المكون من القوتين كما في الشكل (١-٢) ، و يلاحظ التقاء خطوط العمل في نقطه واحده وأن الإتجاهات تنبعث من هذه النقطه والعكس صحيح أي أن R يمكن إستبدالها بالقوتين F_1 و F_2.



شكل (١-٢)

وهناك قانون عام في التركيب والتحليل (أو التجميع) (General Low of Sperposition) وينص على أن تأثير المركب لمجموعه من القوى تعمل في وقت واحد يعادل المجموع الإتجاهي للتأثيرات الفرديه الناتجه عن كل من القوى على حده.

وهذا يعني أنه إذا ركبت مجموعه من القوى إلى المحصله R_1 وركبت مجموعه أخرى R_2 وكانت $R_1 = R_2$ وعلى نفس خط العمل فيقال أن المجموعتين متكافئتان أي أن تأثيرهما واحد على الجسم المتماسك مهما إختلفت تفاصيل كل من المجموعتين.



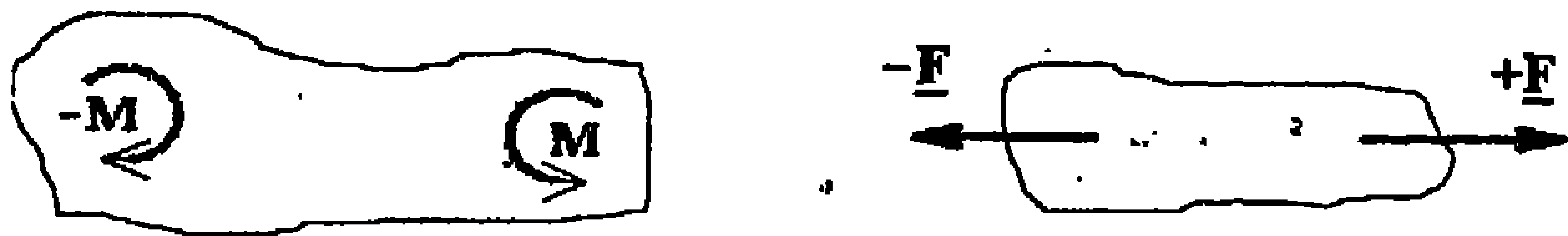
شكل (٢-٢)

أما إذا كانتا قوتين متوازيتين متساويتين في المقدار متضادتين في الإتجاه فتفشل نظرية أو عملية التركيب وينتج ما يسمى بالإزدواج ، وتأثيره دوراني على الجسم المتماسك لذا يسمى عزم الدوران) (Moment ويرمز له بسهم دائري M مع إظهار إتجاه الدوران ويقدر بحاصل ضرب إحدى القوتين في الذراع العمودي $M = F . a$ شكل (٢ - ٢) .

ويتكافأ إزدواجان إذا كانا في مستويين متوازيين وكان لهما نفس المقدار (حاصل الضرب) ونفس الإتجاه الدوراني ويتم تركيب العزوم الدورانيه في مستوى واحد بجمع مقاديرها جبريا.

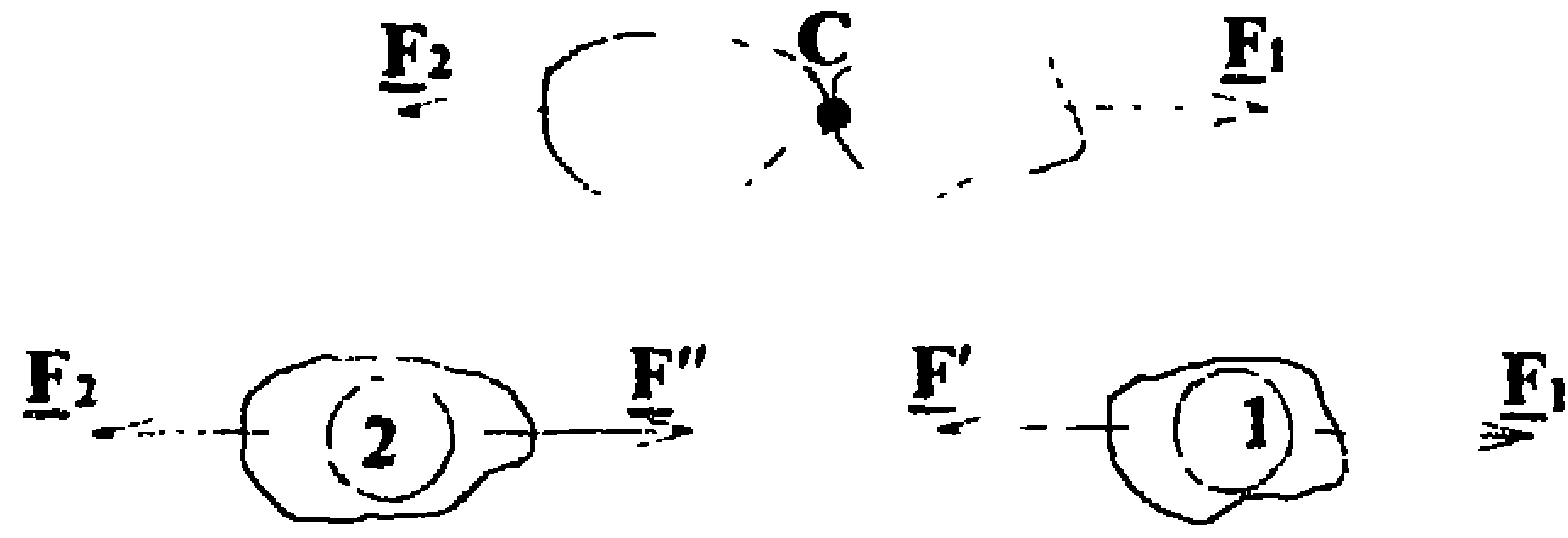
ب - قانون التوازن:

ويعني أن الجسم المتماسك يظل على حالته من حركة أو سكون إذا تلاشت محصلة القوى المؤثره عليه وعلى الأخص إذا أثرت فيه قوتان متساويتان ومتضادتان في الإتجاه على خط واحد أو إذا أثر فيه عزما دوران متساويان في المقدار ومتضادان في الإتجاه كما في الشكل (٣ - ٢).



شكل (٣ - ٢)

ولاستنتاج قانون رد الفعل لجسمين مثلا متلاصقين أو جزئين من جسم متماسك مفصولين بسطح وهي كما في الشكل (٤ - ٢) .



شكل (٤-٢)

$F_2+F''=0$ $\quad$ $F_1+F'+F''+F_2=0$

$F_1+F'=0$ $\quad$ $F''=-F'$

$F''+F'=0$

$F_1+F_2=0$

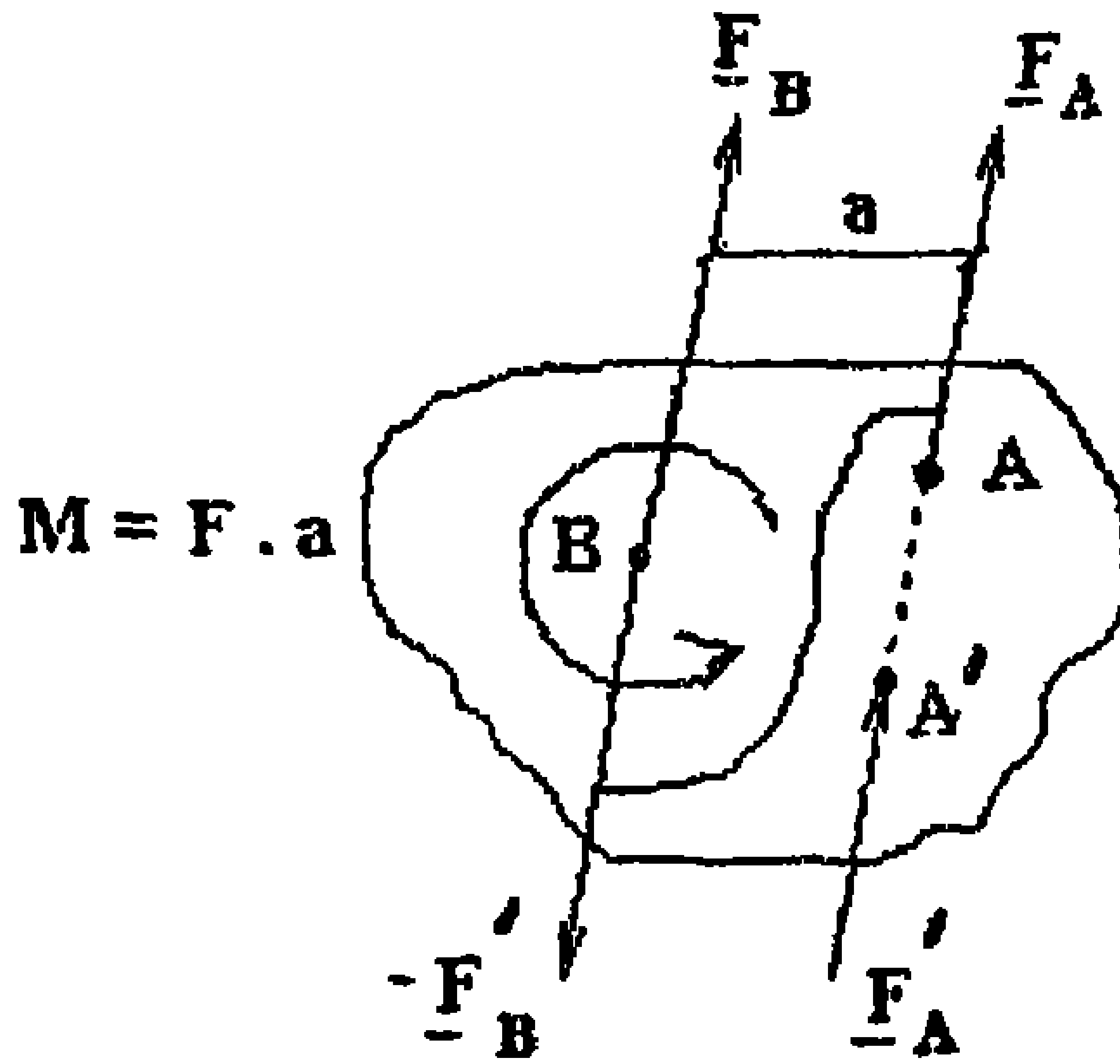
وبـذلـك فـإن الـقـوه (الـفعل) F' المؤثره على الجسم (١) عنـد نقطـة التلامـس ، تسـاوي القوه (رد الفعل) F'' المؤثره على الجسم (٢) في نفس النقطه كما في شكل (٤-٢).

ويعبر هذا القانون عن أن القوى في الطبيعه تظهر إزدواجها بحيث يكـون لكـل فعـل رد فعـل مساوي له في المقدار ومضاد له في الإتجاه . كما يعبر عن تـوازن القـوى الداخليـه بجسـم متماسك بحيث لا تغير من حالة حركته أو سكونه ، ولابد من تواجد قوى خارجيه لإحداث التغيير.

٣ - نقل القوى:

إذا أثـرت قـوه F_A علـى جسـم متماسك في نقطه A فإنه في الإمكـان نقلهـا كما نشاء على خط العمل نفسه المار بنقطـة A (إلى نقطـة A') دون أدنـى تغيـير في التأثير وذلك مـع الإحتـفـاظ بـالمقدار بطبيعـة الحال.

$$F_A = F'_A$$



شكل (٥-٢)

ولإيجاد ما يسفر عنه نقل القوة بنفس المقدار من A إلى B نتصور قوتين متساويتين ومتضادتين في B على خط عمل موازي للقوة F_A وكل منهما مساوي لها من حيث المقدار.

هاتان القوتان يتلاشى تأثيرهما على الجسم المتماسك فيتبين على الفور أن F_A تعادل أو تكافئ F_B مضافا إليها الازدواج المكون من F_A ، F_B كما في الشكل (٥ – ٢)

والنتيجه هي أنه إذا نقلت قوة ما موازية لنفسها من خط عمل إلى خط عمل آخر فإنه يلزم إضافة عزم دوران يساوي حاصل ضرب القوه في المسافه العموديه على خطي العمل مع مراعاة إتجاه الدوران شكل (٥-٢).

$$F_A = F_B \quad , M = F \cdot a$$

الباب الثالث

عمليات تركيب وتحليل القوى

أولاً: عمليات تركيب القوى:

١ - تركيب القوى الملتقيه:

إتزان أي جسيم بإعتباره نقطه ماديه فإن القوى المؤثره عليه تلتقي جميعا في تلك النقطه. ولما كانت محصلة أي قوتين تمر بنقطه تلاقيهما تبعا لقاعده متوازي أضلاع القوى فإن محصلة مجموعه من القوى الملتقيه تمر بنقطه تلاقيهما و بذا يبقى لحسابها فقط تعين مقدار وميل المحصله ، وللدراسه الإساتيكيه هناك طريقتان متميزتان:-

أ- الإستاتيكا البيانيه:

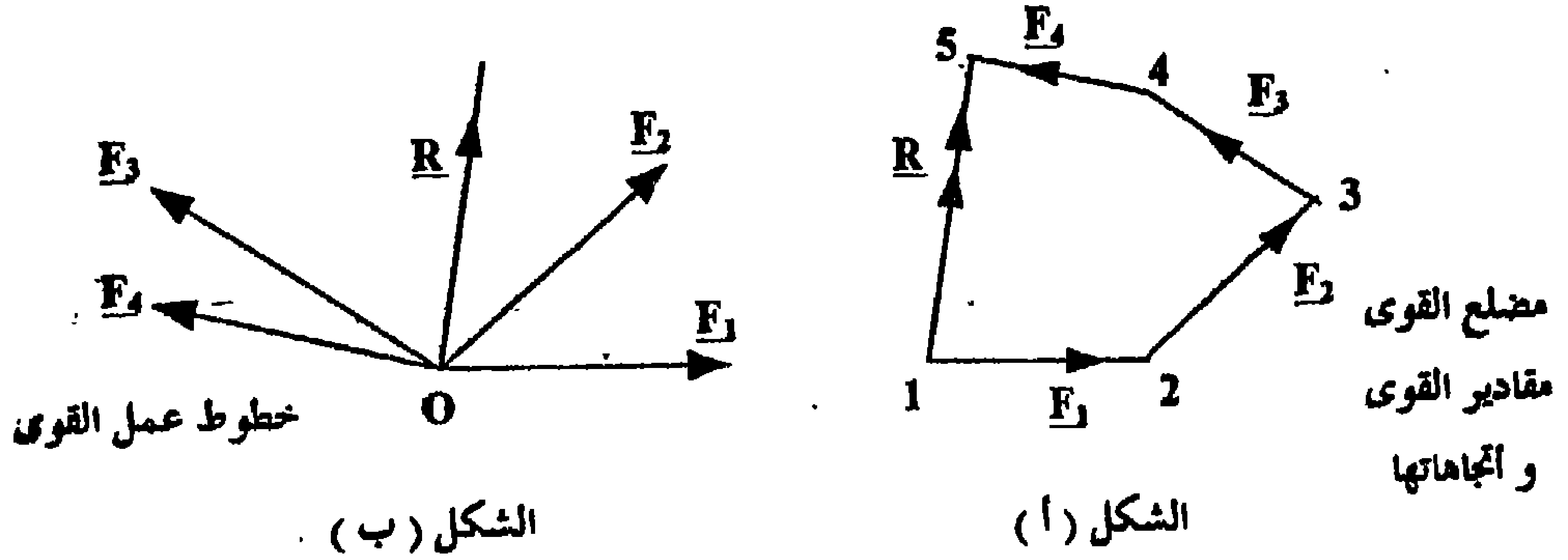
وهي تعتمد على الرسم والتخطيط بمقياس رسم مناسب ، ويعنى المهندسون بدراسة وتطوير هذا النوع من الإستاتيكا ويرجع الفضل إليهم في إبتكار الكثير من طرقها وتطبيقاتها في هندسة الإنشاءات.

ب - الإستاتيكا التحليليه:

وهي تعتمد على التحليل والحساب ، وستتبع كلا الطريقتين فيما يلي.

أ – الطريقه البيانيه:

في حالة تركيب مجموعه من القوى (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) كما في الشكل (١-٣ أ ، ب) نرسم مضلع متجهات القوى بمقياس رسم مناسب ونصل نقطة البدايه بنقطة النهايه فنحصل على المحصله R مقداراً واتجاهاً.



شكل (١ – ٣)

في حالة وقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه قيل أن المضلع مقفل وتتلاشى في هذه الحاله محصلة القوى R وهو شرط إتزان هذه القوى ، وعلى هذا فالشرط البياني لتلاشي محصلة مجموعه من القوى الملتقيه هو أن يكون مضلع القوى مقفلاً.

ب – الطريقه التحليليه:

وتبنى على تحليل القوى في إتجاهين ، الأفقي والرأسي ثم جمع المركبات في كل إتجاه على حده جمعاً جبريا ثم إعادة التركيب للحصول على المحصله.

بفرض أن القوى F_1 , F_2 , F_3 وزوايا ميلهاعلى الإفقي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ على الترتيب فإن المحصله في الإتجاه الأفقي تكون R_x تساوي مجموع المركبات الإفقيه للقوى المعطاه:

والمحصله في الإتجاه الرأسي R_y تساوي مجموع المركبات الرأسيه للقوى المعطاه.

$$\therefore R_y = F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 + F_3 \sin\alpha_3 + \cdots \quad (2)$$

وتعتبر المعادلتان ١ , ٢ معبرتان عن أن مسقط المحصله R على كل من المحورين x , y يساوي مجموع المساقط الفرديه ، وعلى ذلك فإننا نستطيع أن نحصل على مقدار المحصله R وميلها على الإفقي θ بجمع مركبتيها جمعاً إتجاهياً.

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \cdots\cdots (3)$$

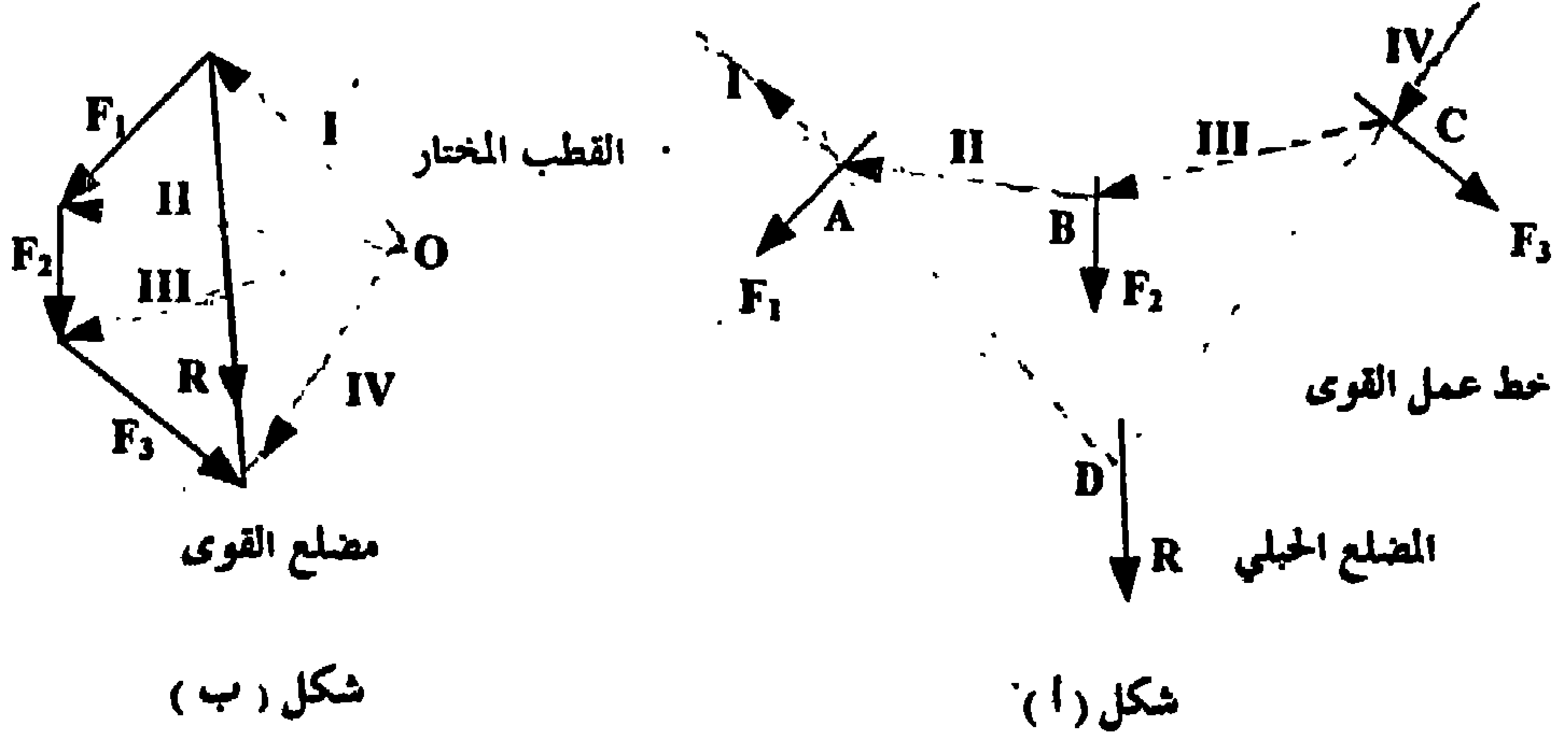
$$\tan\theta = R_y / R_x \quad \cdots\cdots (4)$$

وخط عملها الحقيقي يمر بملتقى القوى المعطاه وعندما تكون: $R_x = 0$, $R_y = 0$ فيعني تلاشي محصلة القوى الملتقيه.

٢ – تركيب القوى المتفرقه:

في حالة القوى المتفرقه والمؤثره على جسم متماسك فإن مقدار وميل المحصله R يتم الحصول عليها بالطريقه البيانيه أو التحليليه بنفس الطريه والخطوات للبند السابق لحالة القوى الملتقيه مع العلم أن خط عمل المحصله في حالة القوى المتفرقه مجهولا لعدم وجود نقطة لقاء مشتركه تمر بها المحصله كحالة القوى الملتقيه وهو ما سنبينه فيما يلي بالطريقتين المتبعتين.

أ – الطريقه البيانيه:



شكل (ب)

شكل (أ)

شكل (٢ – ٣)

لإيجاد المحصله R مقداراً واتجاهاً وخط عمل للقوى F_3 , F_2 , F_1 المتفرقه يتم رسم مضلع القوى شكل (٢–٣ ب) ثم يتم إختيار قطب المضلع O ونصل رؤوس القوى بتلك النقطه O فنحصل على القوى المساعده IV , III , II , I يختار خط عمل مناسب للقوى المساعده I يقطع خط عمل F_1 في نقطة A للحصول على بدايه على المضلع الحبلي شكل (٢–٣ أ) ، وبما أن ($II = F_1 + I$) فإن خط عمل II يرسم موازياً لها من A فيقطع F_2 في B ، وكذلك ($III = F_2 + II$) ويرسم خط عمل III من B موازيا لها فيقطع F_2 ، وهكذا نوجد خط عمل القوى المساعده الأخيره . IVويسمى المضلع المكون من خطوط العمل IV , III , II , I في شكل (٢–٣ أ) بالمضلع الحبلي.

$\therefore IV = I + F_1 + F_2 + F_3$ . . . .(5)

$\therefore IV - I = F_1 + F_2 + F_3$ . . . .(6)

أي أن مجموعة القوى المعطاه F_3 , F_2 , F_1 تكافئ القوتين IV , I الممثلتين بالضلعين الأول والأخير في المضلع الحبلي . وعلى هذا فإن المحصله تمر بنقطة D في المضلع الحبلي ونقطة تلاقي الضلعين الأول والأخير.نرسم من D موازيا للمحصله R فنحصل على خط عمل هذه المحصله.

نلاحظ في الشكل (٢-٣) العلاقات الهندسيه الآتيه بين شكل مضلع القوى وشكل خطو العمل فكل مستقيم في الشكل الأول يناظره مستقيم موازي في الشكل الثاني كما أن كل مثلث في الأول يناظره ثلاثة مستقيمات متلاقيه في نقطه في الثاني ، والأصل في هذا التناظر هو أن محصله أي قوتين يجب أن تمر بنقطة تلاقيهما.

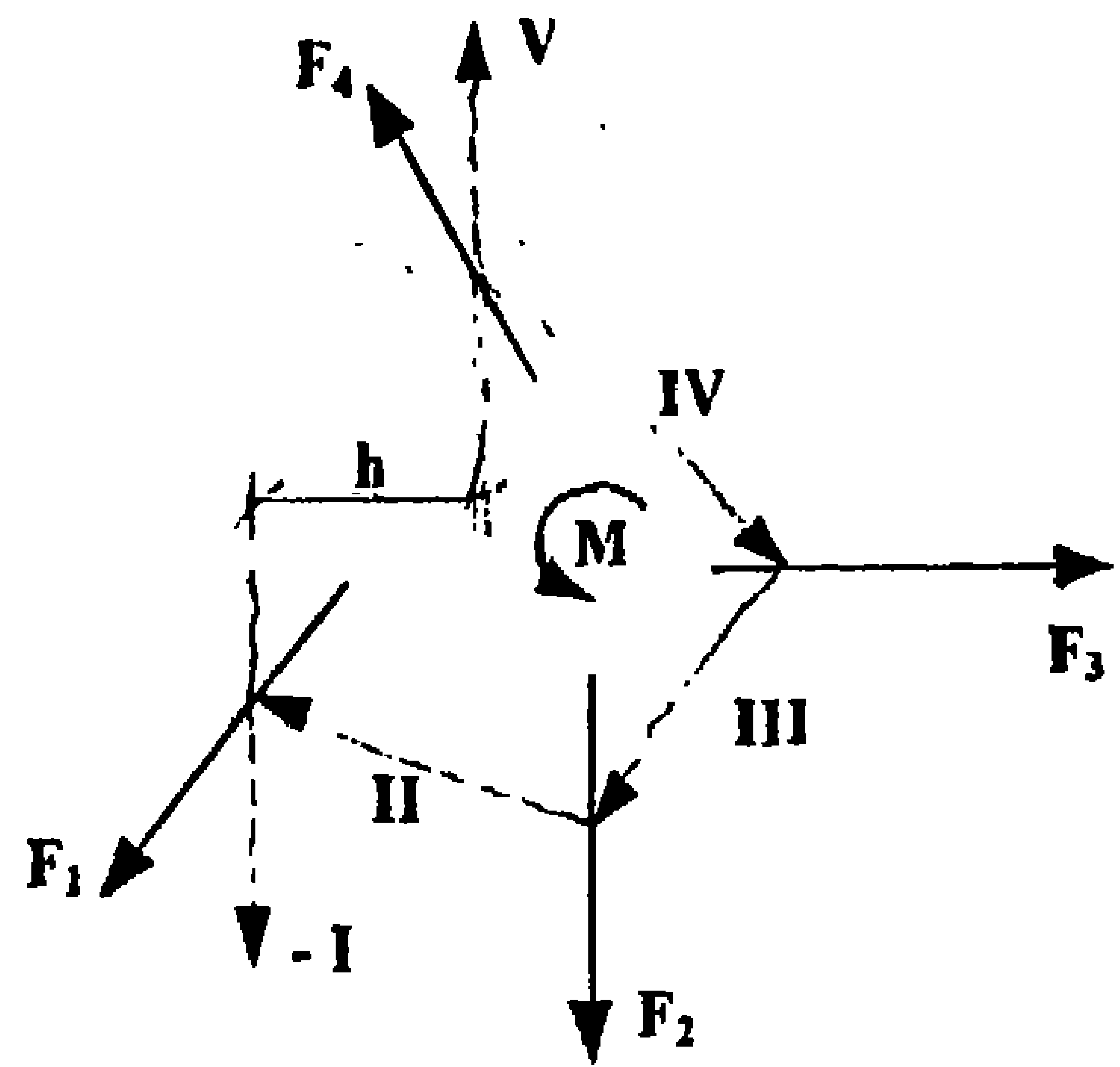
وتسمى عملية تركيب القوى بعملية الإختزال ، وقد تسفر هذه العمليه عن أحد الإحتمالات الثلاثه الآتيه للنتيجه.

أ – مضلع القوى المفتوح:

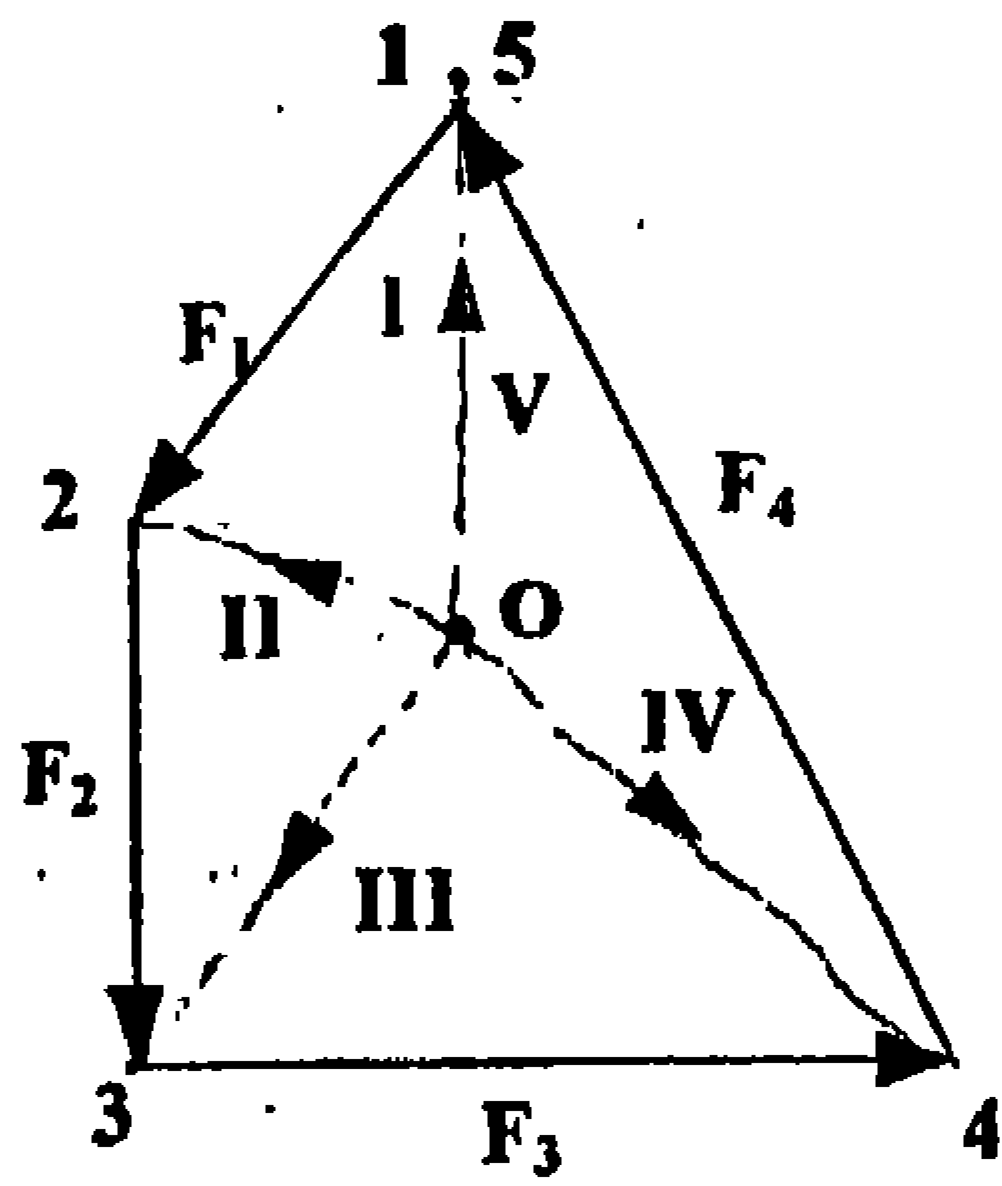
يعني أنه لمجموعه من القوى محصله ذات مقدار وإتجاه ويحدد خط عملها بواسطة المضلع الحبلي وأن عملية الإختزال تفضي إلى قوة المحصله.

ب – مضلع القوى مقفل والمضلع الحبلي مفتوح:

بوقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه في مضلع القوى كانت المحصله صفرا ، والشعاعان I , V الأول والأخير إنطبقا في مضلع القوى شكل (٣-٣ أ،ب) مكونين مضلع حبلي مفتوح ، وجعلا الضلعين الأول والأخير فيه I , V متوازيين. وهما بمثابة قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتين في الإتجاه وتكافئان مجموعة القوى المعطاه تبعا للمعادله (6).



المضلع الحبلي مفتوح



مضلع القوى مقفل

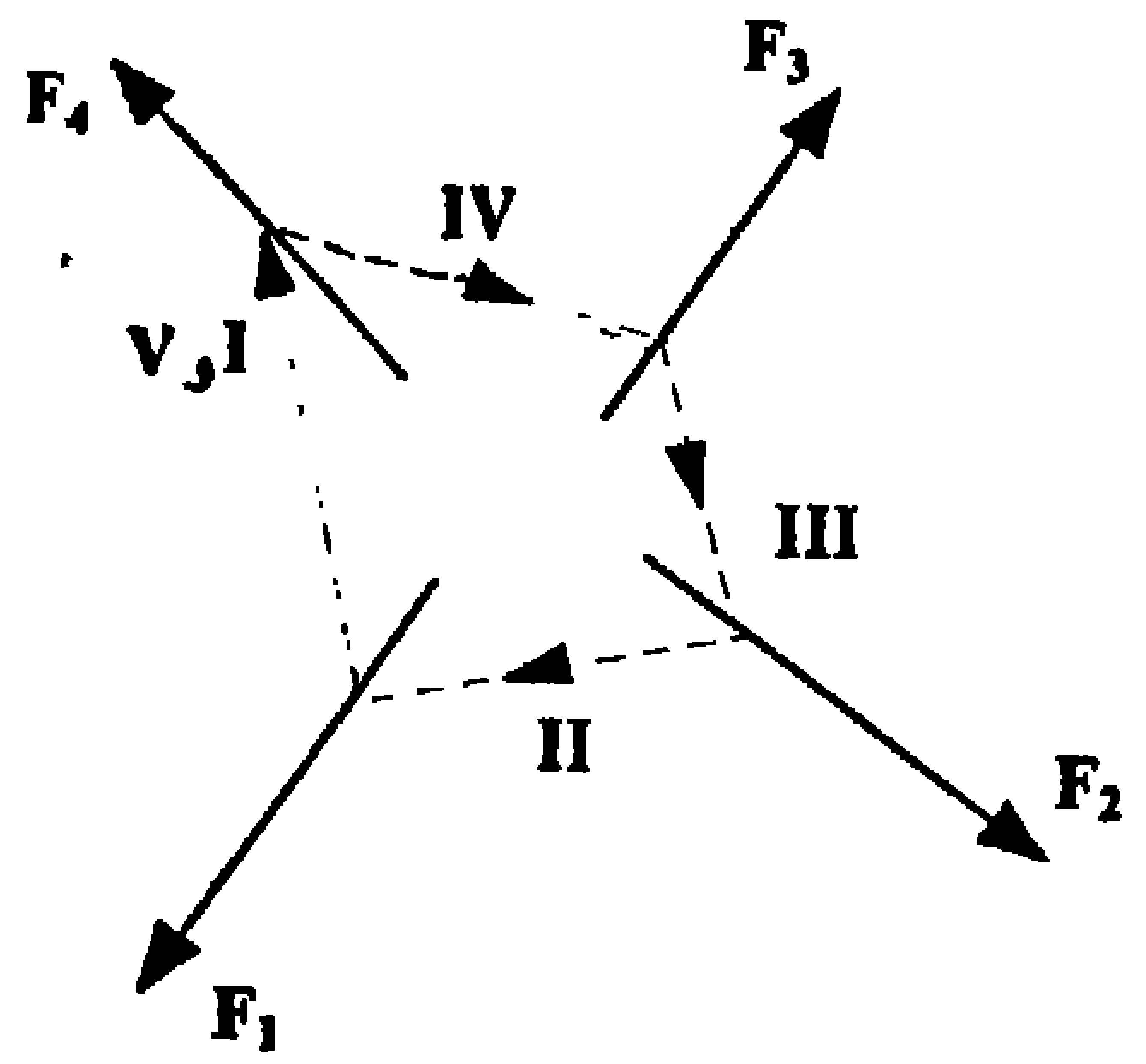
شكل (٣ - ٣)

ولذا فإن المحصله عباره عن عزم إزدواج يقدر بحاصل ضرب مقدار القوه V مقاسه من مضلع القوى في المسافه العموديه h بين V , I مقاسه من المضلع الحبلي مع مراعاة مقياس الرسم لكل من الشكلين.

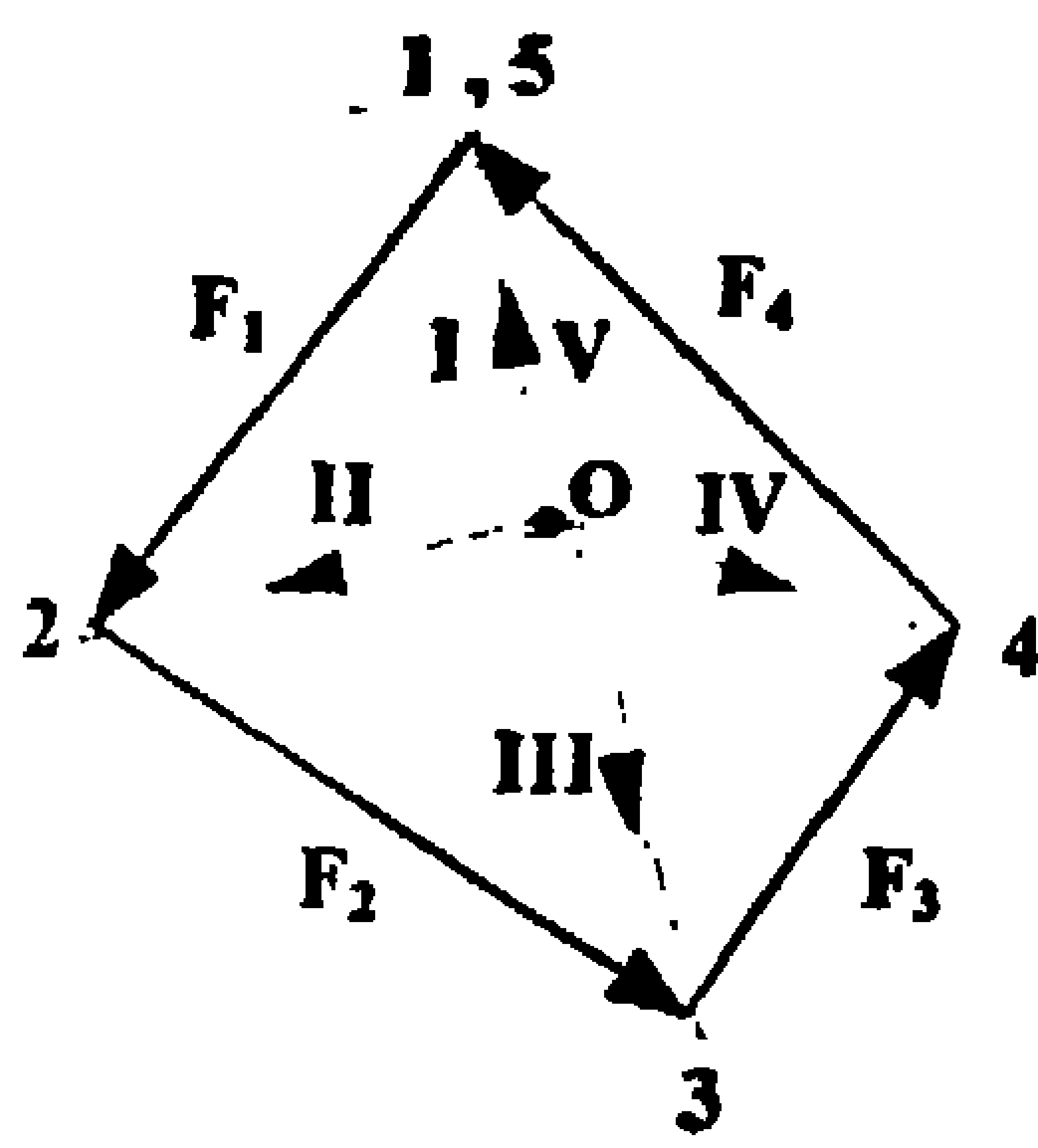
$$M = |V| \times h$$

جـ - مضلع القوى مقفل والمضلع الحبلي مقفل:

إذا كان وضع القوى الأخيره والأولى I , V في المضلع الحبلي مقفلا على استقامه واحده فإن المحصله تتلاشى نظرا لأن القوتان متساويتين في المقدار ومتضادتين في الإتجاه وهما تكافئان مجموعة القوى المعطاه تبعا للمعادله (6) أي أن المجموعه متلاشيه . شكل (٤-٣)



المضلع الحبلي مقفل



مضلع القوى مقفل

شكل (٤-٣)

الخلاصه:

١) مجموعة القوى المتفرقه تكون محصلتها قوه مفرده وعلامة ذلك مضلع القوى مفتوحا.

٢) مجموعة القوى المتفرقه تكون محصلتها إزدواجاً ، وعلامة ذلك مضلع القوى مقفلاً والمضلع الحبلي مفتوحاً.

٣) مجموعة القوى المتفرقه تكون محصلتها متلاشيه وعلامة ذلك مضلع القوى والمضلع الحبلي مقفلا وهي حالة التوازن التي تحقق إتزان للجسم المتماسك.

ب – الطريقه التحليليه:

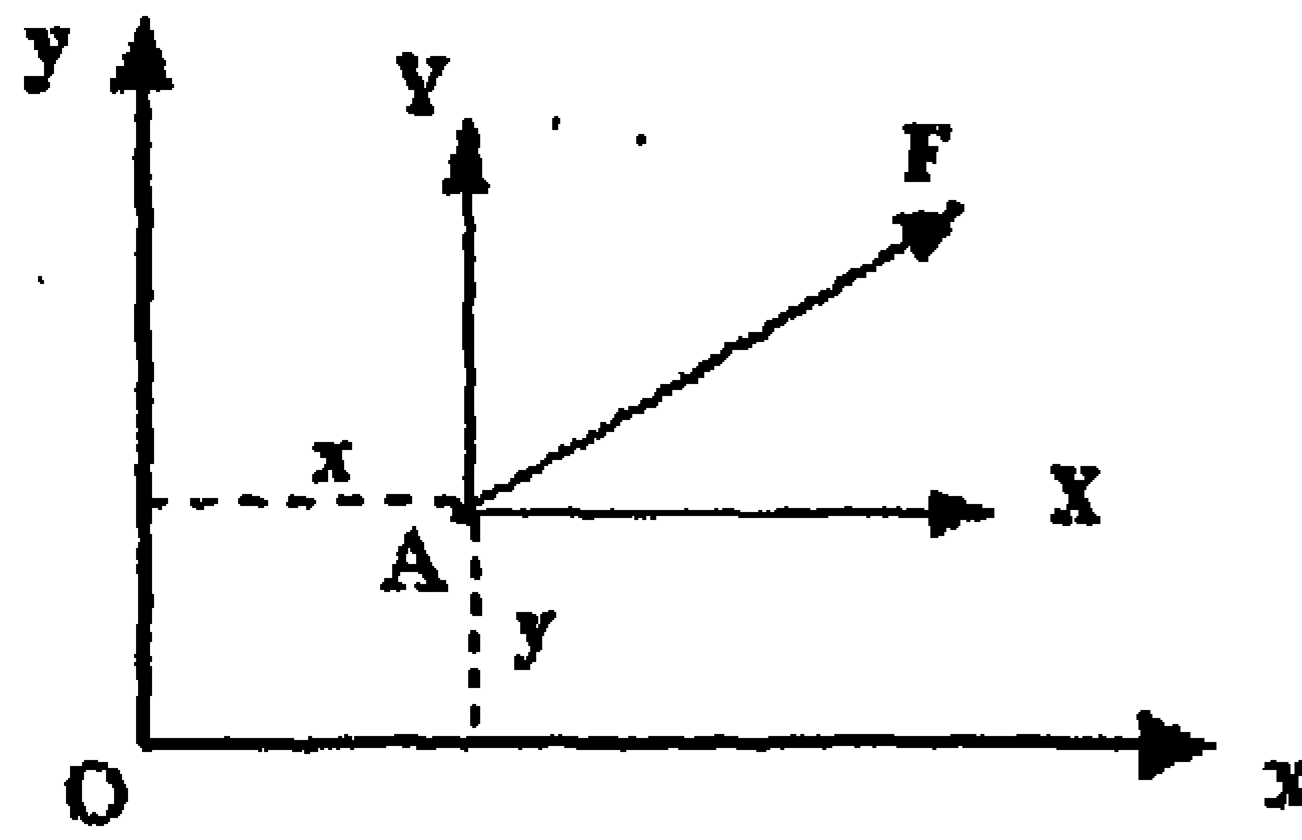
يتعين مقدار وميل المحصله للقوى المتفرقه بالمعادلتين:

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad , \quad \tan\theta = R_y/R_x$$

اما خط عملها فيتعين بقانون العزوم والذي ينص على ان " مجموع عزوم مجموعه من القوى حول اي نقطه يساوي عزم محصلتها حول نفس النقطه " ، وذلك لأن المحصله تكافئ مجموعة القوى في قدرتها على إحداث الدوران.

عزم قوه F حول نقطة الأصل O :

بفرض أن مركبتي القوه في إتجاهي المحورين الأفقي والرأسي هما (X ,Y) ونقطة تأثير القوه A إحداثياتها هي (x , y) وهي نقطه عامـة على القـوه نظـرا لأن القـوه المؤثـره علـى جسـم متـماسك متجه مقيد بخط عمل فقـط وتسـتطيع الإنـزلاق على الخـط شكل (٥-٣).



شكل (٥-٣)

تبعاً لنظرية العـزوم يمكـن أخـذ العـزوم للمركبتين حول O بـدلاً من عزم القـوه F ذاتهـا للحصـول على M_o.

$$M_o = x \cdot Y - y \cdot X$$

ويمكـن وصفهـا علـى صوره محدده على النحو التالي:

$$M_O = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

← احداثي نقطة تأثير القوة

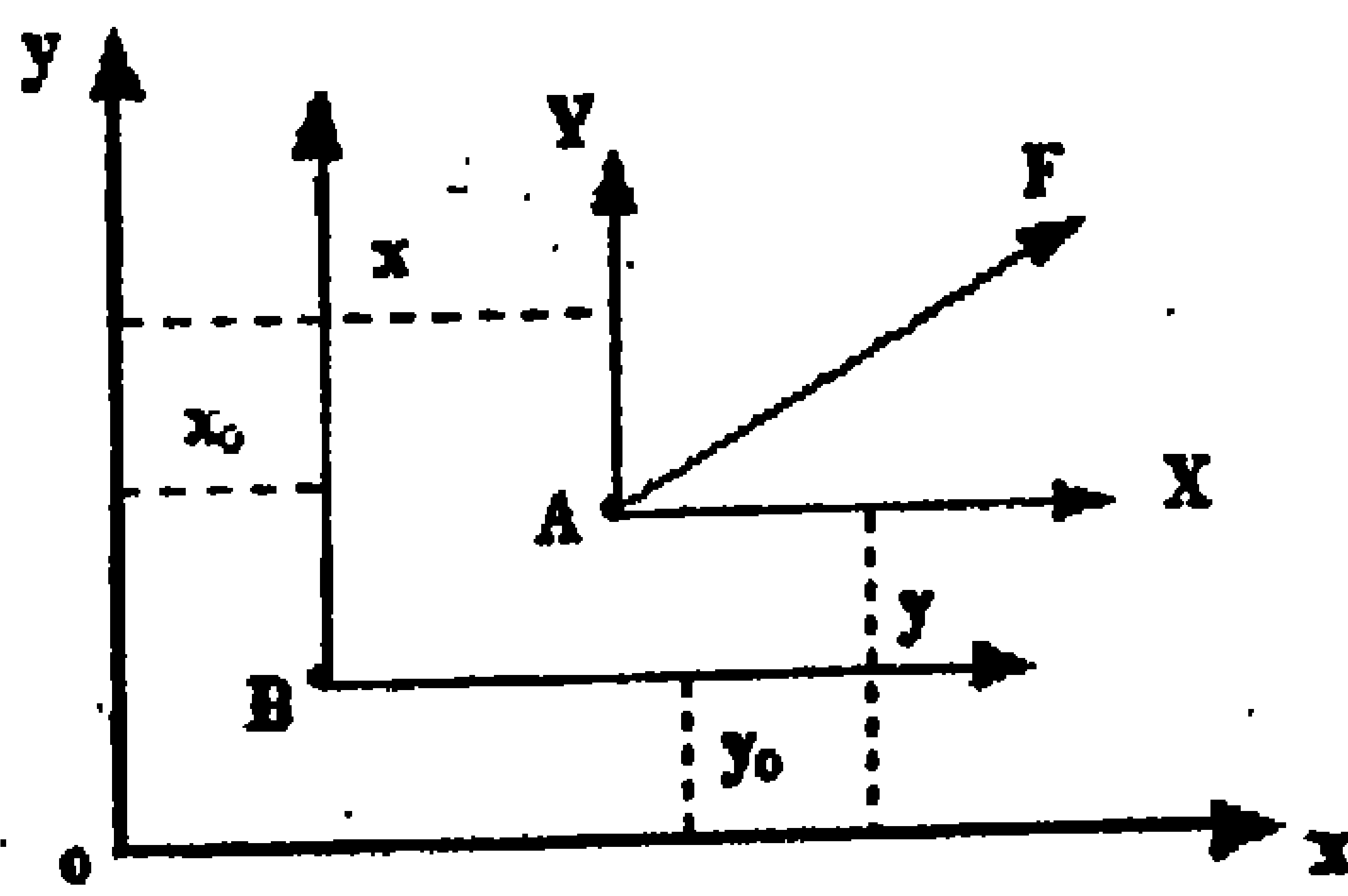
← مركبتي القوة

.... (7)

حيث يكون الصف الأول عباره عن إحداثي نقطه تأثير القوه والصف الثاني ممثـل لمركبـة القوه.

عزم القوه F حول نقطة B إحداثياها (x_o,y_o) :

حيث أن العزم المطلوب M_B تعطيه المحدده.



شكل (٦-٣)

$$M_B = \begin{vmatrix} (x-x_o) & (y-y_o) \\ X & Y \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

حيث أن (x,y) إحداثي نقطة التأثير ،(X , Y) مركبتي القوه.

معادلة خط عمل المحصله :

و بتجميع عزوم القوى حول نقطة الأصل O بالطريقه السابقة و يرمز لهذا المجموع العددي بالرمز M_o. ثم بأخذ عزم المحصله حول O نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ R_x & R_y \end{vmatrix} = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

حيث (R_x , R_y) مركبتا المحصله في الإتجاه الأفقي والرأسي المعطى بالمعادلتين , (1) (2) و (x,y) هما إحداثيا نقطه عامه على خط عمل المحصله وعلى هذا فإن:

$$M_o = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

والمعادله تمثل خطا مستقيما وهو خط عمل المحصله وأن ال R_x ، R_y ، M_o هي عباره عن قيم عدديه نتجت من عمليات التحليل الأفقي والرأسي وأخذ العزوم حول O .

و يمكن أن تؤدي عملية الإختزال إلى إحدى النتائج الآتيه:

١- وجود محصله فرديه R وذلك لعدم تلاشي مركبتيها R_x،R_y أو إحداهما على الأقل .

٢ - المحصله عباره عن إزدواج ويشترط لذلك:

$$R_x = 0 \;,\; R_y = 0 \;,\; \sum M_o \neq 0$$

٣- المحصله متلاشيه ويشترط لذلك:

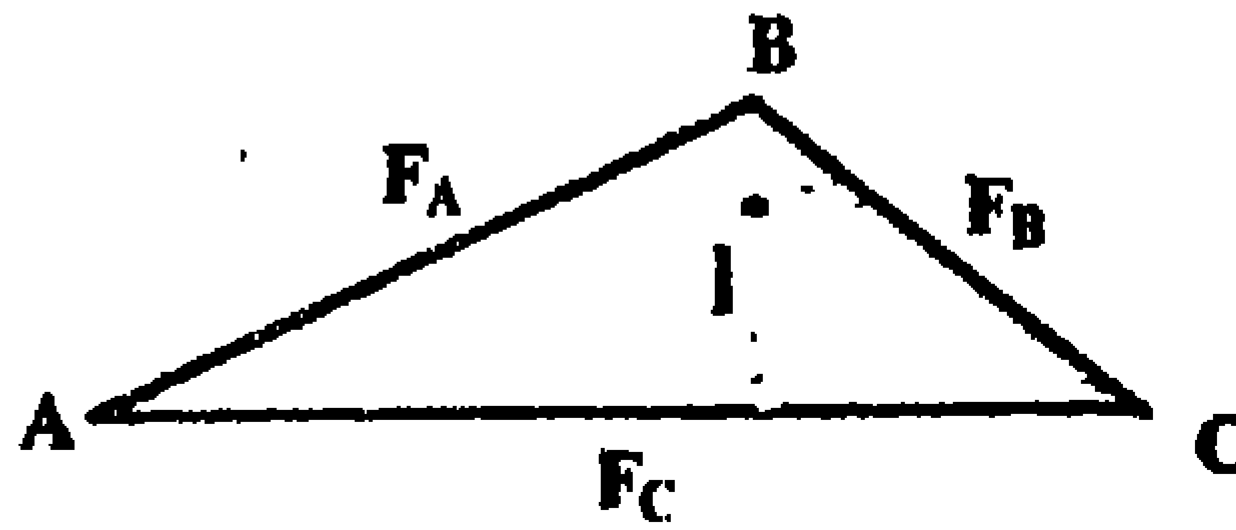
$$R_x = 0 \;,\; R_y = 0 \;,\; \sum M_o = 0$$

والحاله الأخيره هي حالة توازن القوى المؤثره على الجسم المتماسك. ويلاحظ أن عمليه إيجاد المحصله عباره عن تكوين معادلات تحليليه في ٣ مجاهيل وهي الكميات القياسيه التي تحدد فيها خط عمل . فلتحديد R يلزم معرفة مقدار R وميلها θ وتقاطعها مع أحد المحورين مثلا.

جـ - طرق تحليليه أخرى:

بدلا من الإسقاط على المحورين وأخذ العزوم حول نقطه كما تم في الطريقه السابقه يمكن الإسقاط على محور واحد وليكن x مثلا ثم إيجاد العزوم حول نقطتين معلومتين B,A وبذلك نحصل على ثلاث معادلات تحدد R مقدارا واتجاها وموضعا غير أنه يلزم إختيار B,A بحيث لا يكون الخط AB عموديا على x وذلك لتلافي الحاله التي قد تصادف بتواجد R على الخط AB فتتلاشي العزوم حول كل من B,A ، وإذا كان AB عموديا على x تتلاشى أيضا مركبة R على x وبذلك لا نستطيع إيجاد R .

أيضا يمكن تحديد R بأخذ العزوم حول ثلاث نقط A,B,C ليست على إستقامه واحده وذلك لكي لا نعجز عن إيجاد R إذا أخذنا النقط الثلاث بالصدفه على خط عملها كما في الشكل (٧-٣).



شكل (٧ - ٣)

$$M_o = F_A \cdot l$$
$$M_o = F_B \cdot l$$
$$M_o = F_C \cdot l$$
$$\therefore F_A \cdot l = F_B \cdot l = F_C \cdot l$$

والاختيار بين طريقة وأخرى يتوقف على المساله المطلوب حلها وحسن الاختيار للأقطاب لأخذ العزوم والمحاور للإسقاط بحيث تنشأ المعادلات السهله والبسيطة الحل من الناحيه الجبريه.

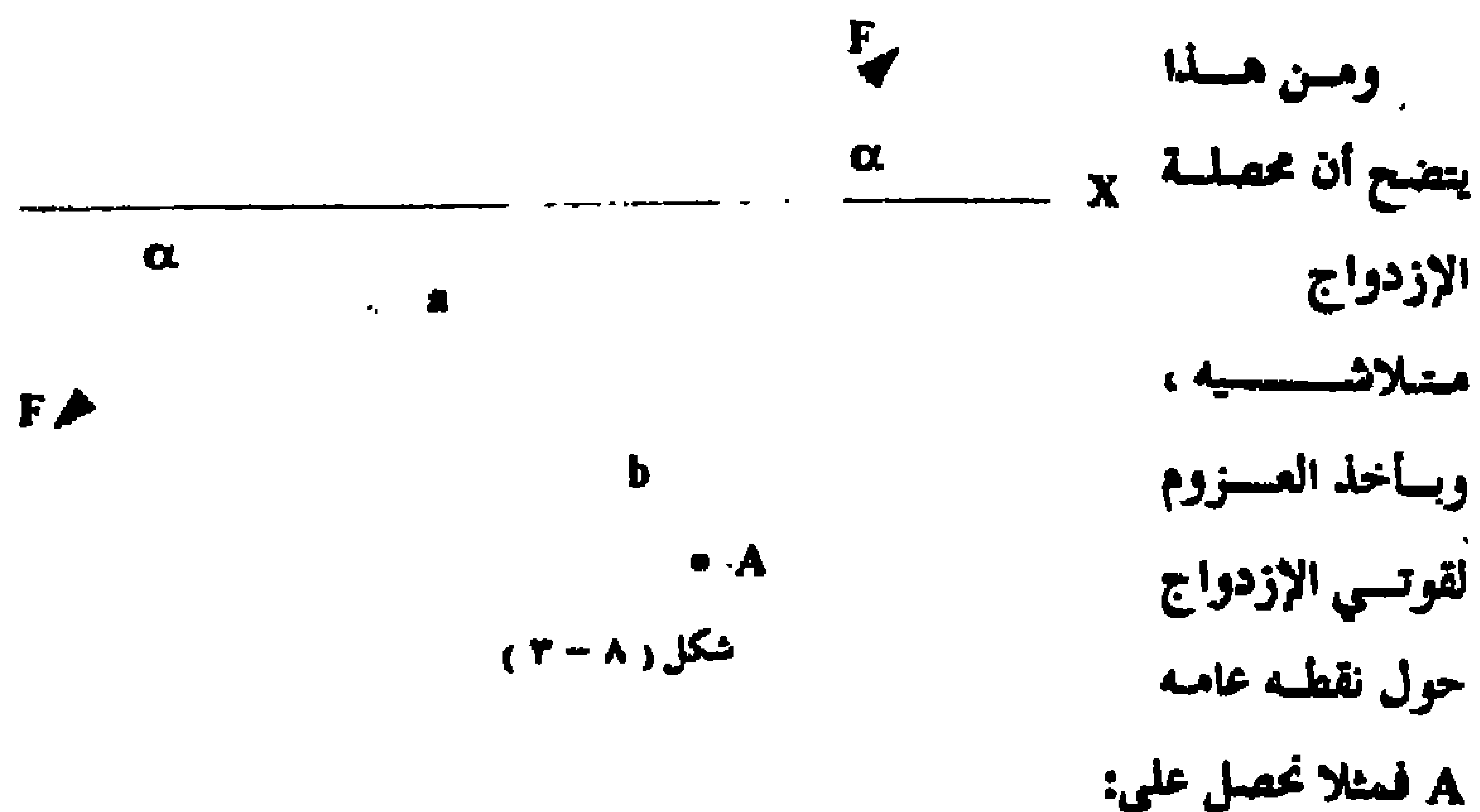
مع ملاحظة أنه إذا كانت محصلة المجموعه عباره عن إزدواج أو عزم دوران فإن العزم يظهر ثابت حول مختلف الأقطاب أما إذا تلاشت المحصله فيتلاشى العزم بطبيعة الحال حول جميع الأقطاب.

٣ – الإزدواج :

هو قوتان متوازيتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الإتجاه ، وبالتحليل في الإتجاه الأفقي والرأسي نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= F\cos\alpha - F\cos\alpha = 0 \\ R_y &= F\sin\alpha - F\sin\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

ومن هذا يتضح أن محصلة الإزدواج متلاشيه ، وبأخذ العزوم لقوتي الإزدواج حول نقطه عامه A فمثلا نحصل على:

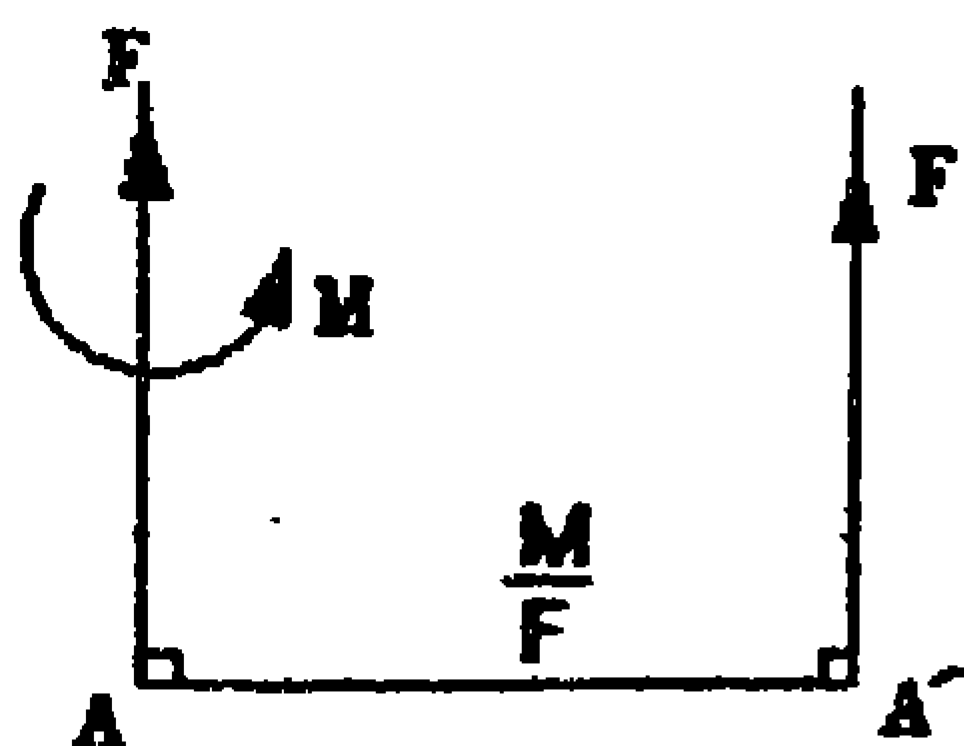


شكل (٨ – ٣)

$$M_A = F\cdot(a+b) - F\cdot b = F\cdot a = \text{constant} \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

ومن أهم خواص الإزدواج هو مقدرته على إحداث الدوران ولذلك سوف نمثل الإزدواج بسهم دائري يكتب على عزمه الثابت الإزدواجات الواقعه في مستوى واحد تجمع عزومها جمعا جبريا للحصول على إزدواج محصل لها.

يعطى جمع قوة F_A و ازدواج M شكل (٩–٣) قوه موازيه ومساويه للأولى F_A وعلى بعد منها



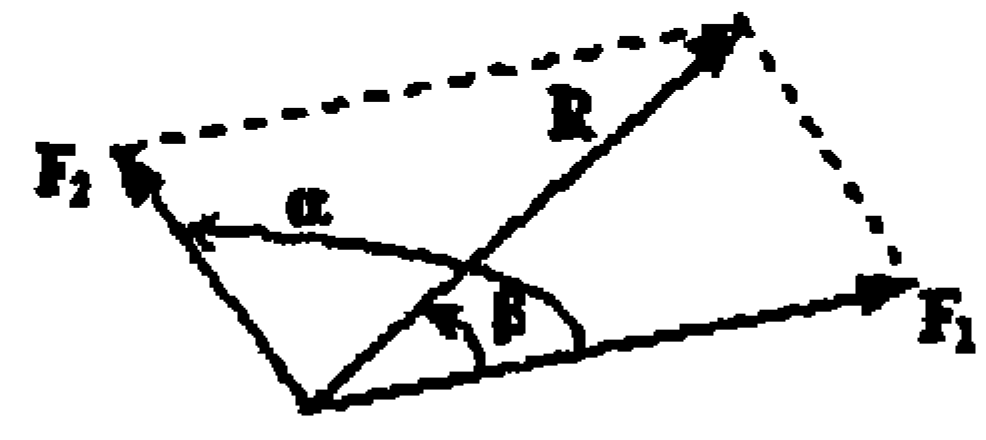
شكل (٩–٣)

يساوي خارج قسمة عزم الإزدواج على مقدار القوه. وذلك واضح من أن تحليل المجموعه الماره بنقطة A' يعطي نفس الشئ كتحليل المجموعه الماره بنقطة A كما أن عزوم كلى المجموعتين حول نقطة ما مثل A' يعطي نفس الشئ.

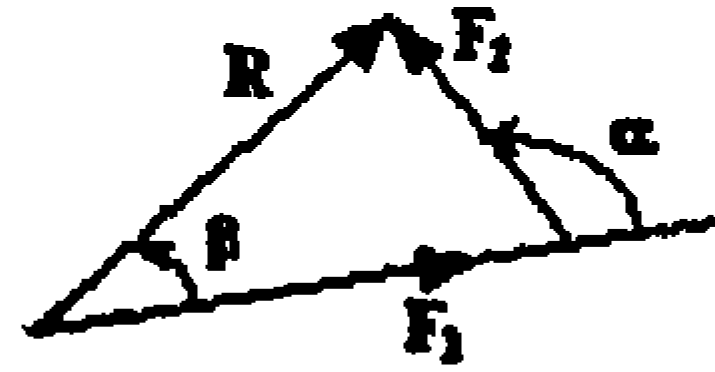
ثانياً: عمليات تحليل القوى:

٤- تحليل قوه R إلى مركبتين في خطي عمل معلومين (١) ، (٢):

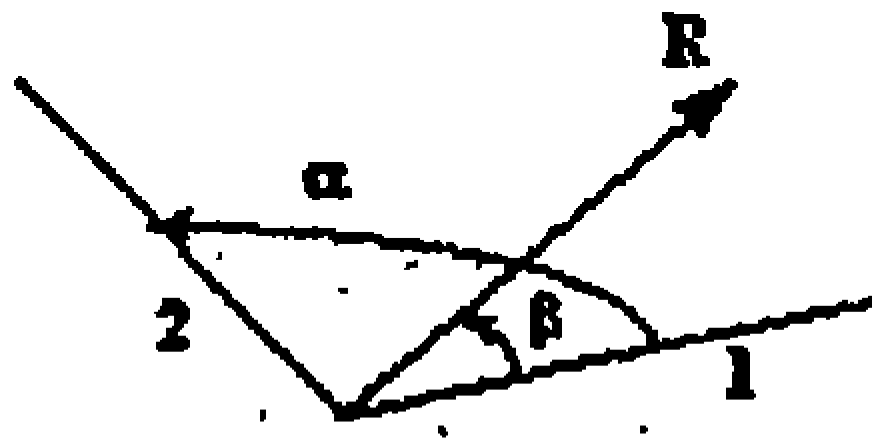
أ - الطريقه البيانيه:



(أ)



(ب)



(جـ)

شكل (١٠-٣)

إنشاء متوازي أضلاع قوى يحتوي على R قطر فيه والقوتين ١ ، ٢ ضلعين متجاوري شكل (١٠-٣ جـ) يتعين مقدار F_1,F_2 كما يمكن الحصول عليها برسم مثلث القوى كما في الشكل (١٠-٣ ب).

ب - الطريقه التحليليه:

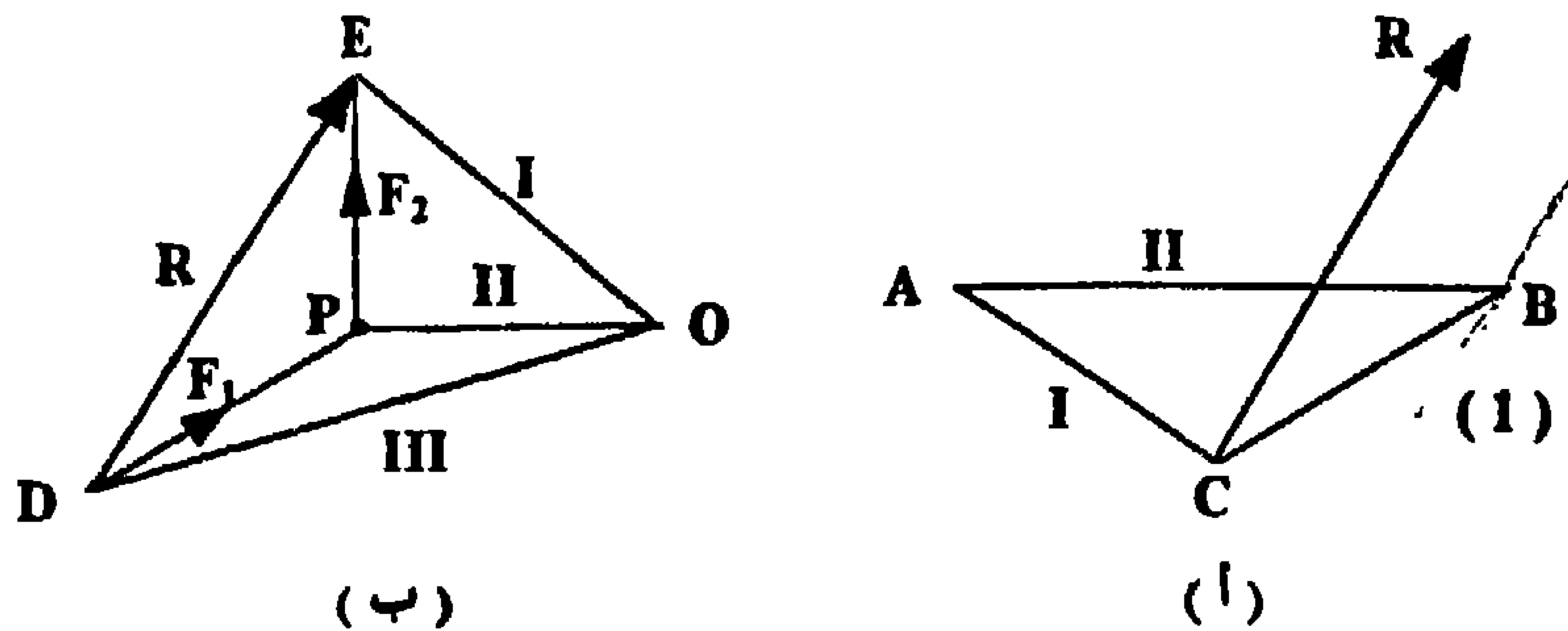
بالتحليل في إتجاه ١ والعمودي عليه نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} F_1 + F_2 \cos\alpha &= R\cos\beta \\ F_2 \sin\alpha &= R\sin\beta \end{aligned}\right\}$$

هنا معادلتان في مجهولين F_1 ، F_2 يعطي حلهما الجبري قيمتي المجهولين ، ويشترط إمكان التحليل في هذه الحالة التقاء خطي العمل 2 , 1 والقوه R في نقطه واحده شكل (١٠-٣).

٥ – تحليل قوه R إلى مركبتين بمعرفة خط عمل إحداهما (١) ونقطـه A على خط عمل الأخرى:

أ – الطريقه البيانيه:



شكل (١١ – ٣)

نختار نقطه B على (١) وأي نقطه C على R فنحصل على مثلث ABC أضلاعه I,II,III كما في الشكل (١١ –٣ أ) نرسم بمقياس رسم مناسب شكل (١١–٣ ب)، ونرسم من طرفيها موازين للخطين I,III فيلتقيان في O . ثم من O نرسم موازيا للخط (1) ومن D موازيا للخط I فيلتقيان في P ، وبذلك نحصل على:

$$F_1 = DP \;,\; F_2 = PE$$

ولتحليل R إلى F_2 ، F_1 فهي عملية عكس الأجراء المتبع في تركيب القوى F_2 ، F_1 إلى محصلتها R بطريقة المضلع الحبلي ، ويستعان بالعلاقات المتبادله بين مضلع القوى والمضلع الحبلي في ضبط الإجراء.

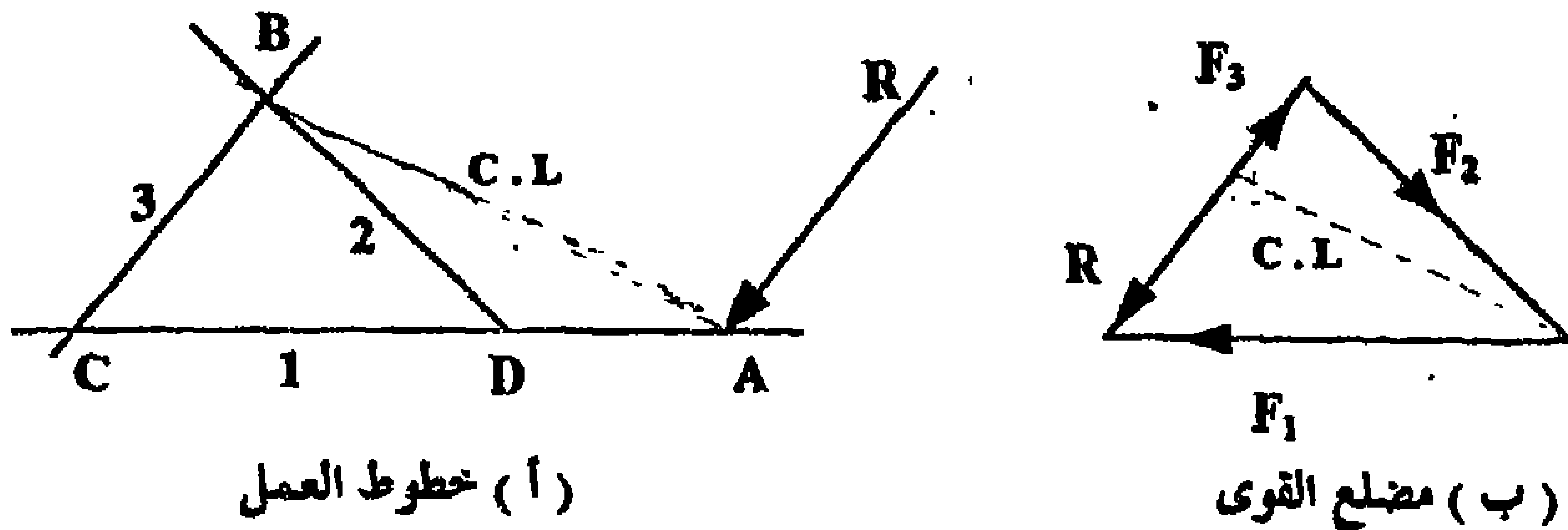
ب – الطريقه التحليليه:

بأخذ العزوم حول A تتعين المركبه F_1 المطابقه للخط المعلوم (١) ثم بالتحليل في اتجاه هذا الخط والعمودي عليه نحصل على مركبة القوه الثانيه F_2.

٦ - تحليل قوه R إلى ثلاث مركبات خطوط عملها معلومه 3 , 2 , 1 شكل (١٢-٣):

طريقة كولمان :(Colmann)

إذا كانت A هي نقطه تلاقي R فبأخذ خطوط العمل وليكن (1) و B نقطة تلاقي الآخرين (3) , (2) نصل AB فيسمى خط كولمان (CL) شكل (١٢-٣ أ).



(أ) خطوط العمل

(ب) مضلع القوى

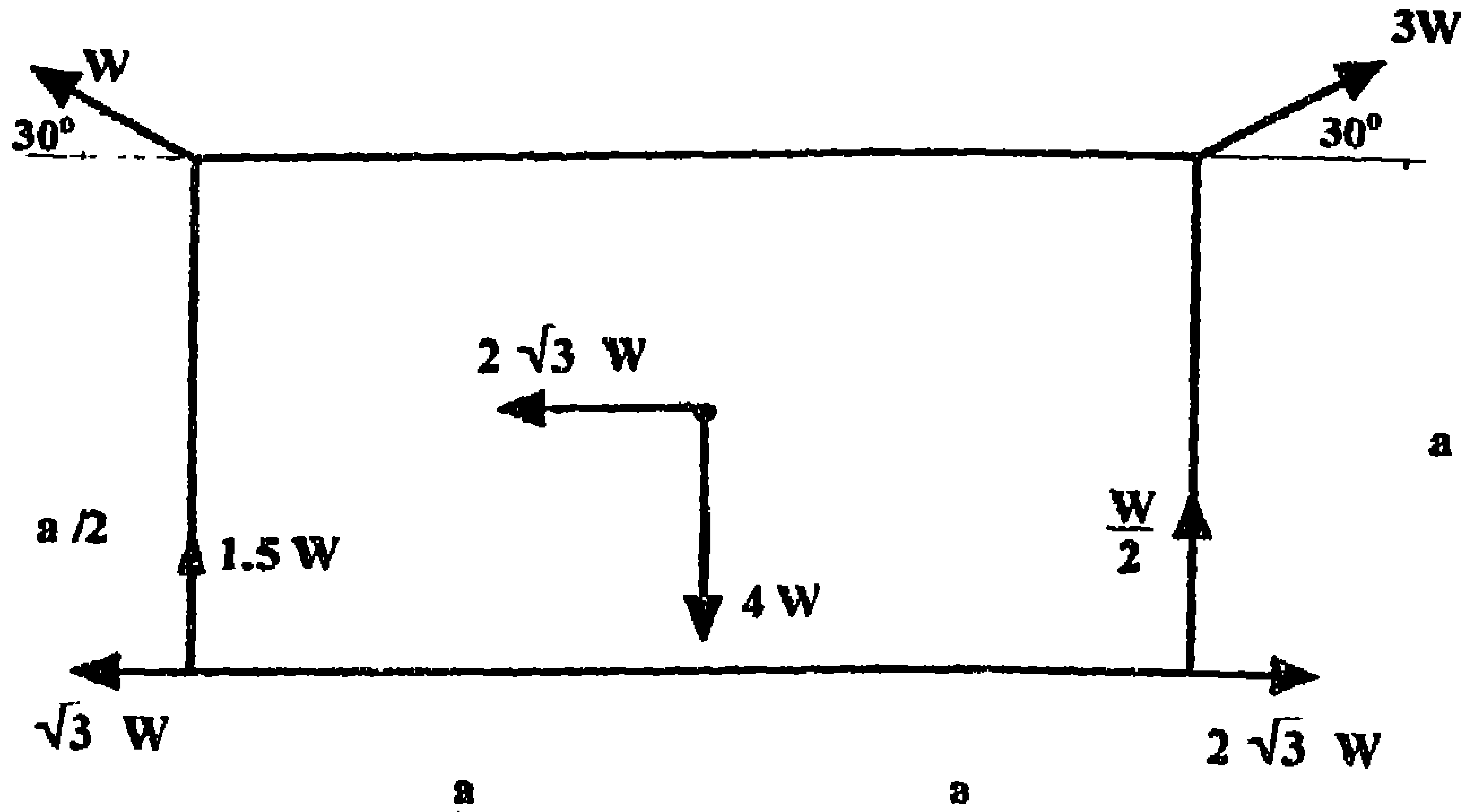
شكل (١٢ - ٣)

والطريقه هي أن نحلل R إلى مركبتين F_1 علـى (1) و F' على AB بمثلث قوى كما في الشكل (١٢-٣ ب) ثم نحلل المركبه F' الواقعه على الخط AB إلى مركبتين F_3 , F_2 في الخطين 3 , 2 وذلك بمثلث قوى آخر يجاور المثلث الأول في الشكل (١٢-٣ ب) ، وبذلك نحصل على المركبات الثلاثه المطلوبه F_3 , F_2 , F_1. وبطبيعة الحال يتعذر الحل إذا كانت خطوط العمل متلاقيه في نقطه واحده أو متوازيه.

أمثلة محلوله

مثال ١:

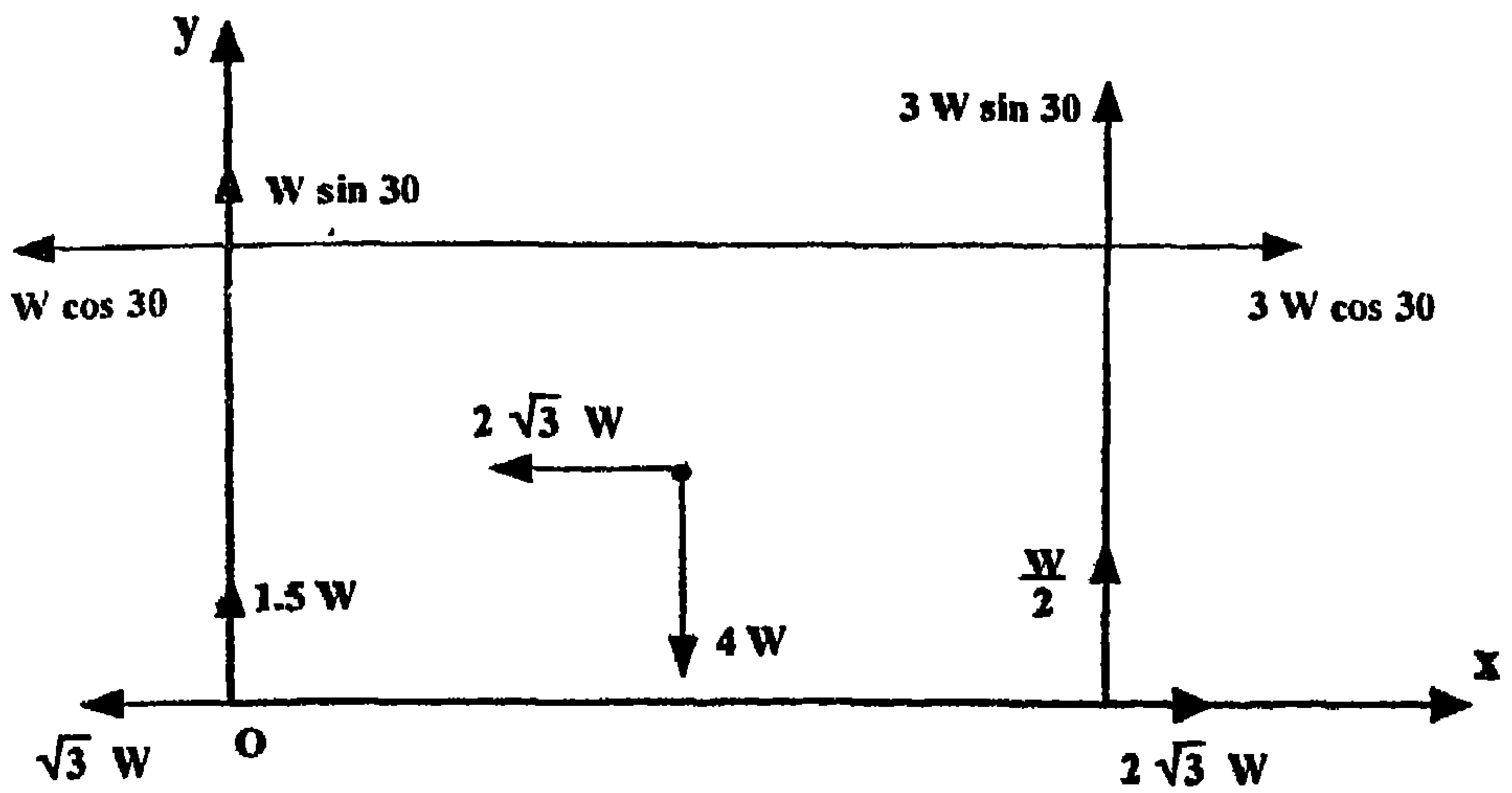
صفيحه مستطيله طولها 2a وعرضها a تؤثر عليها القوى الموضحه في الشكل ، بين بالطريقه التحليليه أن الصفيحه في حالة إتزان.



الحل:

١ – نرسم الشكل مره أخرى مع وضع المحورين x , y وتحليل كل القوى المائله مع عدم مراعاة مقياس الرسم كما في الشكل .

٢ – نكتب ثلاث معادلات للإتزان التي يجب أن تتحقق.



$\sum x = 0$

$$3W\cos 30 + 2\sqrt{3}W - W\cos 30 - 2\sqrt{3}W - \sqrt{3}W = 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}W + \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{\sqrt{3}}{2}W - \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{2\sqrt{3}}{2}W = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$\sum y = 0$

$$3W\sin 30 + W\sin 30 + \frac{W}{2} - 4W + 1.5W = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$\sum M_o = 0$

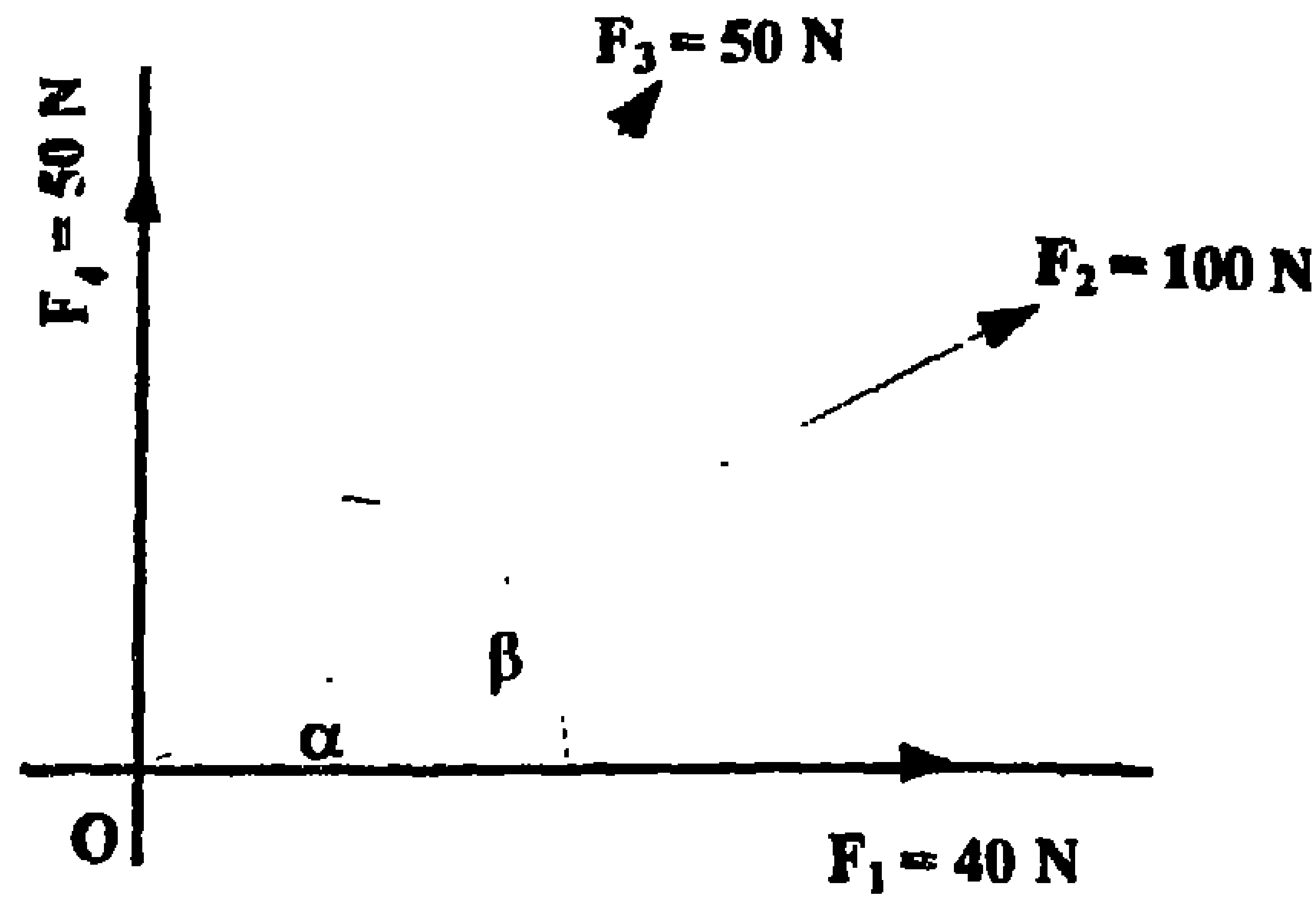
$$3W\sin 30 \cdot 2a + W\cos 30 \cdot a + 2\sqrt{3}W \cdot \frac{a}{2} + \frac{W}{2} \cdot 2a - 3W\cos 30 \cdot a - 4W \cdot a = 0$$

$$3W \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{2}W \cdot a + \sqrt{3}W \cdot a + W \cdot a - \frac{3\sqrt{3}}{2}W \cdot a - 4W \cdot a = 0 \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

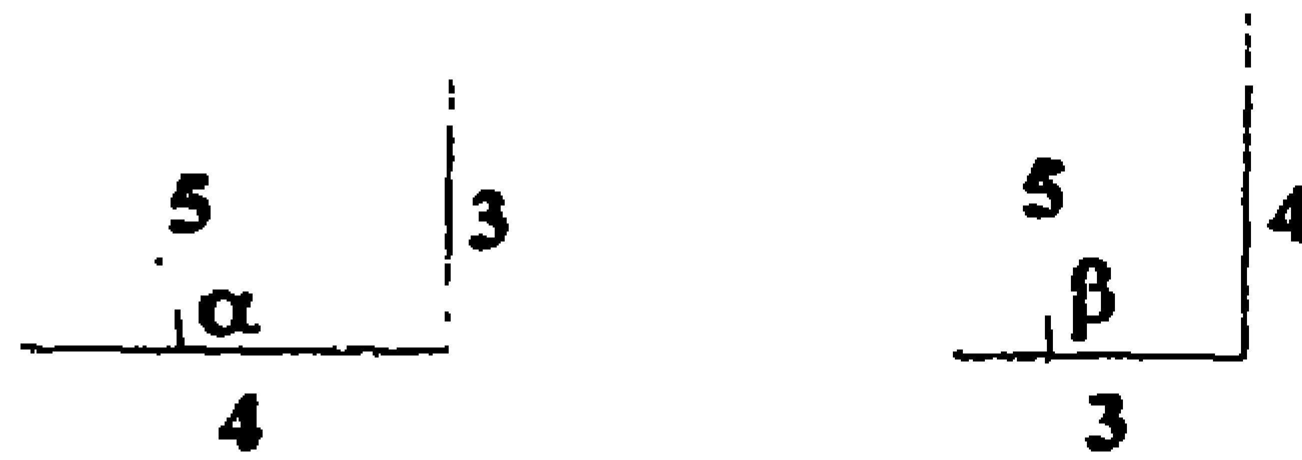
المعادلات 3 , 2 , 1 تعطي شروط كافيه لتحقيق الإتزان.

مثال ٢:

أوجد محصلة القوى المتلاقية تحليليا و بيانياً في الشكل المبين :



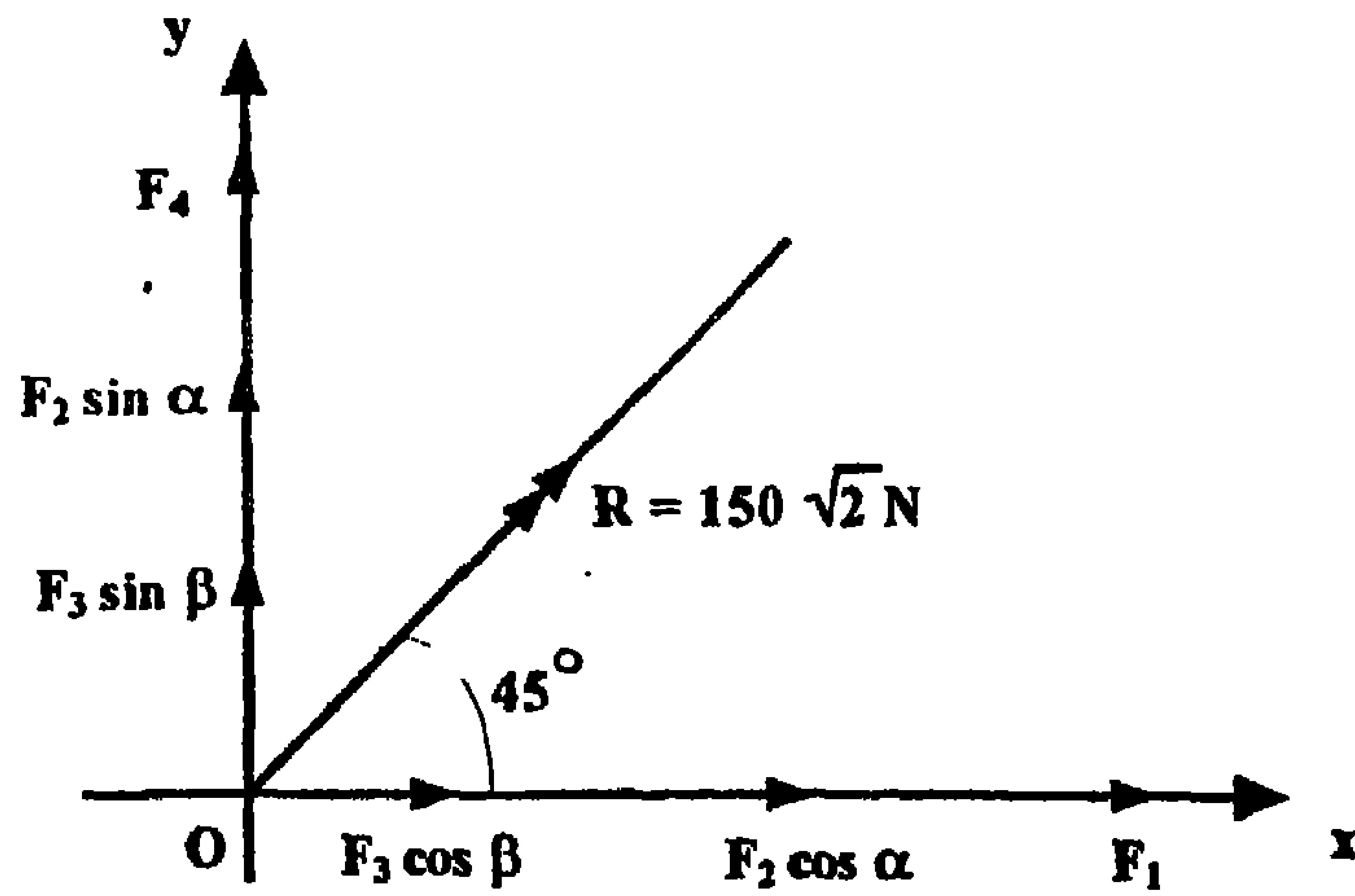
مع ملاحظة أن:



الحل:

أولاً تحليلياً :

نختار محورين متعامدين كما بالرسم (x , y).



$$\because R_x = \sum F_x$$

حيث المحصلة في الإتجاه الأفقي R_x هي مجموع القوى في هذا الإتجاه.

$$R_x = 40 + 100\left(\frac{4}{5}\right) + 50\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= 150 \text{ N}$$

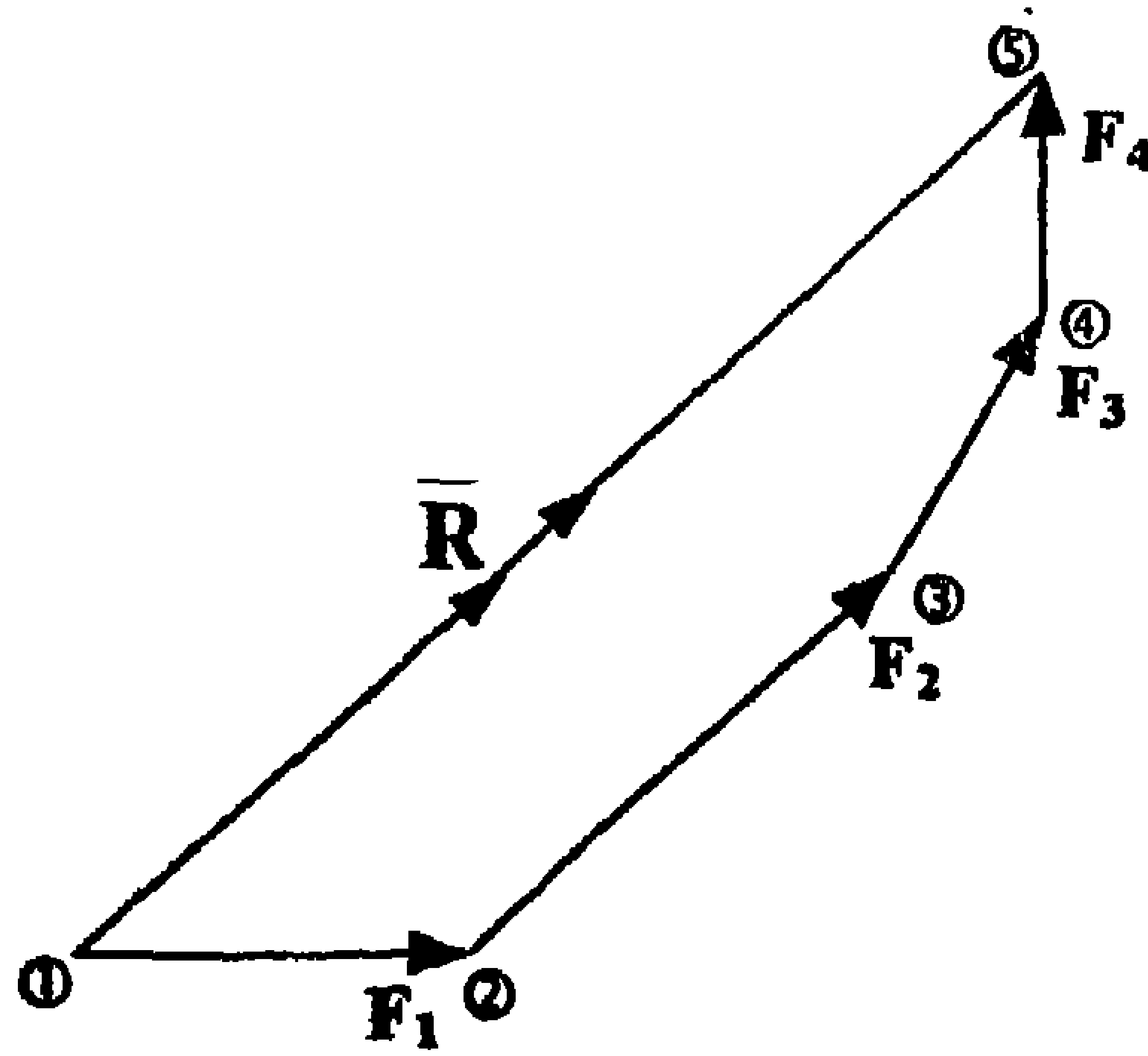
$$\because R_y = \sum F_y$$

حيث المحصلة في الإتجاه الراسي R_y مجموع القوى في هذا الإتجاه.

$$R_y = 50 + 100\left(\frac{3}{5}\right) + 50\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= 150 \text{ N}$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{150^2 + 150^2} = 150\sqrt{2} \text{ N}$$
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{150}{150} = 1$$
$$\theta = 45^\circ$$

أما خط العمل فيمر بنقطة التلاقي.

ثانياً بيانيا :



مقياس رسم القوى:

(1 cm = 20 N)

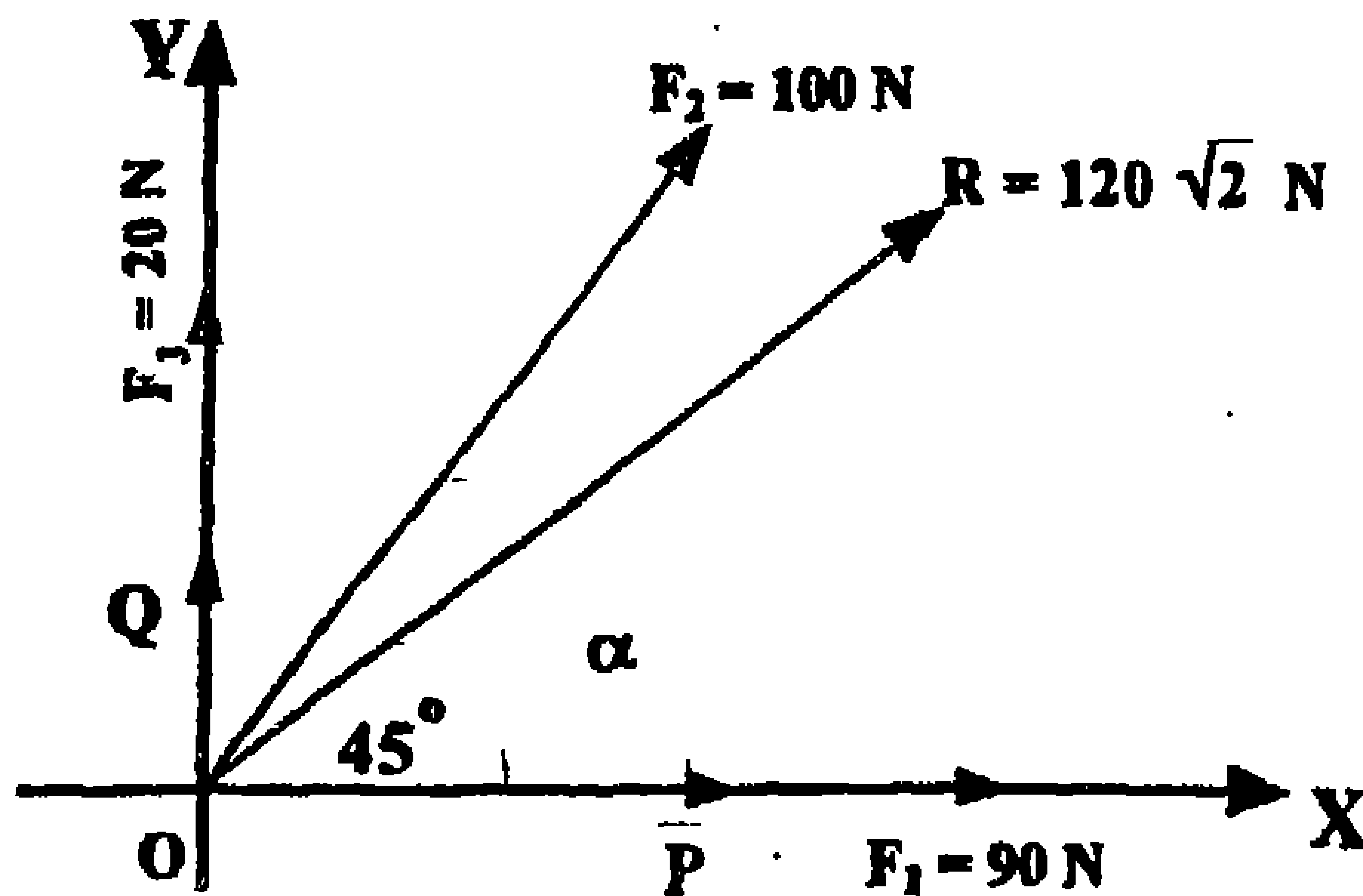
من الرسم:

$R \doteq 10.5\ cm\ (20\ N/1\ cm) = 210\ N$

$\theta = 45^\circ$

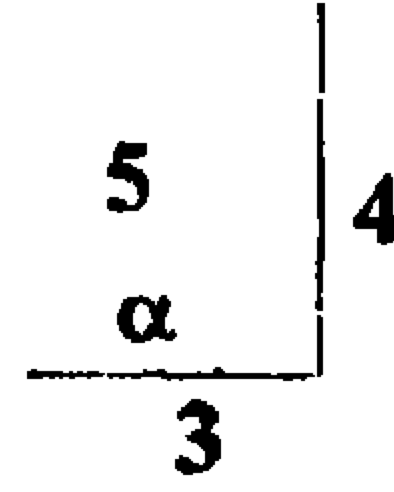
مثال ٣ :

يراد اضافة القوتـين المتعامدتين $\overline{P}$, $\overline{Q}$ الى القوى الثلاثة $\overline{F_1}$ و $\overline{F_2}$ و $\overline{F_3}$ المبينة في الشكل بحيث يكون محصلة المجموعة $\overline{R}$.



حيث $R = 120\sqrt{2}$ N و تميل على الأفقي بزاوية $\theta = 45^\circ$ حل تحليليا و بيانيا.

علما بأن :



الحل:

ملاحظة:

المتجه غير المعلوم اتجاهه نفرض له أي إتجاه.

إذا كان الناتج بعد الحل بالموجب إذن الإتجاه المفروض صحيح.

إذا كان الناتج بعد الحل بالسالب إذن الإتجاه الصحيح عكس الإتجاه المفروض.

أولاً: الحل تحليليا

بفرض اتجاه $\overline{Q}$, $\overline{P}$ كما في الرسم و بتطبيق شروط التكافؤ

$$R_X = \sum F_X$$

$$120\sqrt{2}\cos 45 = 90 + 100\,(\cos a) + P$$

$$120 = 90 + 60 + P$$

$$\therefore P = -30N$$

إذن اشارة السالب تعني اتجاه $\overline{P}$ عكس الإتجاه المفروض.

$$R_Y = \sum F_Y$$

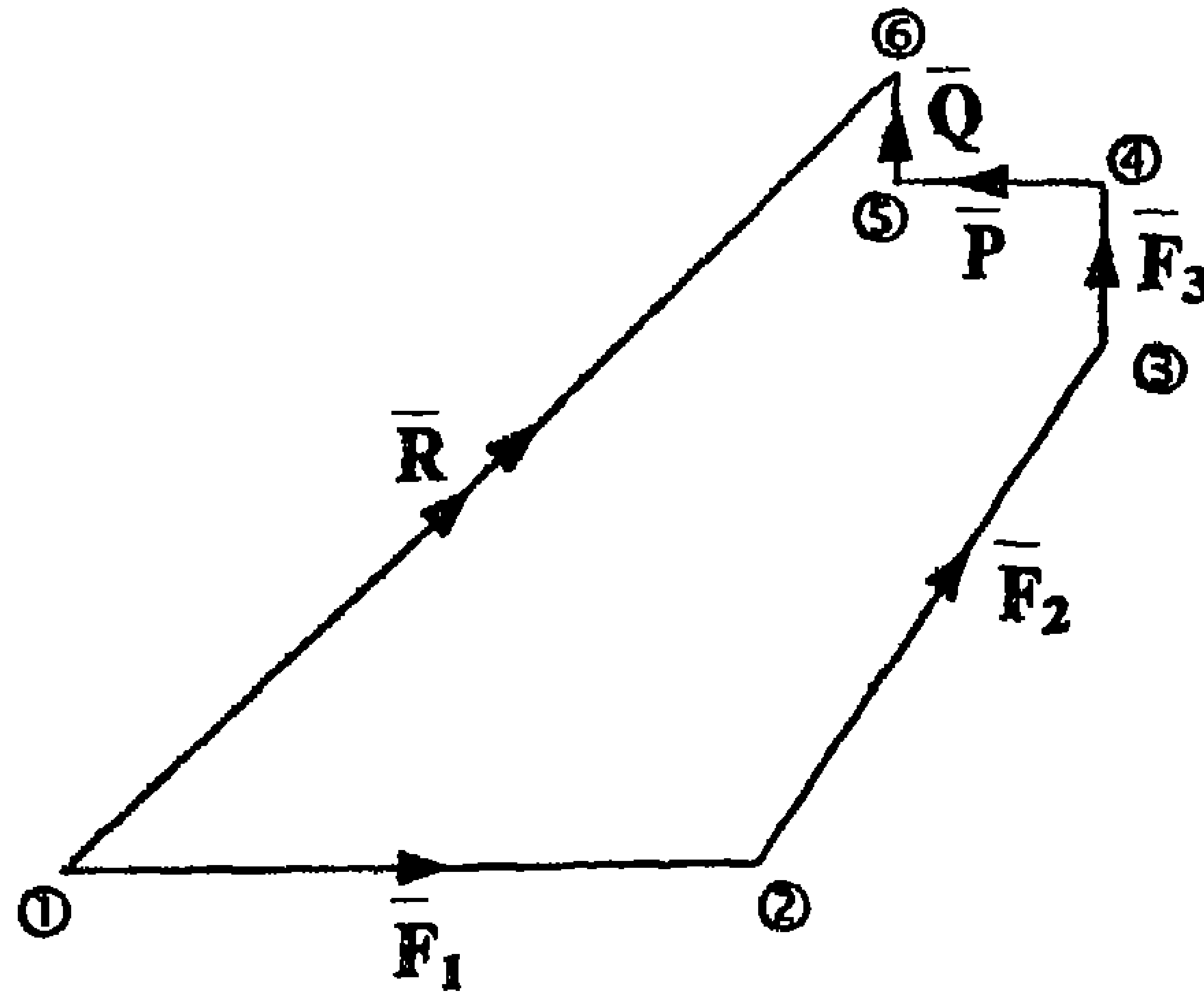
$$120\sqrt{2}\sin 45 = 100\,(\cos a) + 20 + Q$$

$$120 = 80 + 20 + Q$$

$$\therefore Q = 20\ N$$

الحل بيانياً:

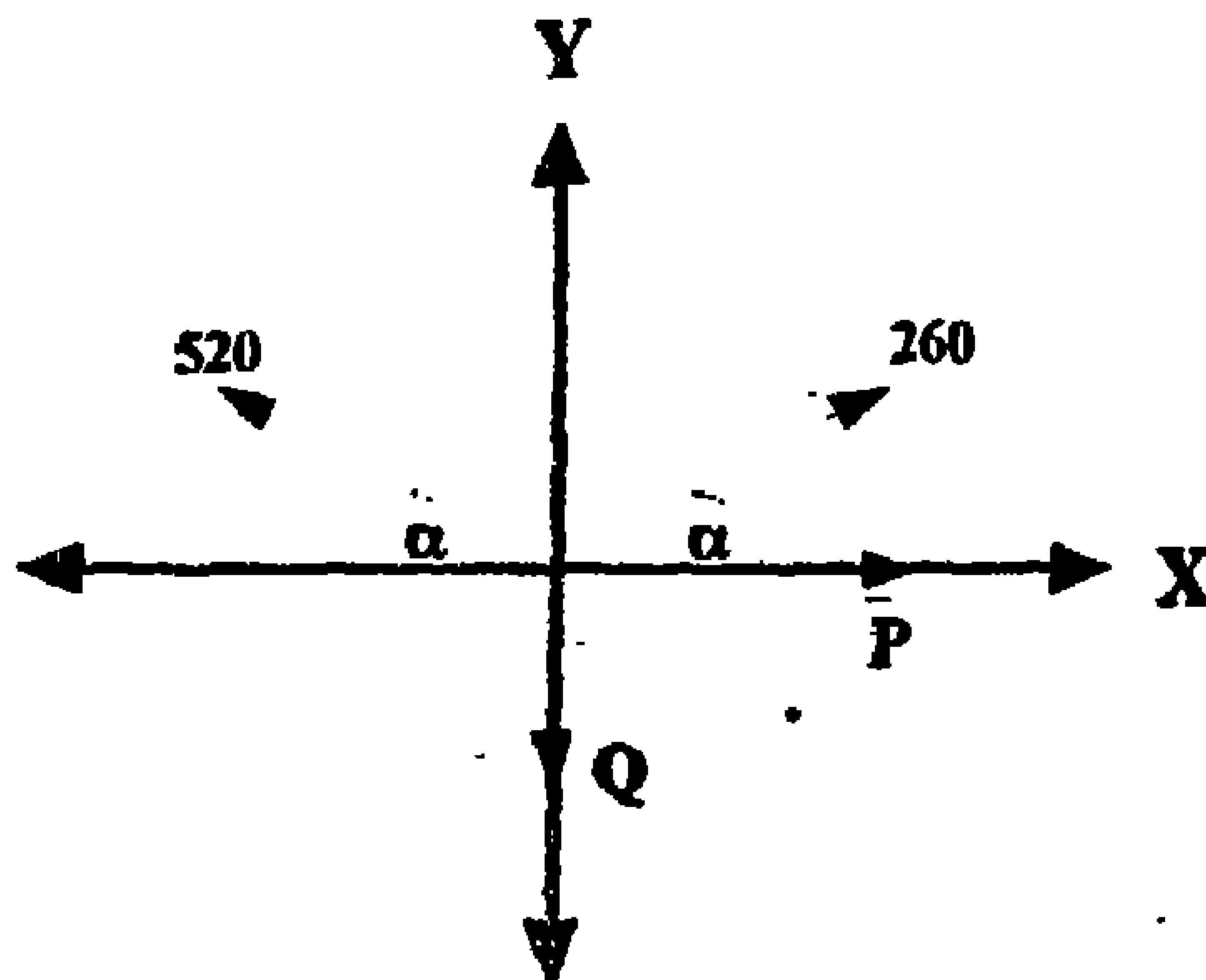
مقياس رسم القوى: (1 cm = 20 N)



$$P = 1.5cm \times \frac{20N}{1\,cm} = 30N$$

$$Q = 1cm \times \frac{20N}{1cm} = 20N$$

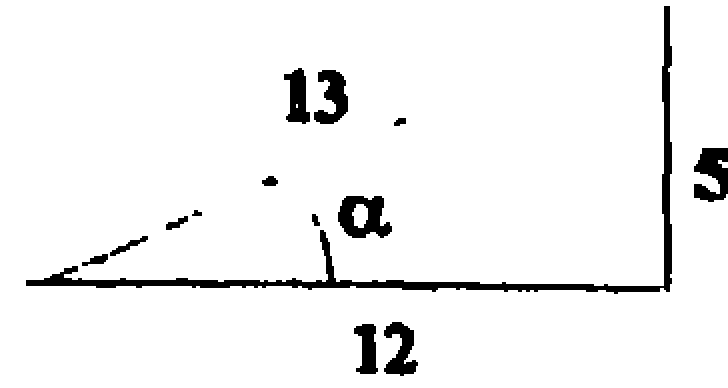
مثال ٤ :



عين مقدار القوتين المتعامدتين P و Q لكي تكون المجموعة المبينة بالشكل متزنة و ذلك تحليلياو بيانياً .

علماً بأن:

$\tan \alpha = 5/12$



الحل:

أولا تحليلياً:

∵ المجموعة متزنة.

$\therefore R = 0$

$\therefore R_x = 0 \quad , \quad R_y = 0$

$\therefore R_x = \sum F_x = 0$

$P + 260 \cos a - 520 \cos a = 0$

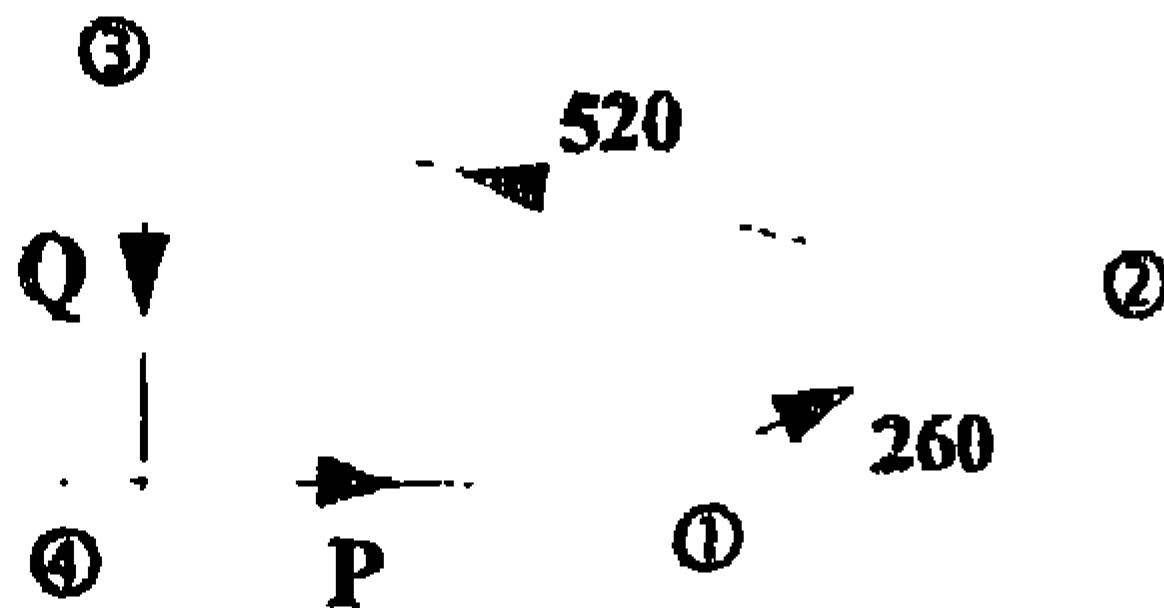
$\therefore P = 240 \text{ N}$

$\therefore R_y = \sum F_y = 0$

$-Q + 260 \sin a + 520 \sin a = 0$

$Q = 300 \text{ N}$

ثانياً: بيانياً



مقياس رسم القوى :(1 cm = 100 N)

$$Q = 3\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 300\text{N}$$

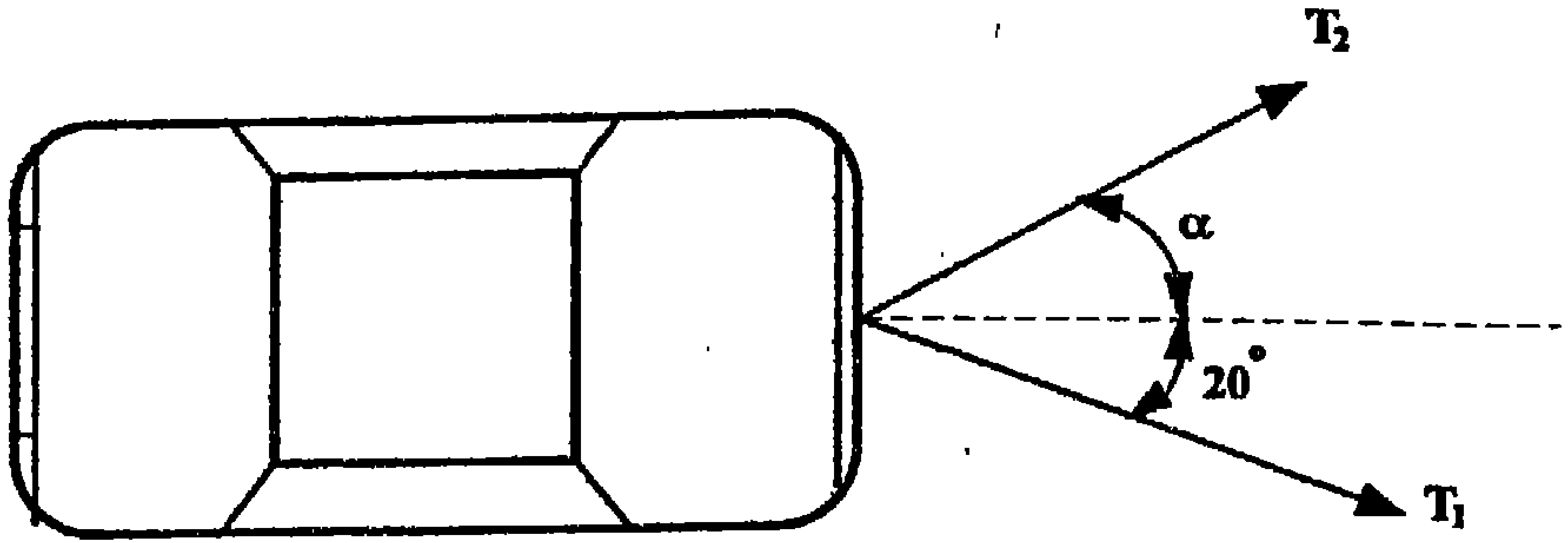
$$P = 2.4\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 240\text{N}$$

مثال ٥ :

عربة معطلة تسحب بواسطة حبلين فاذا كانت محصلة الشدين في الحبلين هي 300 N في اتجاه محور السيارة أوجد

(أ) الشد في كل من الحبلين اذا كانت زاوية $\alpha = 30°$

(ب) أوجد أقل زاوية α حتى يكون الشد T_2 أقل ما يمكن.



الحل:

(أ) الزاوية $\alpha = 30°$

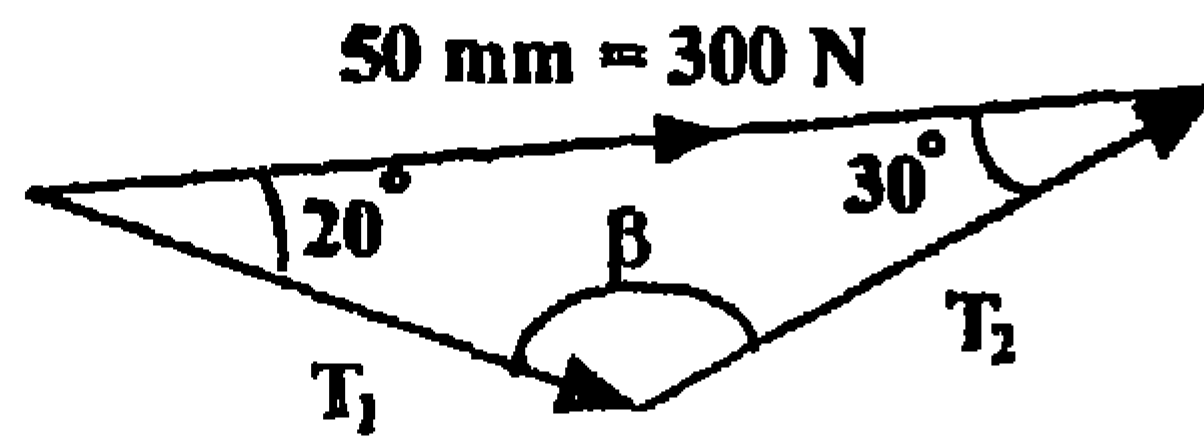
المعلوم هنا مقدار المحصلة واتجاه القوتين أي أننا مطالبين بتحليل هذه المحصلة إلى اتجاهين معلومين. وفي هذه الحالة نتبع احدى الطرق الآتية:

١ – الطريقة البيانية: بأخذ مقياس رسم مناسب (1 cm = 60 N)

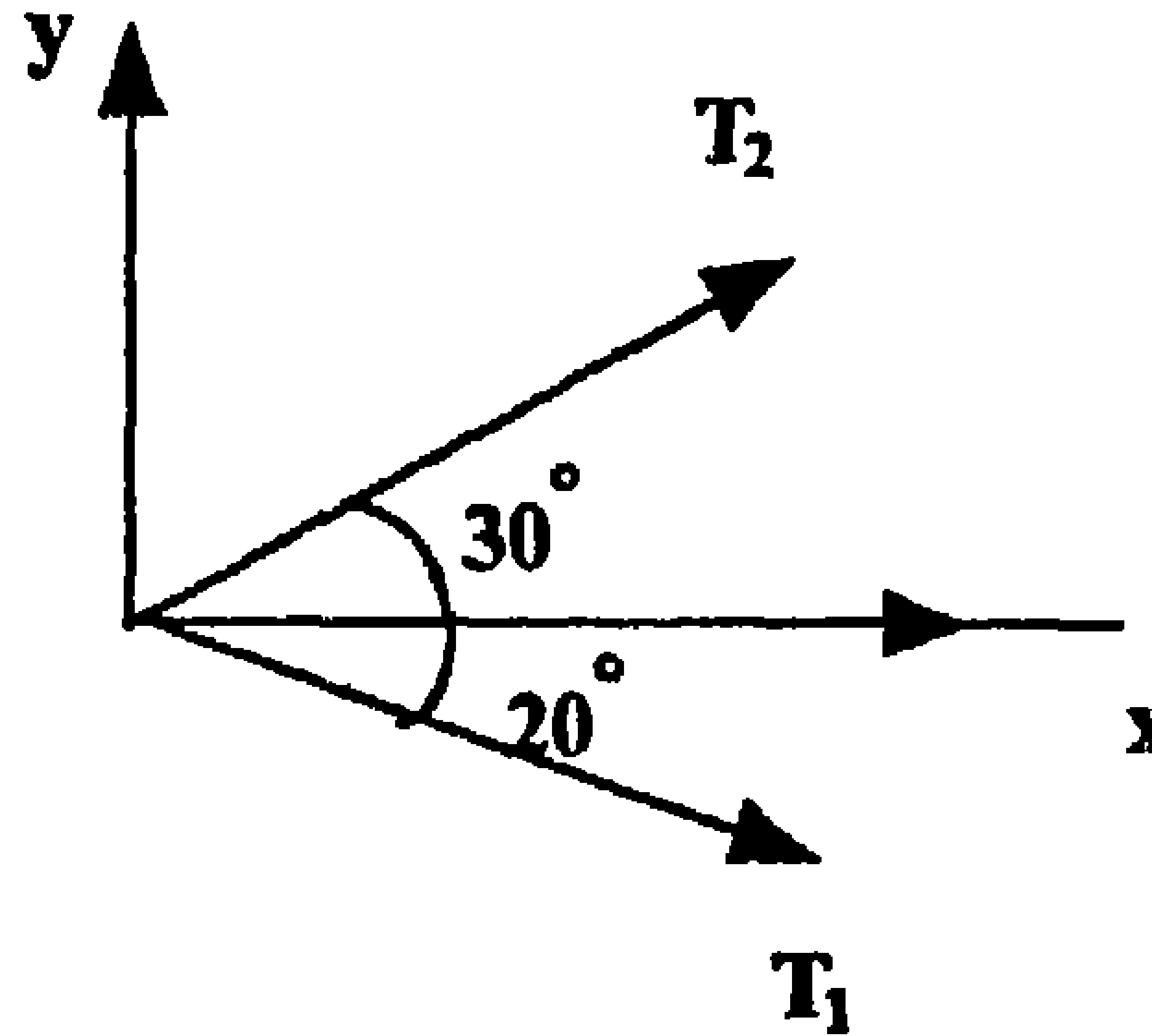
تكون المحصلة طولها 5 cm ونجعلها قطر في متوازي الأضلاع أو ضلع من مثلث أضلاعه توازي الاتجاهات المعلومة يمكن رسم مثلث القوى كما في الشكل وبقياس طولي الضلعين T_1 ، T_2 نجد أن:

$T_1 = 3.27\ \text{cm} = 3.27 \times 60\ \text{N} = 196\ \text{N}$

$T_2 \cong 2.23\ cm \cong 2.23 \times 60\ N \cong 134\ N$



٢ – الطريقة التحليلية: بتحليل القوة T2 ، T1 في اتجاه المحصلة (x) واتجاهها عمودي عليـه (y)



$$\sum T_x = R_x \quad \therefore T_1 \cos 20^\circ + T_2 \cos 30^\circ = 300$$
$$\sum T_y = R_y \quad \therefore - T_1 \sin 20^\circ + T_2 \sin 30^\circ = 0$$

بحل المعادلتين:

$$\therefore T_2 = 300 / (\cos 30^\circ + \cos 20^\circ . \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}) = 133.9\,N$$

$$T_1 = T_2 . \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 195.8\,N$$

ويوجد حل أبسط باستخدام قوانين حساب المثلثات في مثلث القوى نجد أن

$R/\sin\beta = T_1/\sin 30^\circ = T_2/\sin 20^\circ$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة لامي.

وهي لا تصلح إلا اذا ما كانت القوى ملتقية في نقطة واحدة

ويلاحظ في هذه المسألة أن $20° + 30° + \beta = 180°$

$\therefore \beta = 130°$

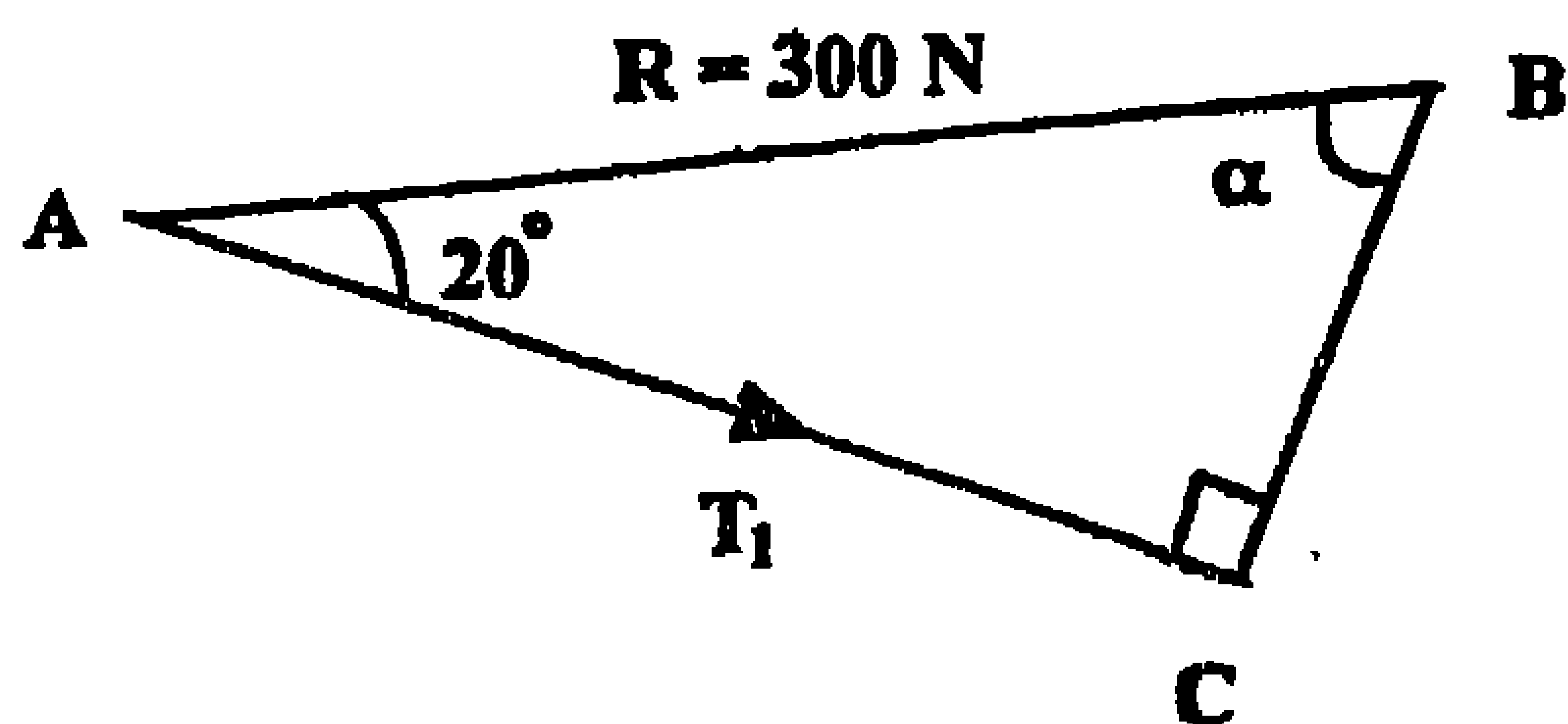
$T_1 = R \sin 30° / \sin(180°-50°) = 195.8$ N

$T_2 = R \sin 20° / \sin(180°-50°) = 133.9$ N

(ب) قيمة الزاوية α التي تجعل القوة T_2 أقل ما يمكن في مثلث القوى ABC الشكل الآتي نلاحظ أن نقطة B ثابتة وباستخدام قواعد حساب مثلثات البسيطة يمكن اثبات أن أقصر طول للضلع CB (اذا كانت الزاوية A ثابتة وطول AB ثابت) هو طول العمود الساقط من B على CB والذي يمثل مقدار واتجاه القوة T_2 وفي هذه الحالة تكون T_2 أقل ما يمكن وتكون الزاوية $\alpha = 70°$

$T_2 = 300 \sin 20° = 102.6$ N

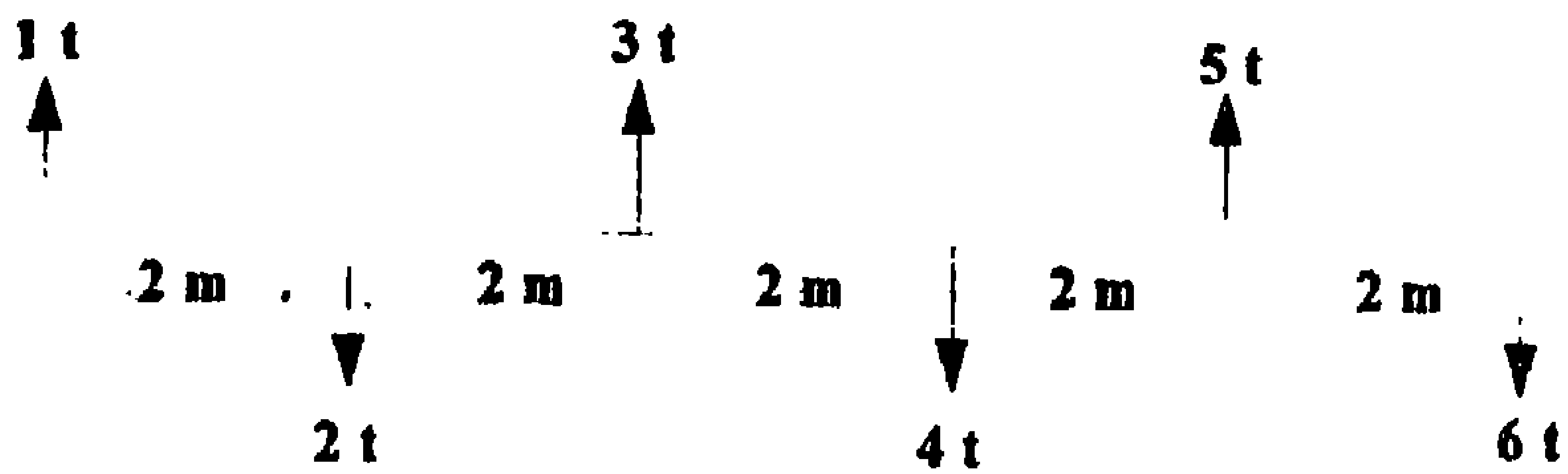
$T_1 = 300 \cos 20° = 282$ N



أمثلة على ايجاد محصلة مجموعة من القوى المتفرقة :

مثال ٦:

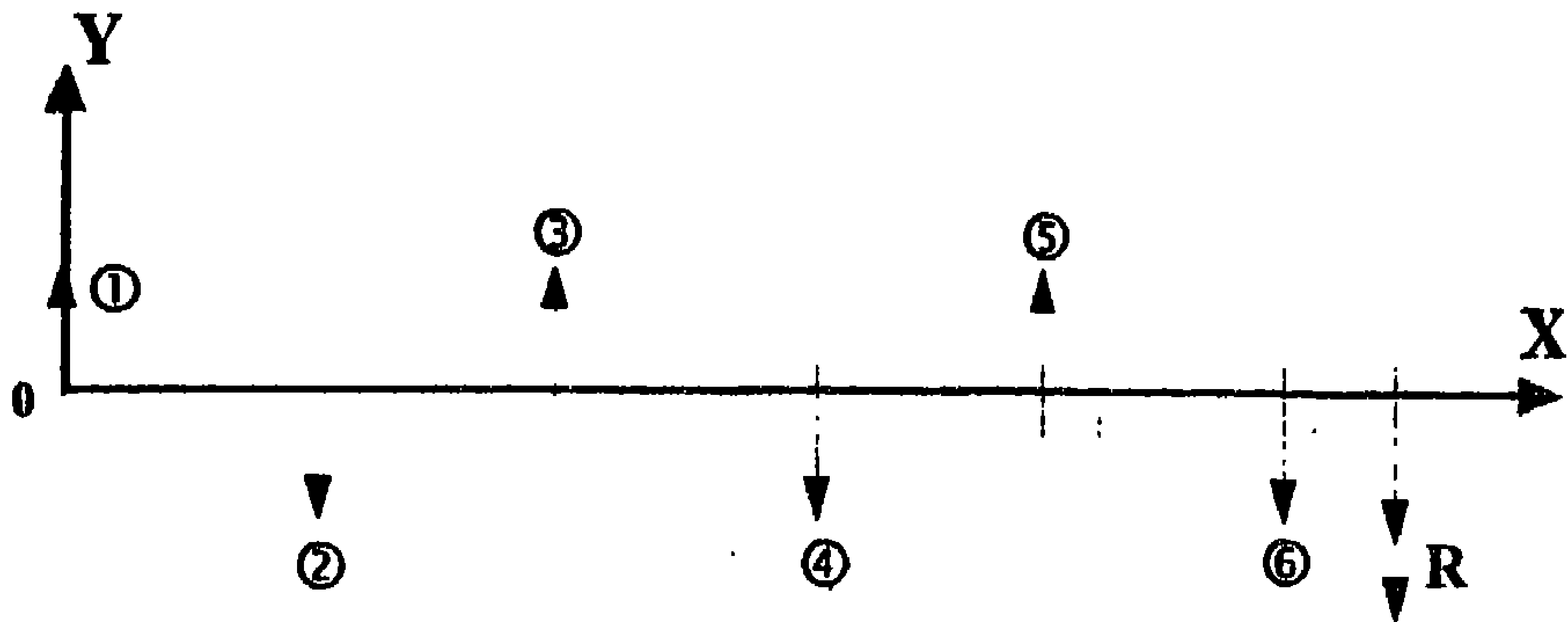
أوجد محصلة القوى المبينة تحليليا و بيانيا مع تحديد خط عملها.



الحل:

أولاً: تحليلياً

نختار محورين متعامدين كما بالرسم



$$\because R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$R = 3$$

$$\because \tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

$$\therefore \theta = 270^\circ$$

أما خط العمل فيتعين من قانون العزوم:

$\sum M_0 = xR_y - yR_x$

$\sum M_0 = -2(2) + 3(4) - 4(6) + 5(8) - 6(10)$

$= -36 t.m$

$\because xR_y - yR_x = x(-3) - y(0)$

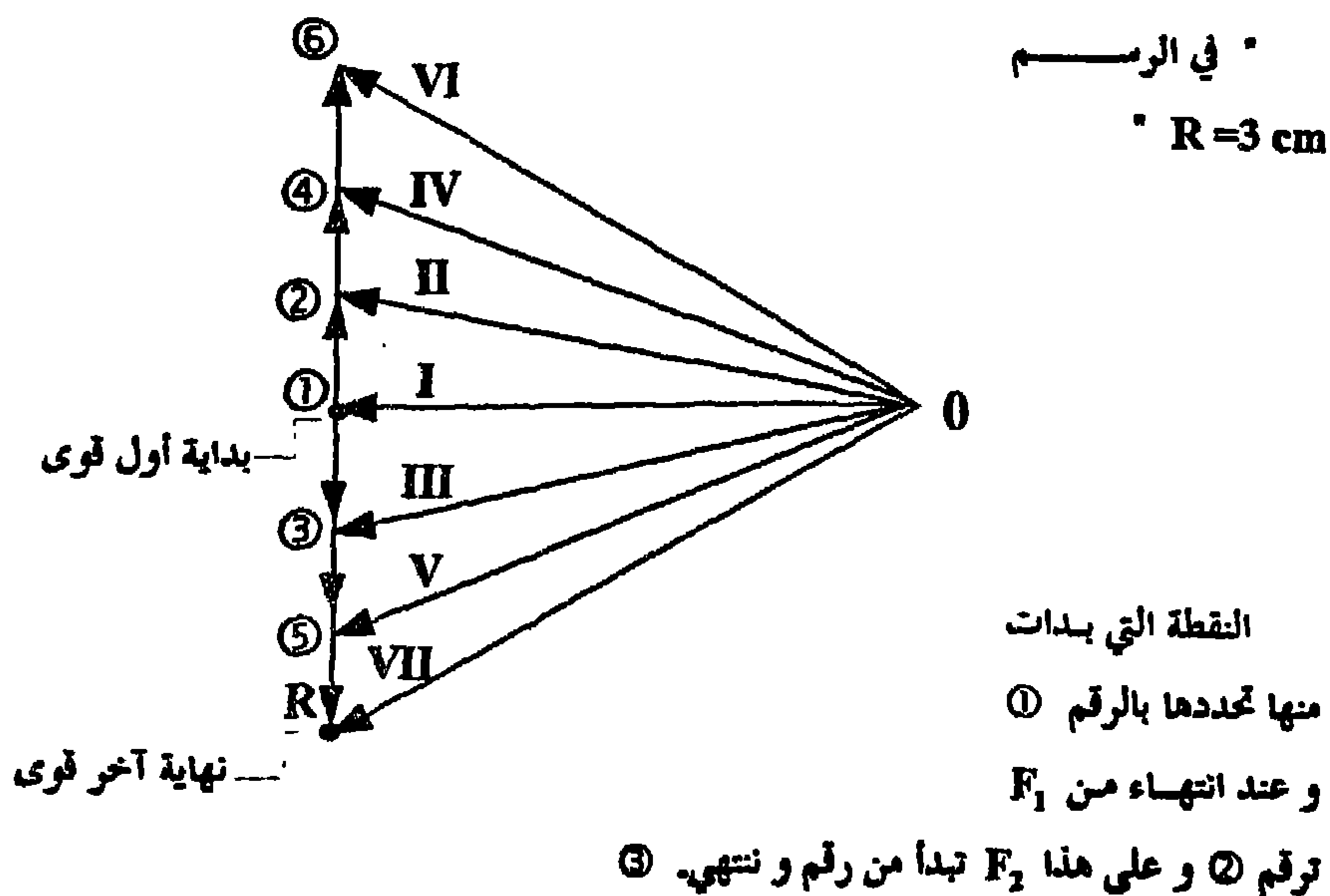
$\therefore -36 = -3x$

$x = 12m$

ثانيا: بيانياً

مقياس رسم المسافات: (1 cm = 1 m)

مقياس رسم القوى: (1 cm = 1 N)

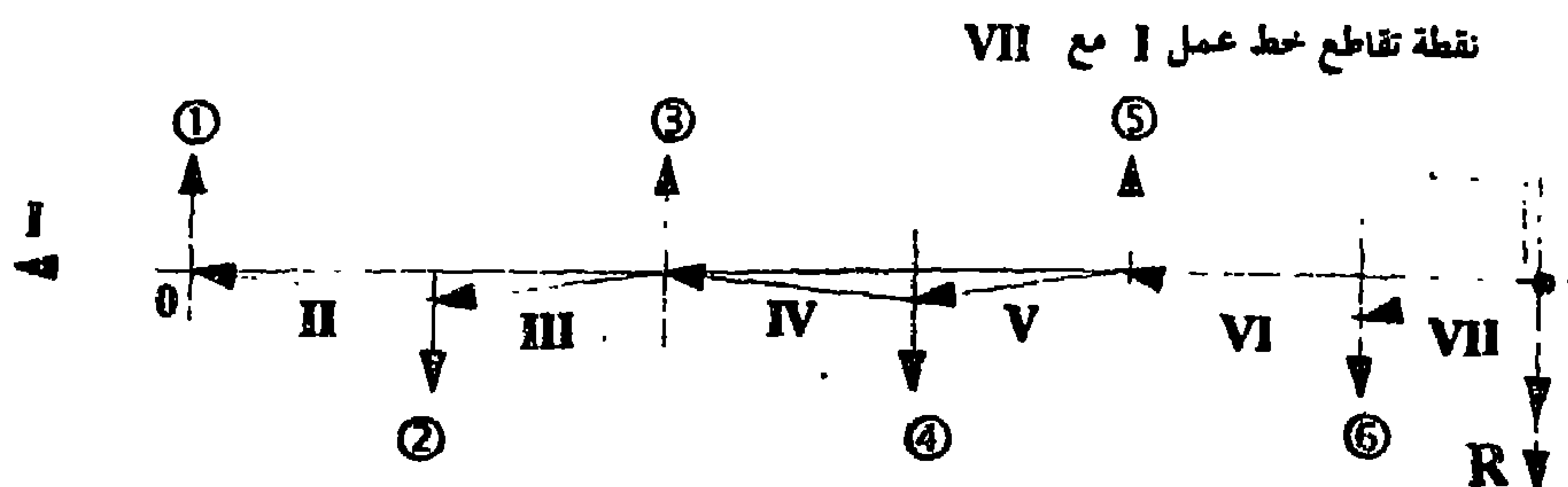


* في الرسم

* R =3 cm

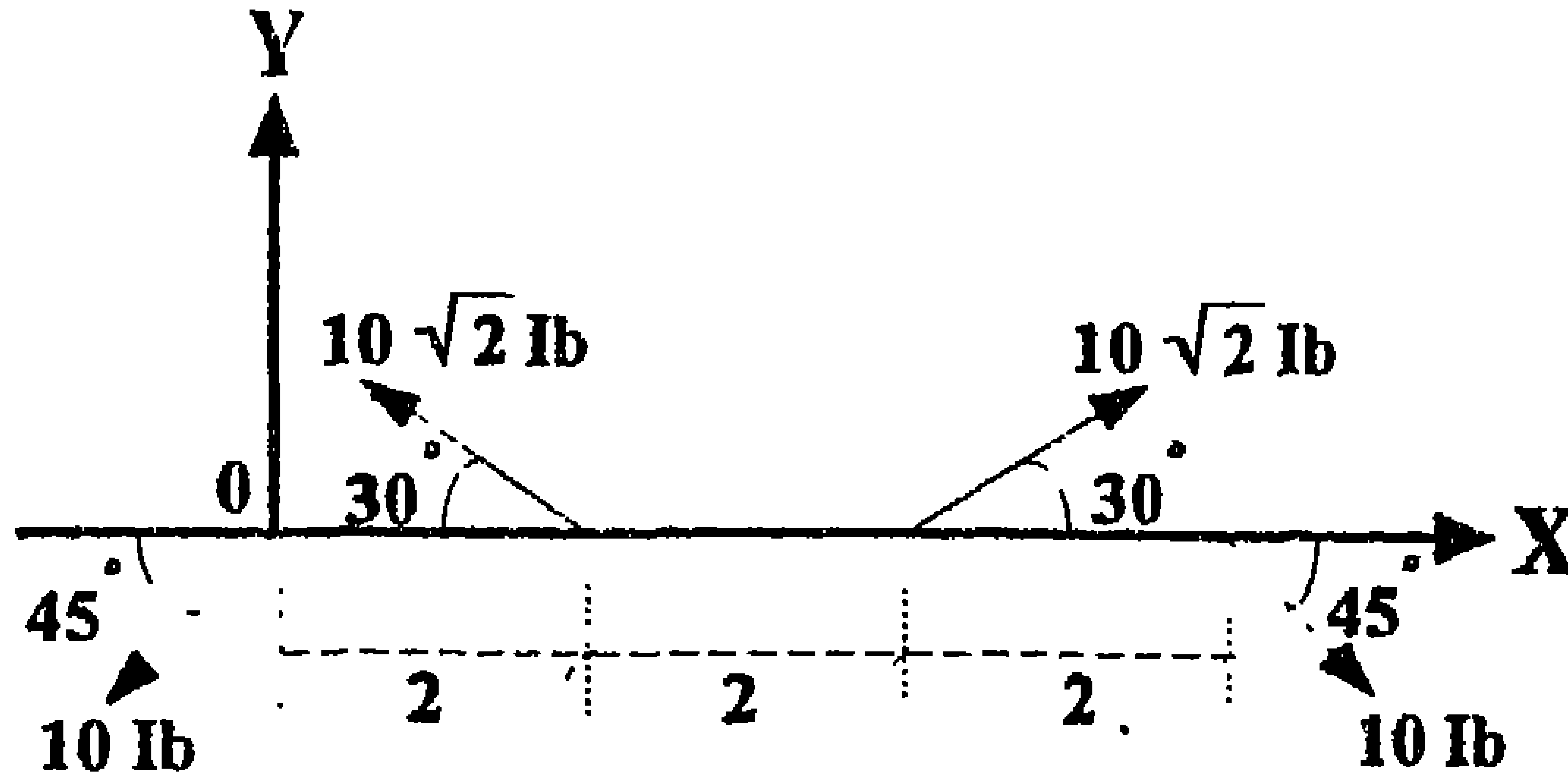
النقطة التي بدات منها تحددها بالرقم ① و عند انتهاء من F_1 ترقم ② و على هذا F_2 تبدأ من رقم و تنتهي ③

نقطة تقاطع خط عمل I مع VII



مثال ٧:

حقق بالطرق التحليلية و البيانية أن القوى الموضحة في توازن.



الحل

أولا: تحليلياً " تحديد محوري التعامد "

$$\because \Sigma F_x = 0$$

$$-10\cos 45 - 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\cos 45 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\because \Sigma F_y = 0$$

$$-10\sin 45 + 10\sqrt{2}\sin 30 + 10\sqrt{2}\sin 30 - 10\sin 45 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\because \Sigma M_o = 0$$

$$+(10\sqrt{2}\sin 30)(2) + (10\sqrt{2}\sin 30)(4) - (10\sin 45)(6)$$

$$10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن المجموعة تحقق أتزان.

ثانيا: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: (1 cm = 1 m)

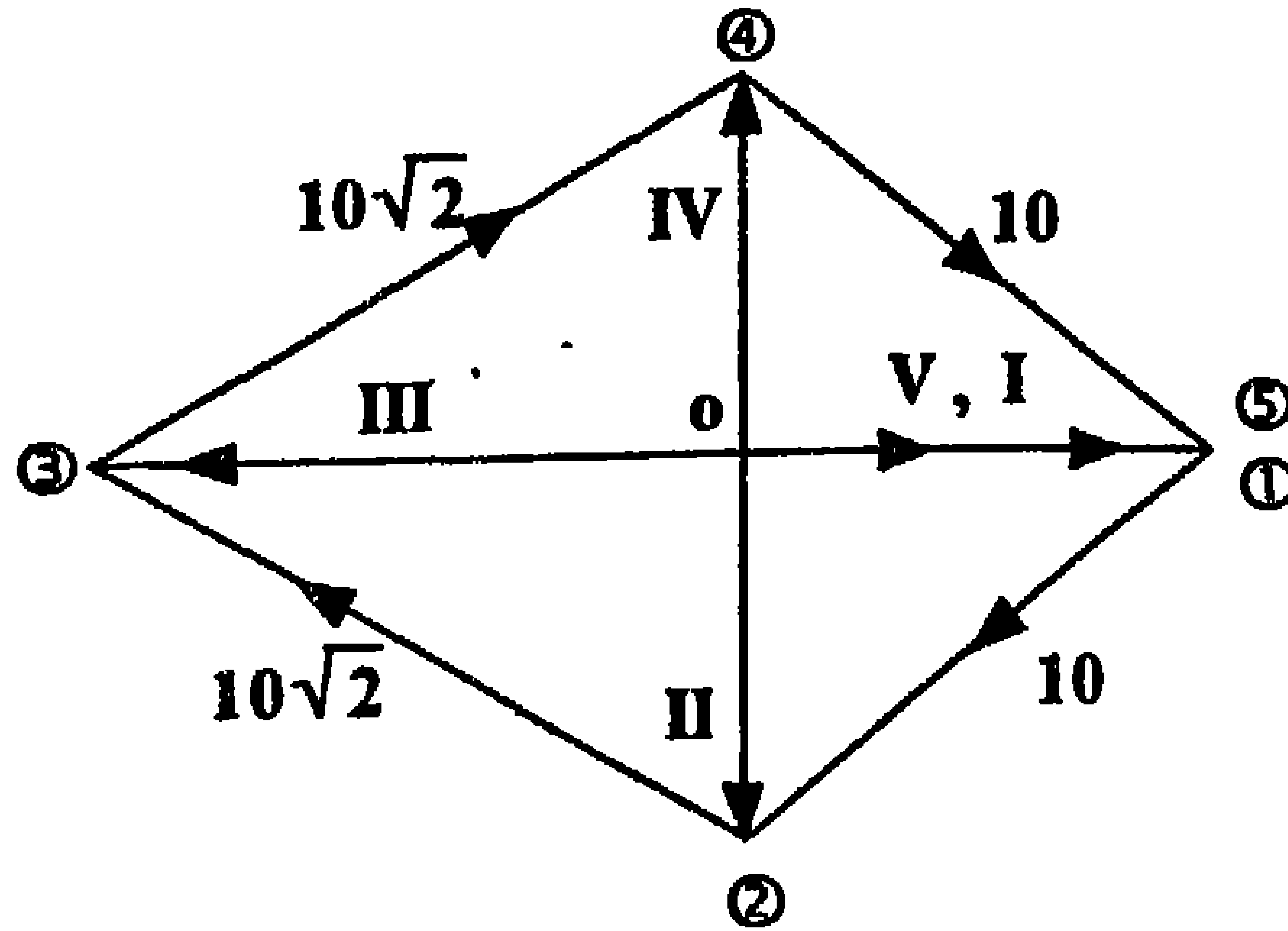
مقياس رسم القوى: (1 cm = 2 N)

: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: (1 cm = 1 m)

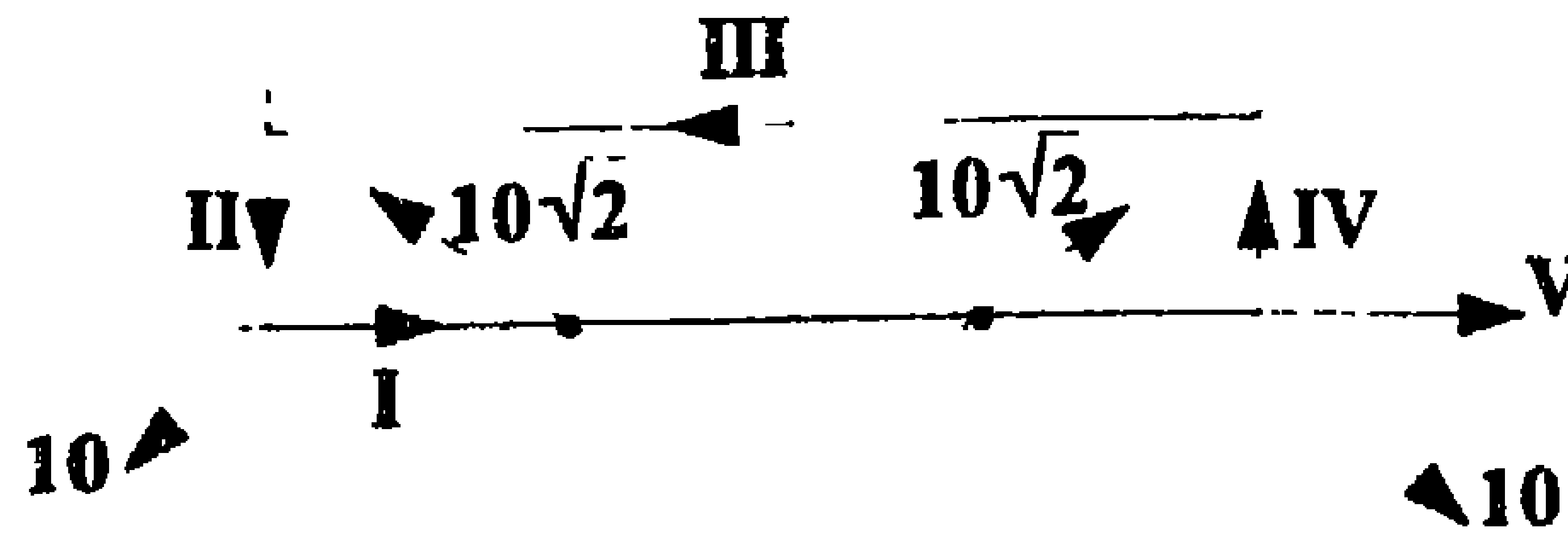
مقياس رسم القوى: (1 cm = 2 N)

أ – مضلع القوى:



ملاحظة: مضلع القوى مقفل.

ب – المضلع الحبلي:



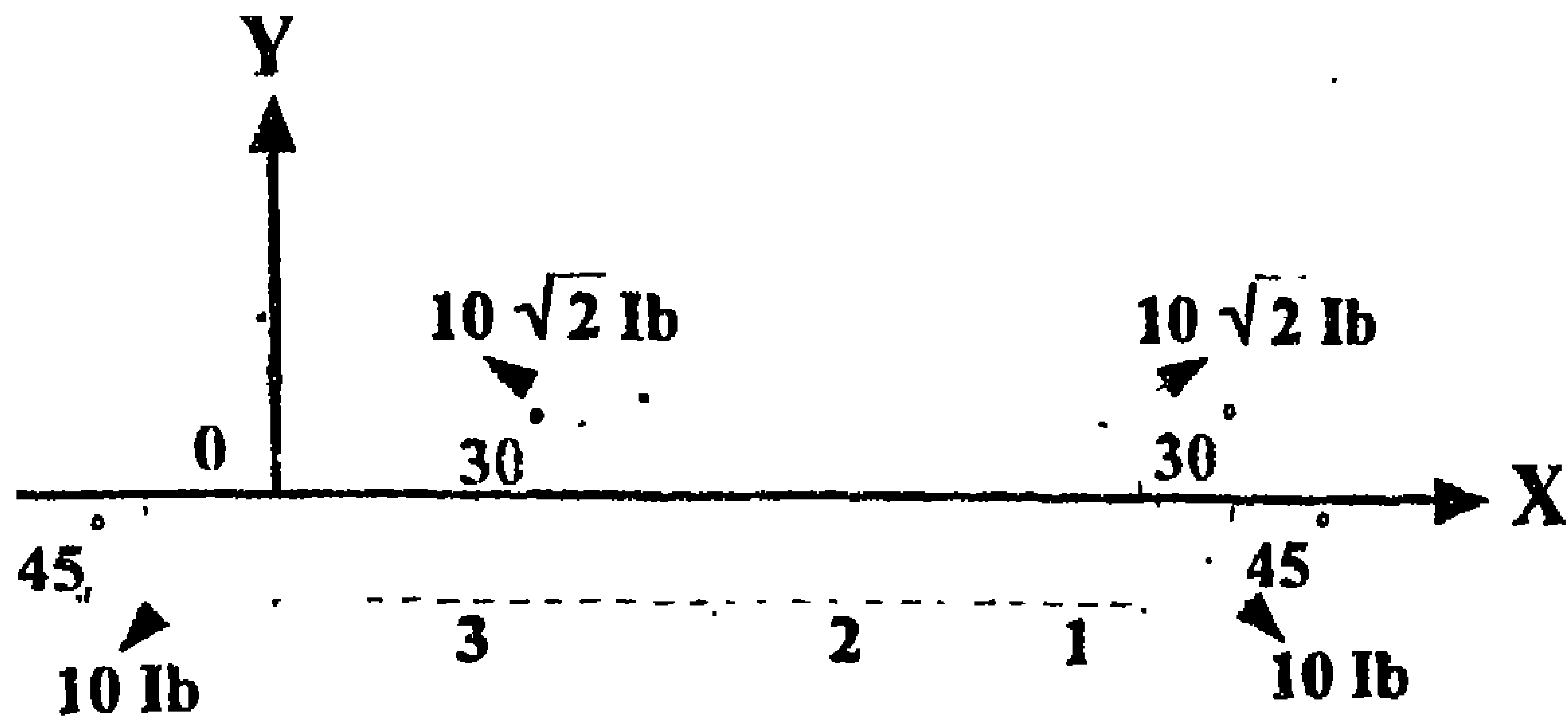
من الرسم يتضح أن المضلع الحبلي مقفل.

∵ مضلع القوى مقفل و المضلع الحبلي مقفل.

∴ مجموعة القوى تحقق اتزان.

:٨

حقق بالطرق التحليلية و البيانية أن محصلة القوى الموضحة أزدواج و عين عزمه.



الحل:

أولا تحليليا:

$$\because \sum F_x = 0$$

$$-10\cos 45 - 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\sqrt{2}\cos 30 + 10\cos 45 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\because \sum F_y = 0$$

$$-10\sin 45 + 10\sqrt{2}\sin 30 + 10\sqrt{2}\sin 30 - 10\sin 45 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\because \sum M_o = 0$$

$$+(10\sqrt{2}\sin 30)(3) + (10\sqrt{2}\sin 30)(5) - (10\sin 45)(6)$$

$$= 10\sqrt{2} \quad \text{N.cm} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن:

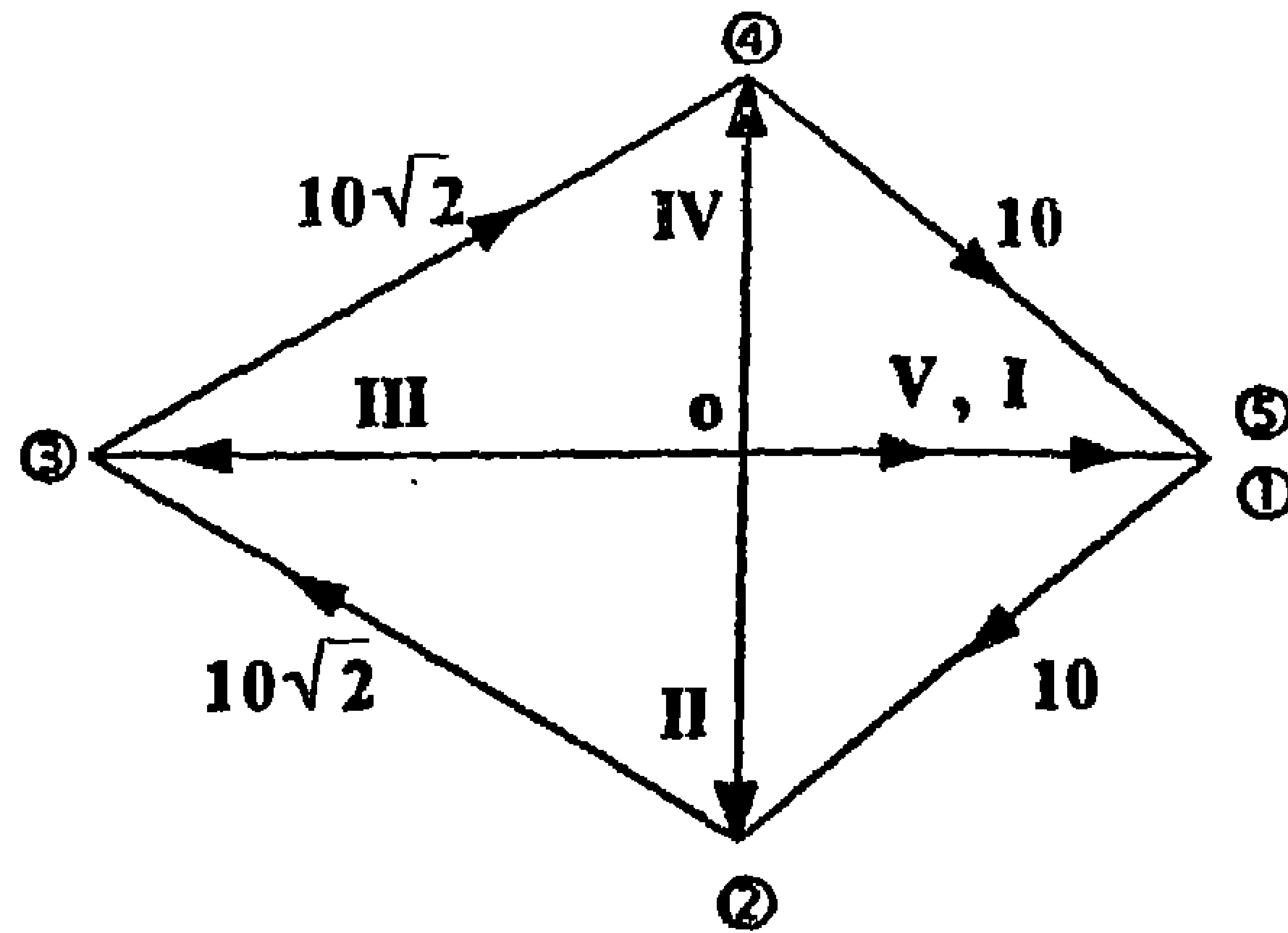
$$\because \sum M_o \neq 0 = 10\sqrt{2} \quad \text{N.cm}$$

مجموعة القوى تكون أزدواج عزمه = $10\sqrt{2}$ N.cm

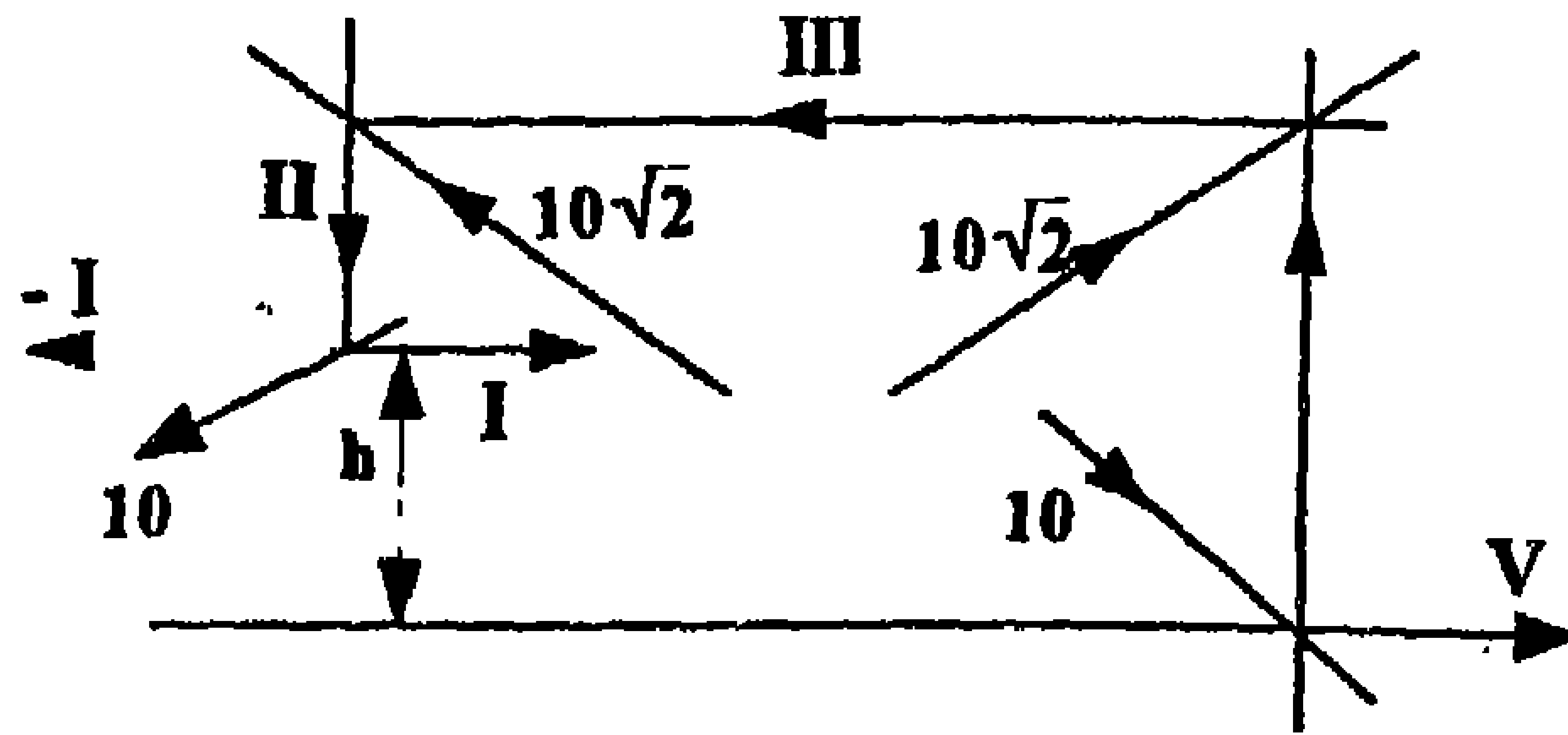
ثانيا: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات : (1 cm = 1 m)

مقياس رسم القوى: (1 cm = 2 N)



مضلع القوى مقفل



ملاحظة: ان مضلع الحبلي مفتوح.

$V+(-I)=$ مجموع القوى.

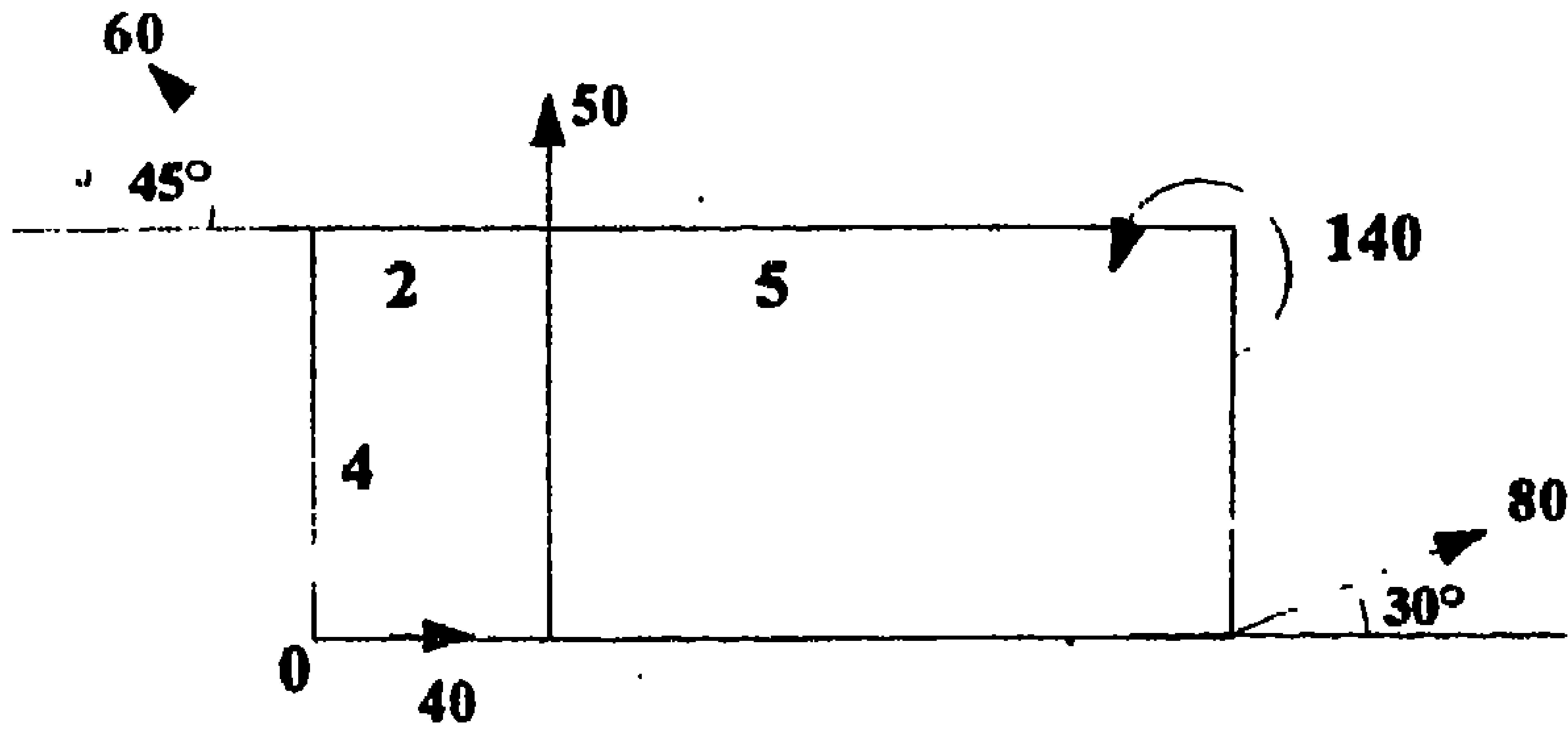
الإزدواج المحصل هو مكون من القوتين $-I$ ، V

" و ذلك لأن V محصلة المجموعة مضافا اليها القوى المساعدة I فيطرح I أي أضافة $-I$ إلى V نحصل على الإزدواج المحصل ".

$$M=+(V)(h)$$
$$=+(3.5\times 2)(2\times 1)$$
$$=14\ \text{N.m}=10\sqrt{2}\ \text{N.m}$$

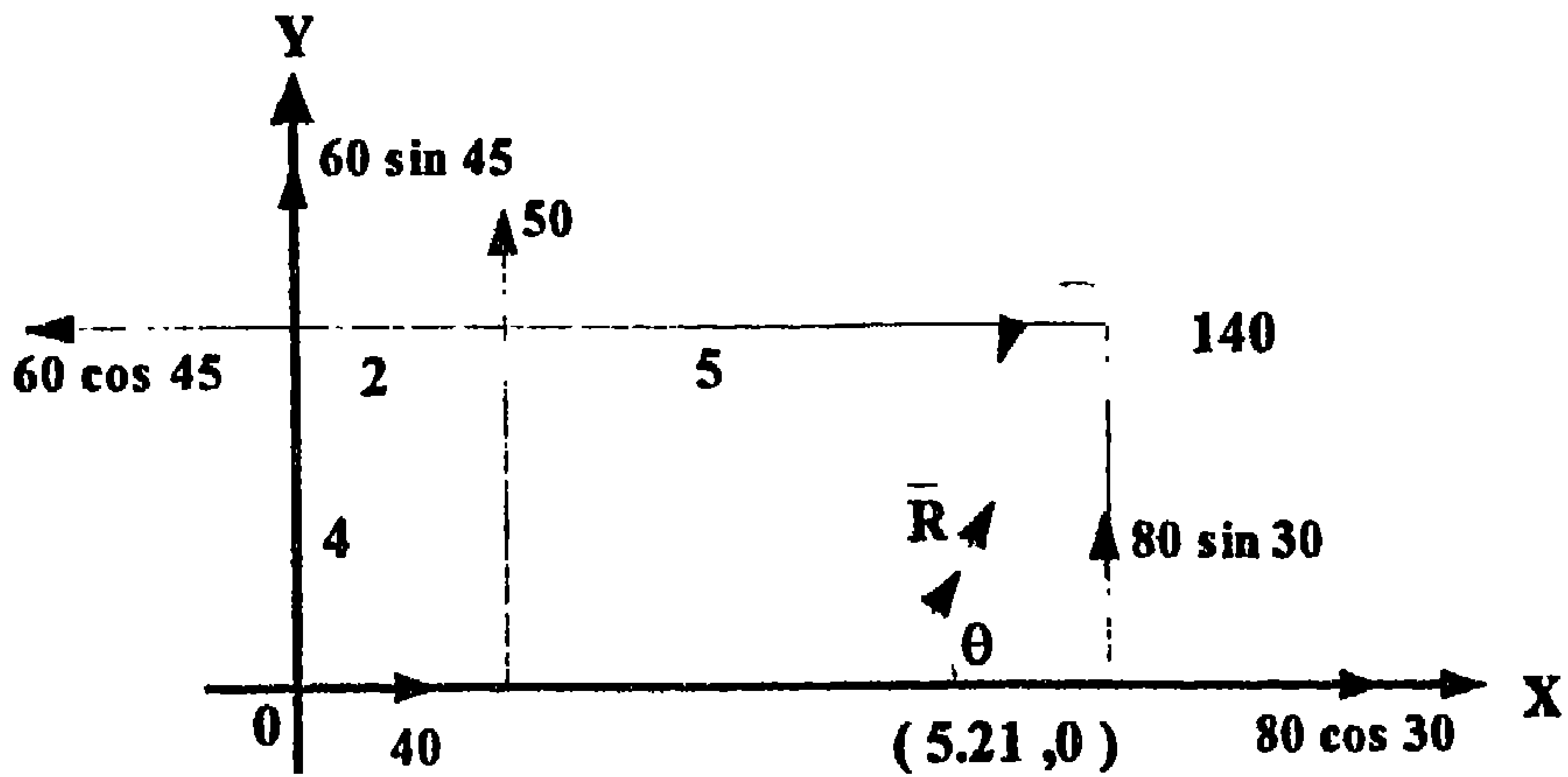
مثال ٩:

أوجد محصلة القوى و الأزدواج الموضحة في الشكل تحليليا ، و بيانياً.



الحل :

أولا: تحليلياً



تحديد محورين متعامدين x ،y

$$R_x = \sum F_x$$

$$= 40 + 80\cos 30 - 60\cos 45 = 66.9$$

$$\downarrow \quad +\uparrow \quad R_y = \sum F_y$$
$$= 80\sin 30 + 50 + 60\sin 45 = 132.4$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(66.9)^2 + (132.4)^2} = 148.9$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{132.4}{148.9}$$
$$\theta = 63.2^\circ$$

لتحديد مكان نقطة تأثير R

$$\curvearrowright - \quad \curvearrowleft + \qquad \Sigma M_o = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

$$x \times 132.4 + y \times 66.9 = (80\sin 30)(7) + 50(2) + (60\cos 45)(4) + 140$$

و بوضع y = صفر نحصل على التقاطع مع محور x

$$x = 5.21$$

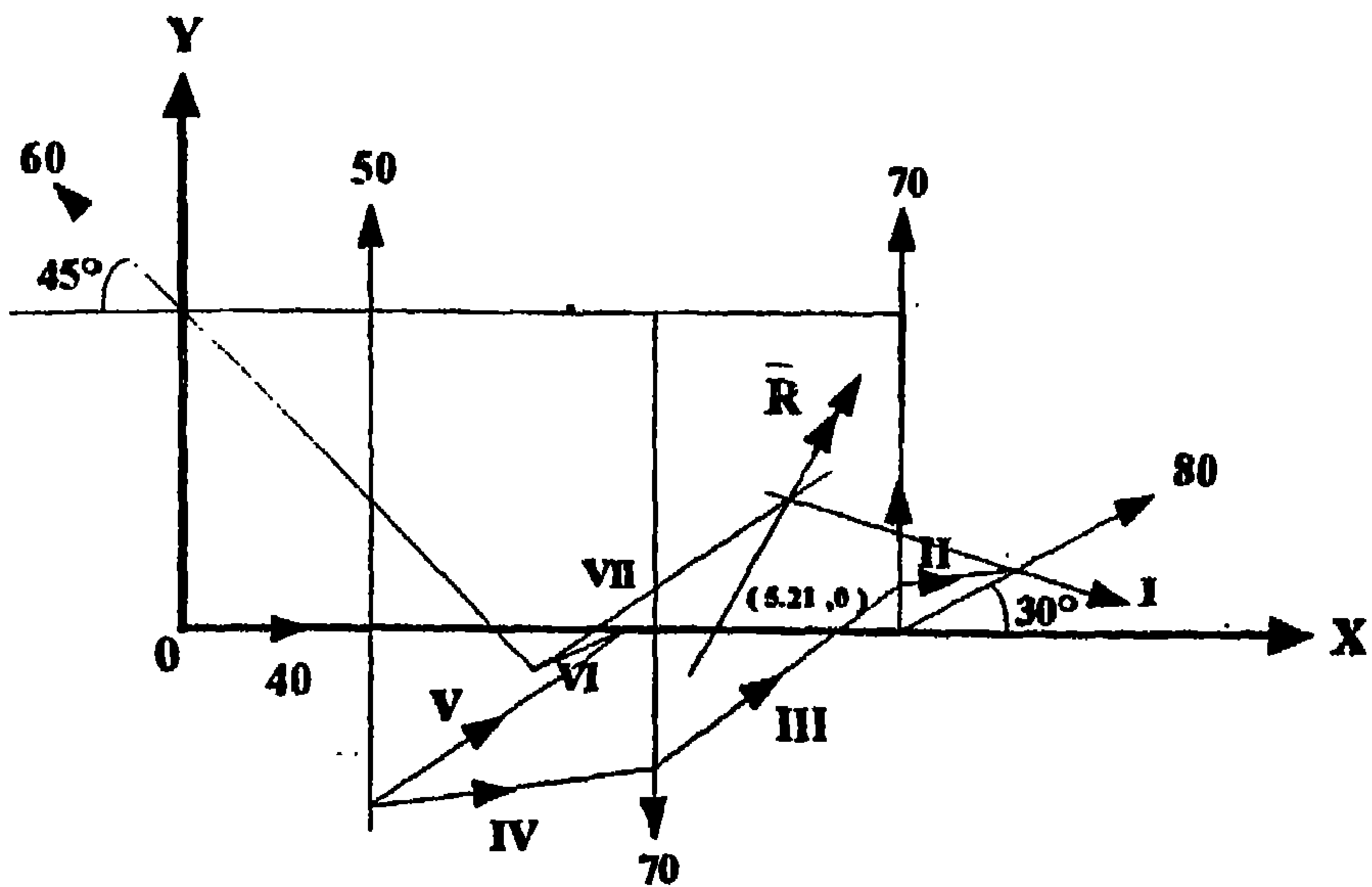
ثانياً بيانياً:

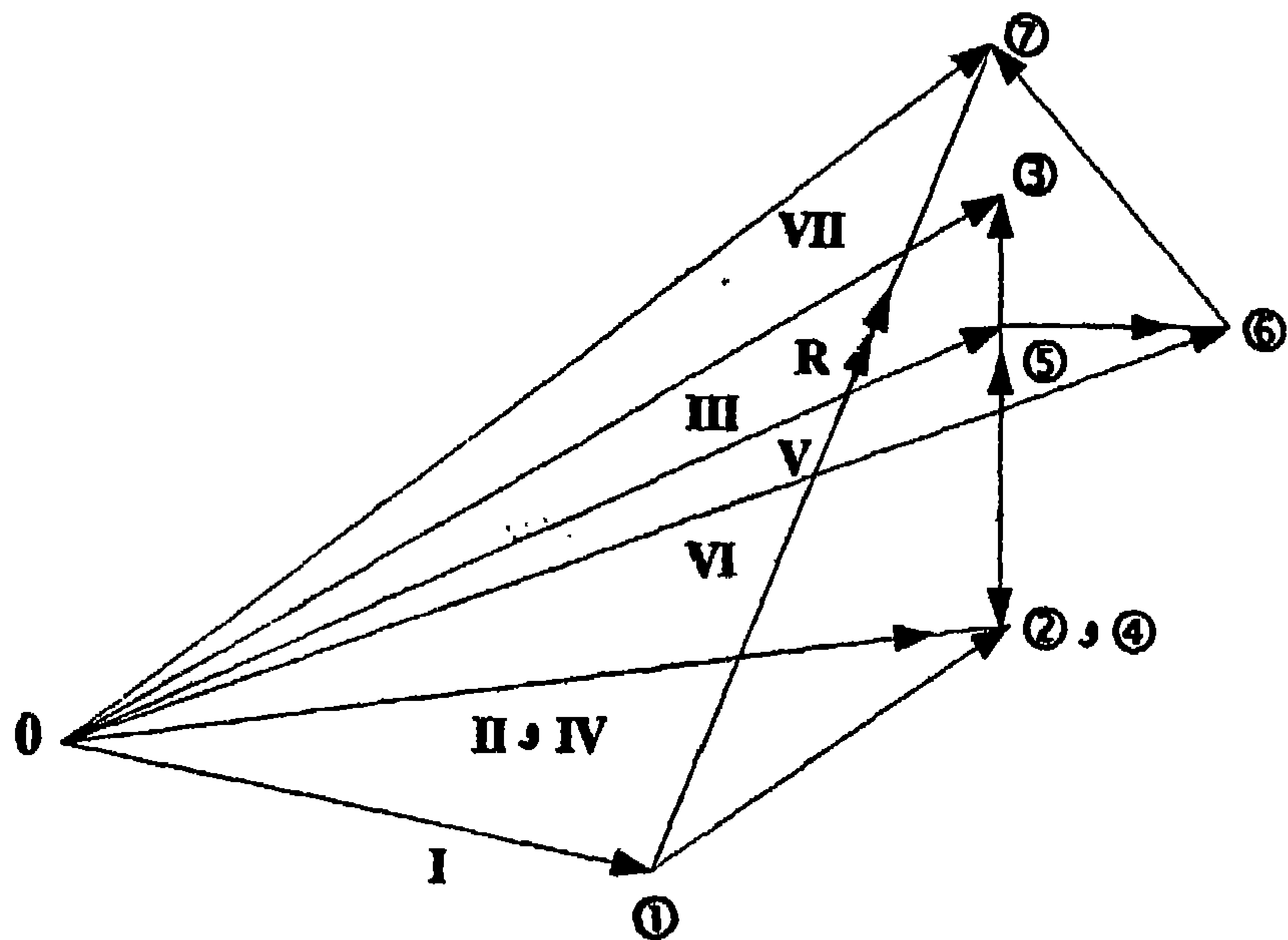
ملاحظة: في الحل بيانياً يتم تحويل عـزم الإزدواج الى قوتين بينهما مسافة معينة بحيث يكون حاصل ضرب إحدى القوتين في المسافة بينهم تساوي عزم الأزدواج.

هكذا ∵ أن هناك عزم ازدواج ١٤٠

و الذي يكافئ قوتين كل منهما ٧٠

و المسافة بينهم ٢





مقياس رسم القوى (: 1 cm = 20 N)

مقياس رسم المسافات: (1 cm = 1 m)

R = 7 .45 * 20 = 149 N

x = 5 . 2 * 1 = 5 . 2 m الجزء المقطوع من محور

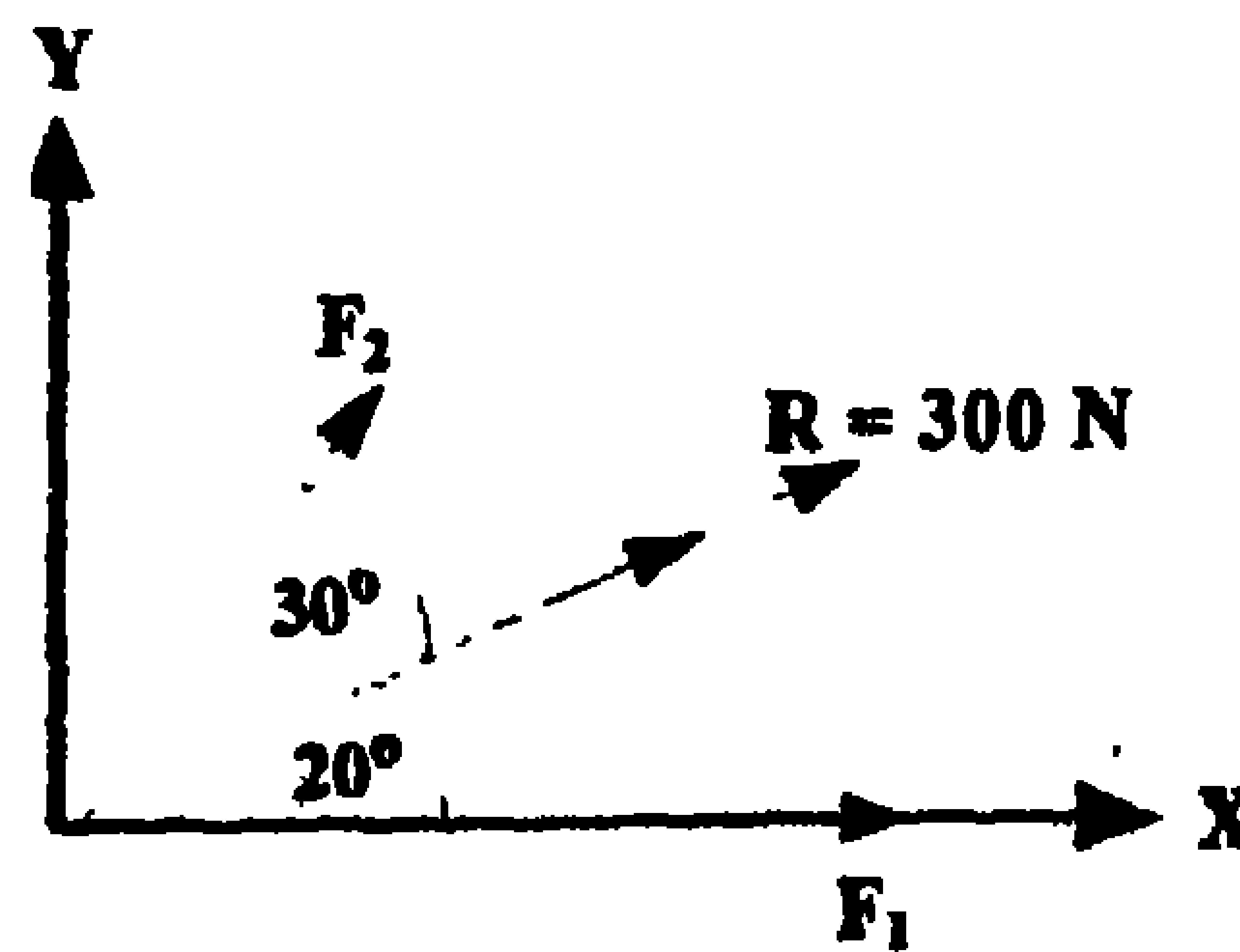
θ = 63°

أمثلة على تحليل القوى في المستوى

مثال ١٠:

حلل القوة R = ٣٠٠ نيوتن الى قوتين F_1، F_2 معلوم خطوط عملها – حل بيانياً و تحليلياً –.

الحل: تحليلياً



نختار محورين متعامدين x , y كما بالشكل

$$\sum F_x = R_x$$

$$\therefore 300\cos 20 = F_1 + F_2 \cos 50 \quad \text{.......... (1)}$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$300 \sin 20 = F_2 \sin 50 \quad \text{.......... (2)}$$

$$F_2 = \frac{300 \sin 20}{\sin 50} = 133.94 \ \ N$$

$$\therefore 300\cos 20 = F_1 + 133.94 \cos 50$$

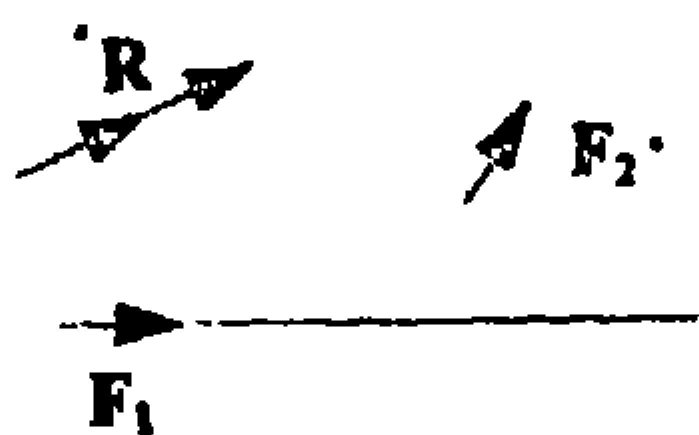
$$F_1 = 195.81 \ \ N$$

الحل: بيانياً

∵ أنه معلوم ثلاث خطوط عمل القوى.

∴ الحل بمثلث القوى.

مقياس رسم القوى: (1 cm = 50 N)



$F_1 = 3.9 * 50 = 195$ N

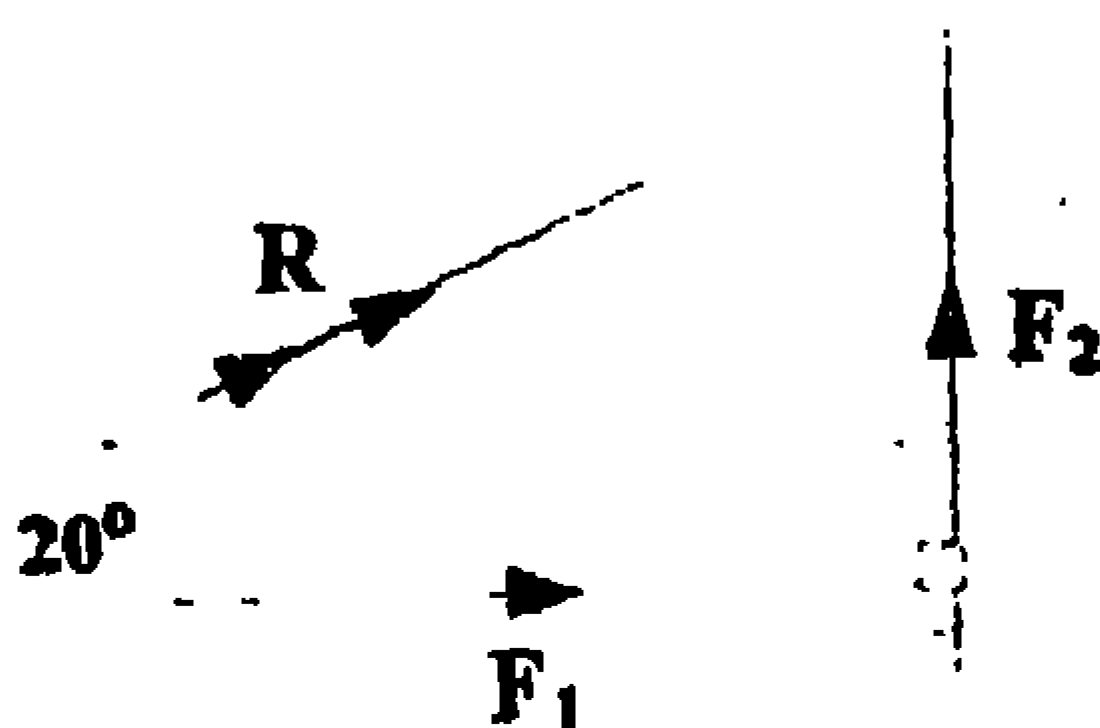
$F_2 = 2.65 * 50 = 132.5$ N

مثال ١١:

حلل القوة R = ٣٠٠ نيوتن إلى قوتين F_1، F_2 بحيث يكون F_1 معلوم خط عملها كما في الرسم F_2، تكون أقل ما يمكن حل بيانياً و تحليلياً. بحيث الزاوية بين F_1، R هي (٢٠°).

الحل بيانياً:

مقياس رسم القوى: (Force Scale: 1 cm = 50 N)

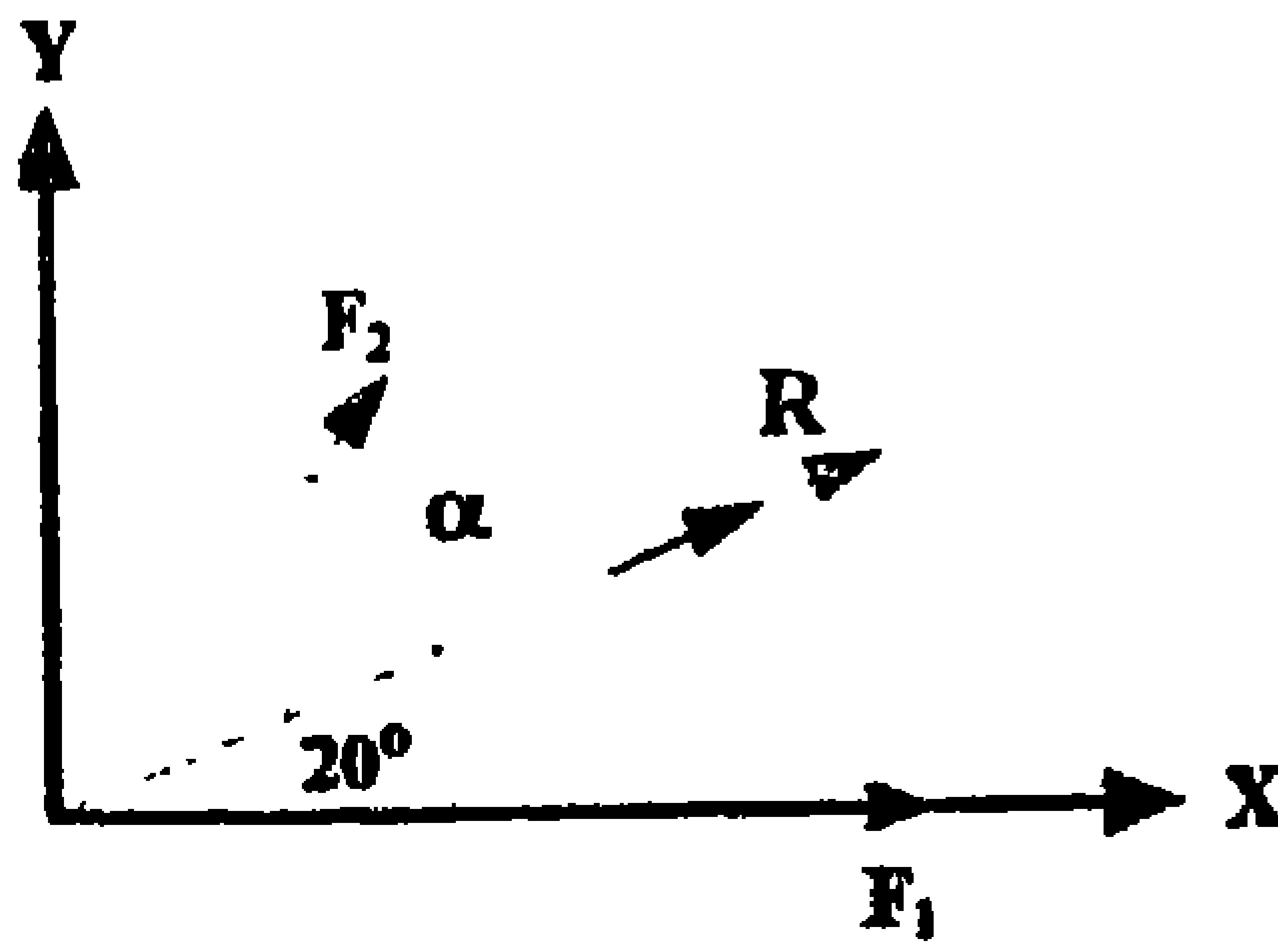


من الرسم أقل قيمة F_2 عندما تكون F_2 عمودياً على . F_1

$F_1 = 5.6 * 50 = 280$ N

$F_2 = 2 * 50 = 100$ N

الحل: تحليلياً



نختار محورين متعامدين x ، y

نفرض أن الزاوية بين F_1، F_2 هي " α ".

في أي اتجاه فإن:

$$R_x = \sum F_x$$

$$300\cos 20 = F_1 + F_2 \cos\alpha$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$300\sin 20 = F_2 \sin\alpha$$

$$F_2 = \frac{300\sin 20}{\sin\alpha}$$

F_2 تكون أقل قيمة لها عندما يكون المقام أكبر ما يمكن و ذلك عندما $\sin\alpha = 1$.

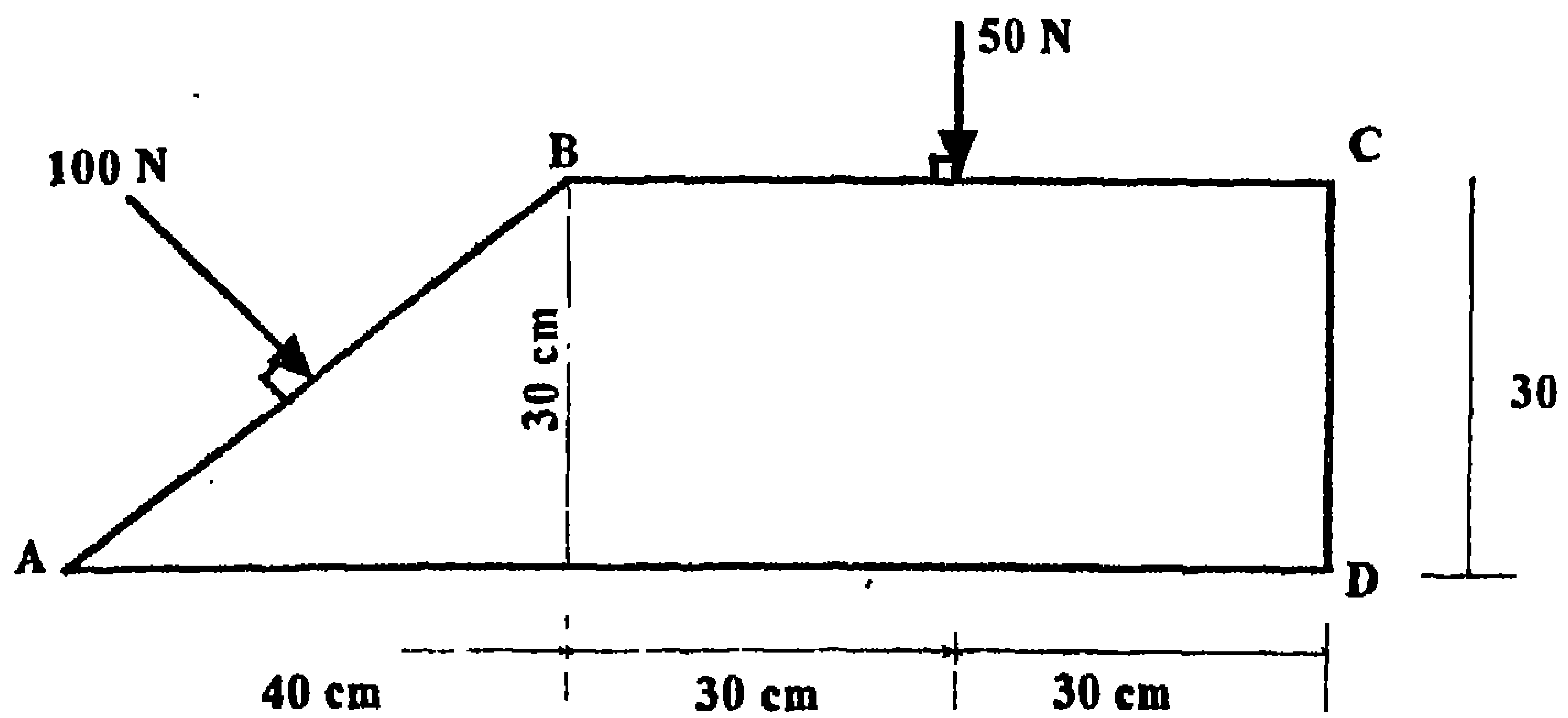
$$F_{2_{min}} = 300\sin 20 = 102.6 \quad N$$

$$\therefore \sin\alpha = 1 \qquad \therefore \alpha = 90$$

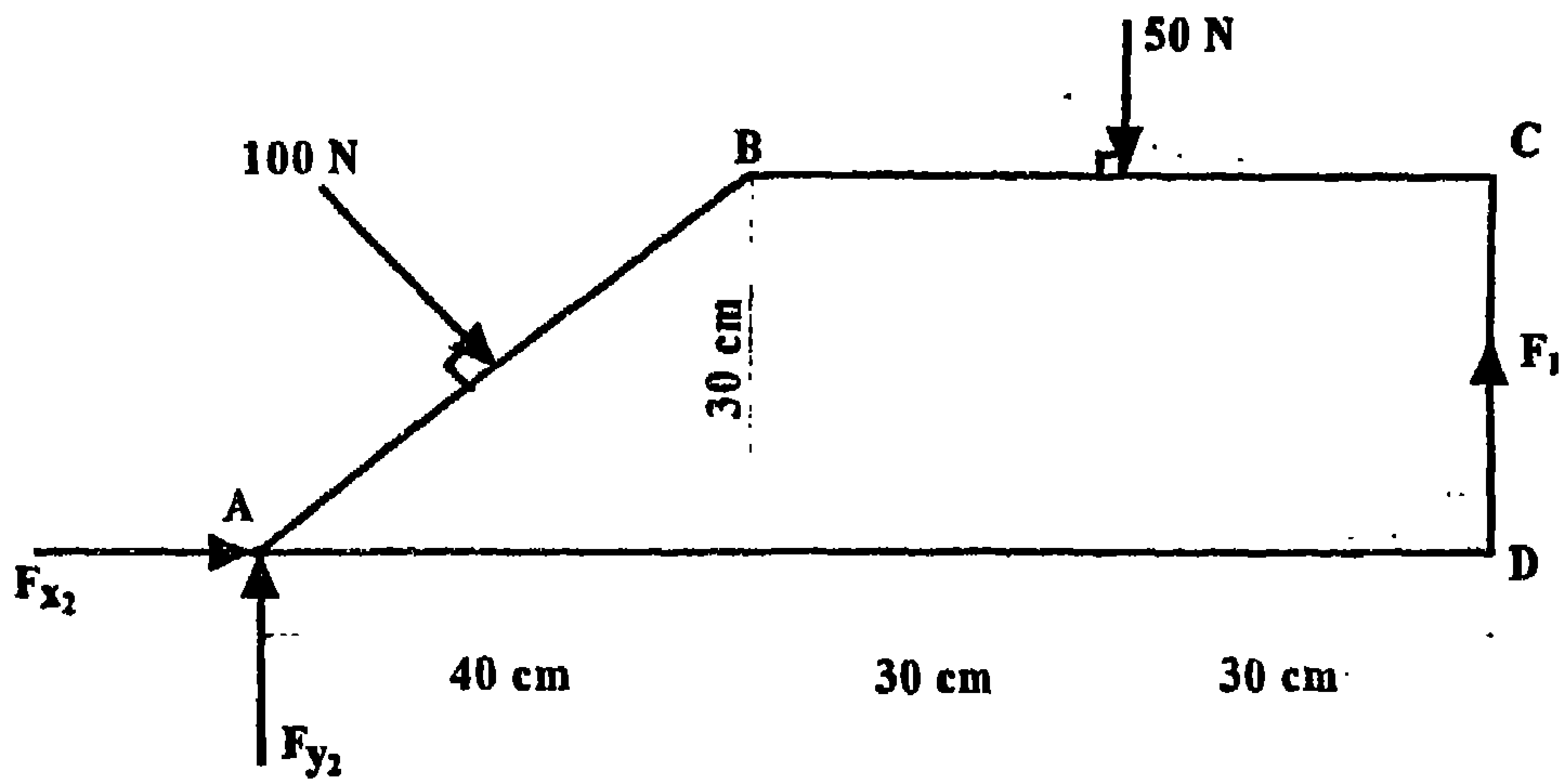
$$\therefore F_1 = 300\cos 20 = 281.9 \quad N$$

مثال ١٢:

استبدل القوى المبينة في الشكل الى قوتين F_1، F_2 بحيث F_1 ينطبق على $\overline{CD}$، F2 يمر بالنقطة A
حل بيانياً و تحليلياً.



الحل :



الحل تحليلياً:

القوى F_2 مجهولة المقدار و الإتجاه ،∴ نفرض لها المركبتين F_{x_2} و F_{y_2} و بتطبيق المعادله التاليه مع فرض اتجاه F_1 لأعلى:

$$\sum M_A = F_1(100)$$
$$= -100(25) - 50(70)$$
$$\therefore F_1 = -60 \quad N$$

(أشارة سالب تعني عكس اتجاه المفروض) أي لأسفل.

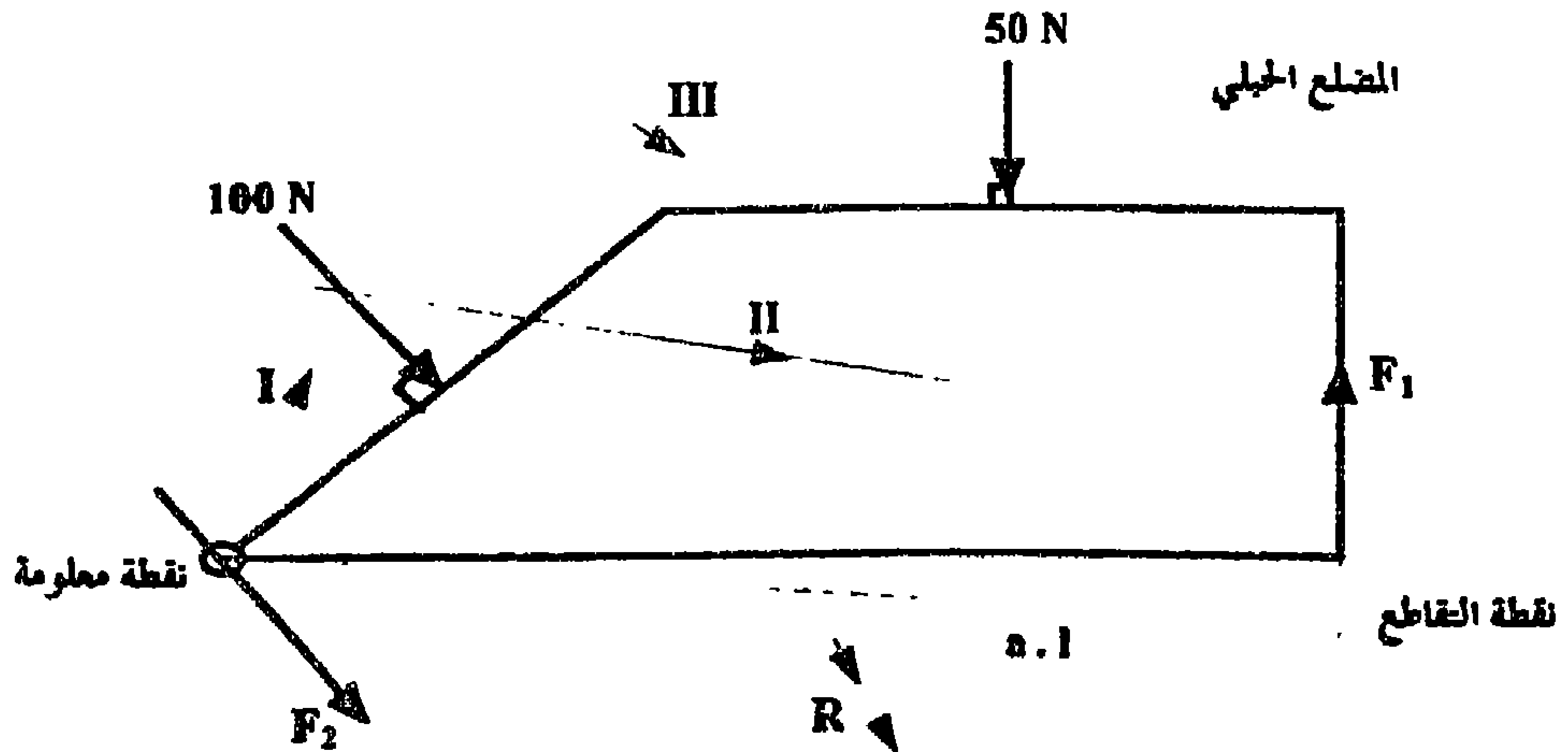
$$\sum F_x = F_{x_2}$$
$$= 100\left(\frac{30}{50}\right) = 60 \quad N$$
$$\sum F_y = F_{y_2} + F_1$$
$$= -100\left(\frac{40}{50}\right) - 50$$
$$F_{y_2} = -(-60) - 130 = -70 \quad N$$

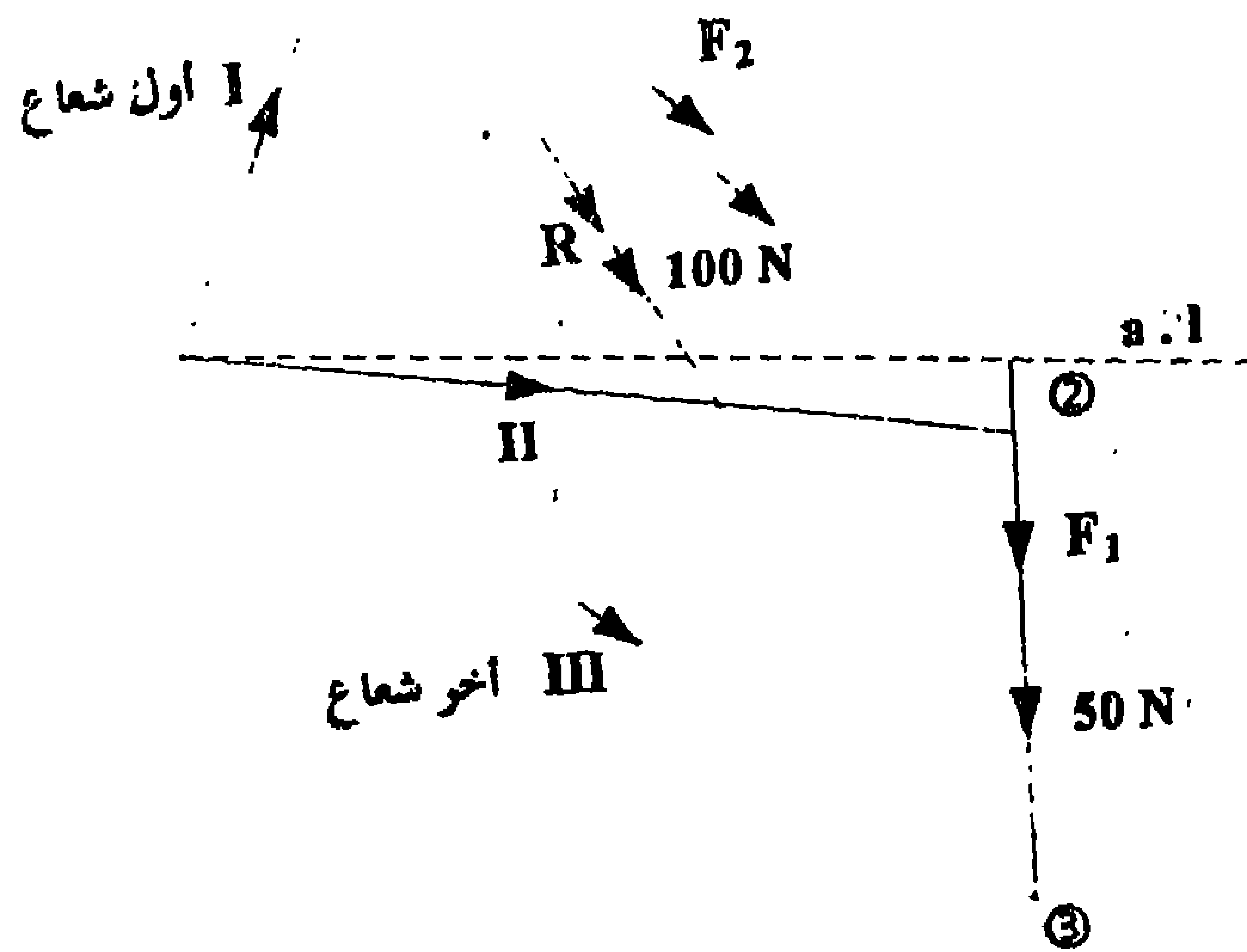
أي أن اتجاه F_{y_2} عكس الإتجاه المفروض على الرسم.

الحل بيانياً: " معلوم خط عمل و نقطة ∴ الحل بطريقة الخط القافل "

1 cm = 20 N (مقياس رسم القوى) :

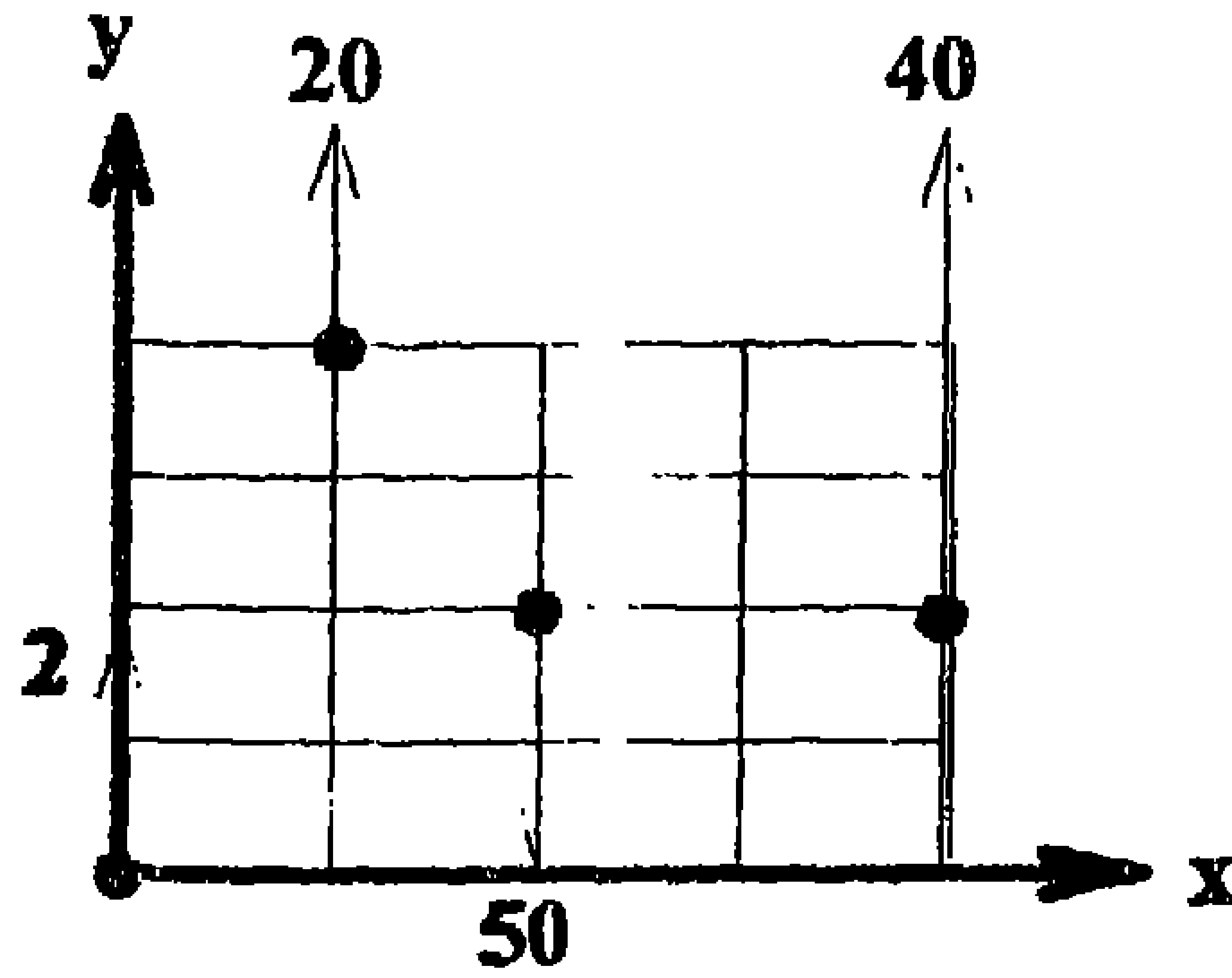
1 cm = 10 N (مقياس رسم المسافات):





$F_2 = 3\ .2 * 20 = 70$ N

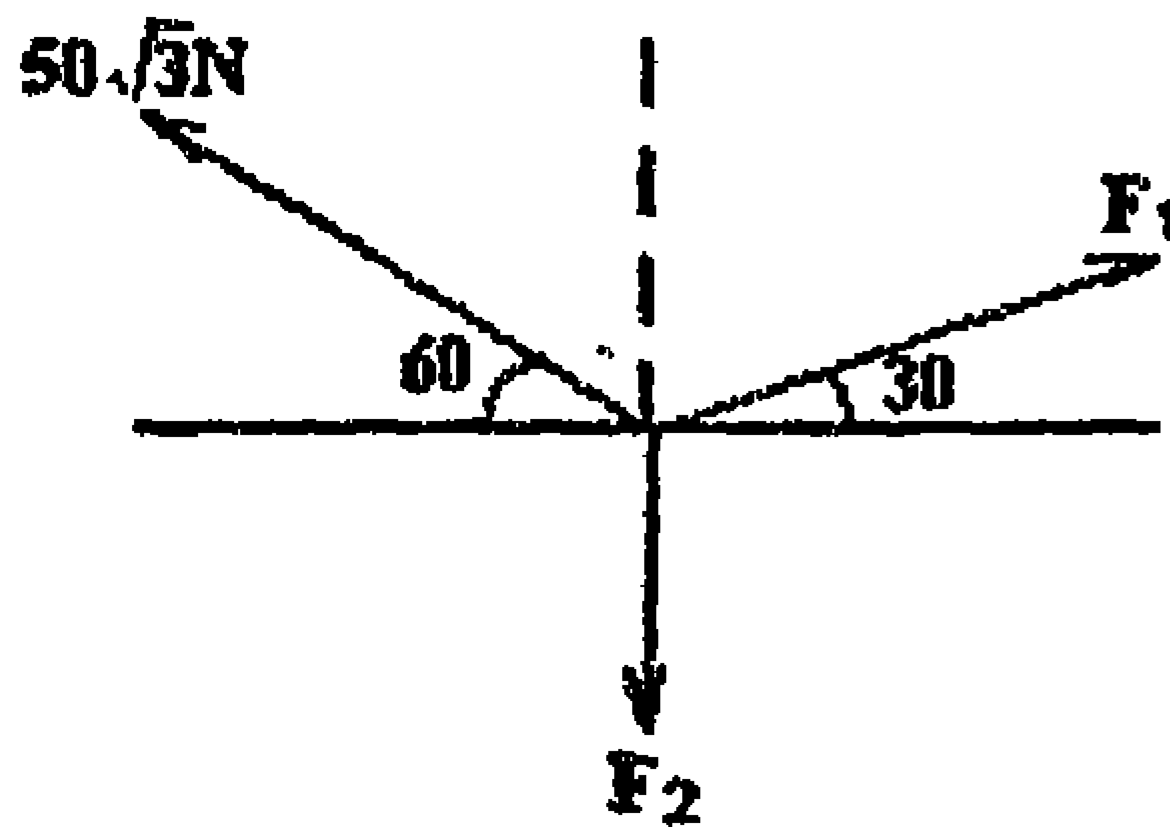
تمارين

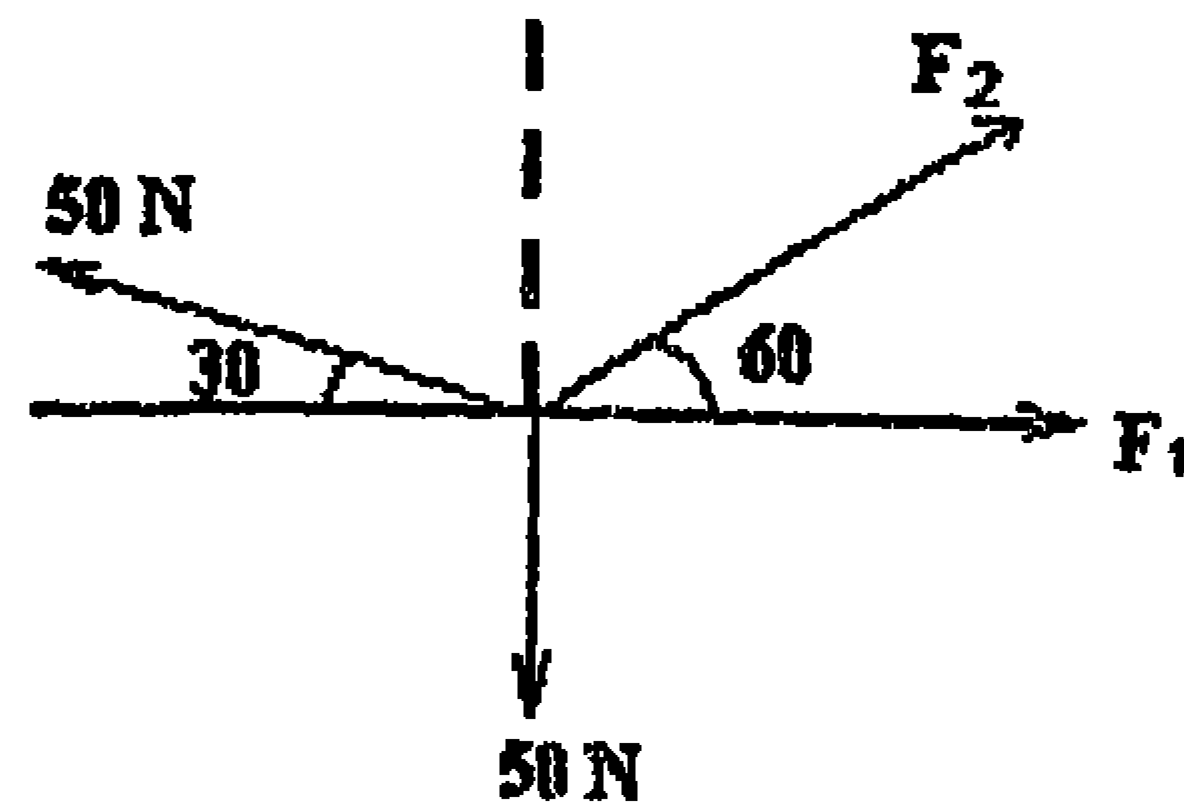


١ – عين محصلة القوى الأربع المبينه في الشكل تحليليا و بيانياً ، القوى بالكيلوجرام وطول ضلع كل من مربعات الشكل متر واحد.

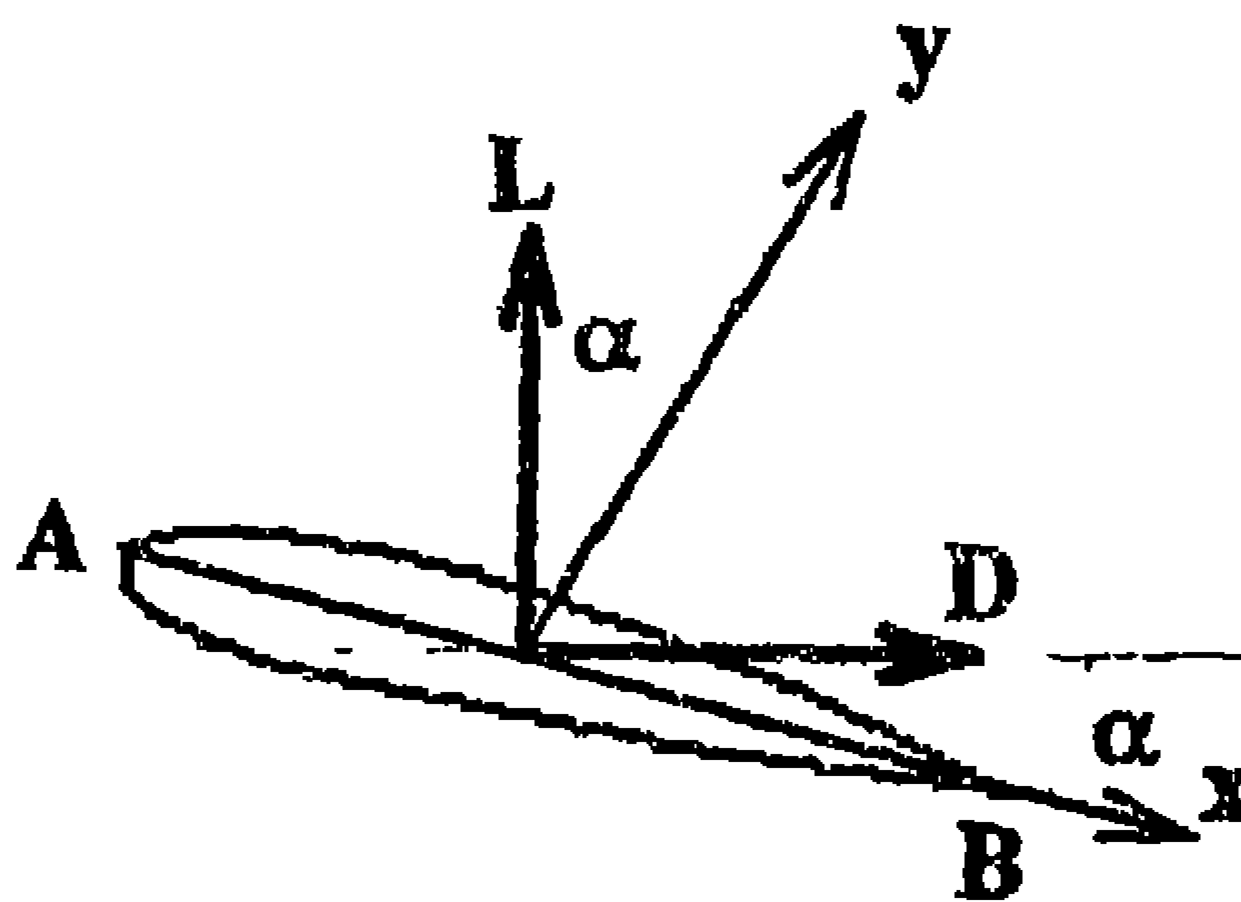
الجواب: . $(R = +35Kg , x = 2\ .29m)$

٢ – أوجد مقدار كل من القوتين F_1 ، F_2 ، إذا كانت مجموعة القوى المبينه متزنه حل بيانيا وحقق النتائج تحليليا.





الجواب: $F_1 = \frac{50}{\sqrt{3}} N$, $F_2 = \frac{50}{\sqrt{3}} N$ $\qquad$ $F_1 = 50\ N$, $F_2 = 100\ N$

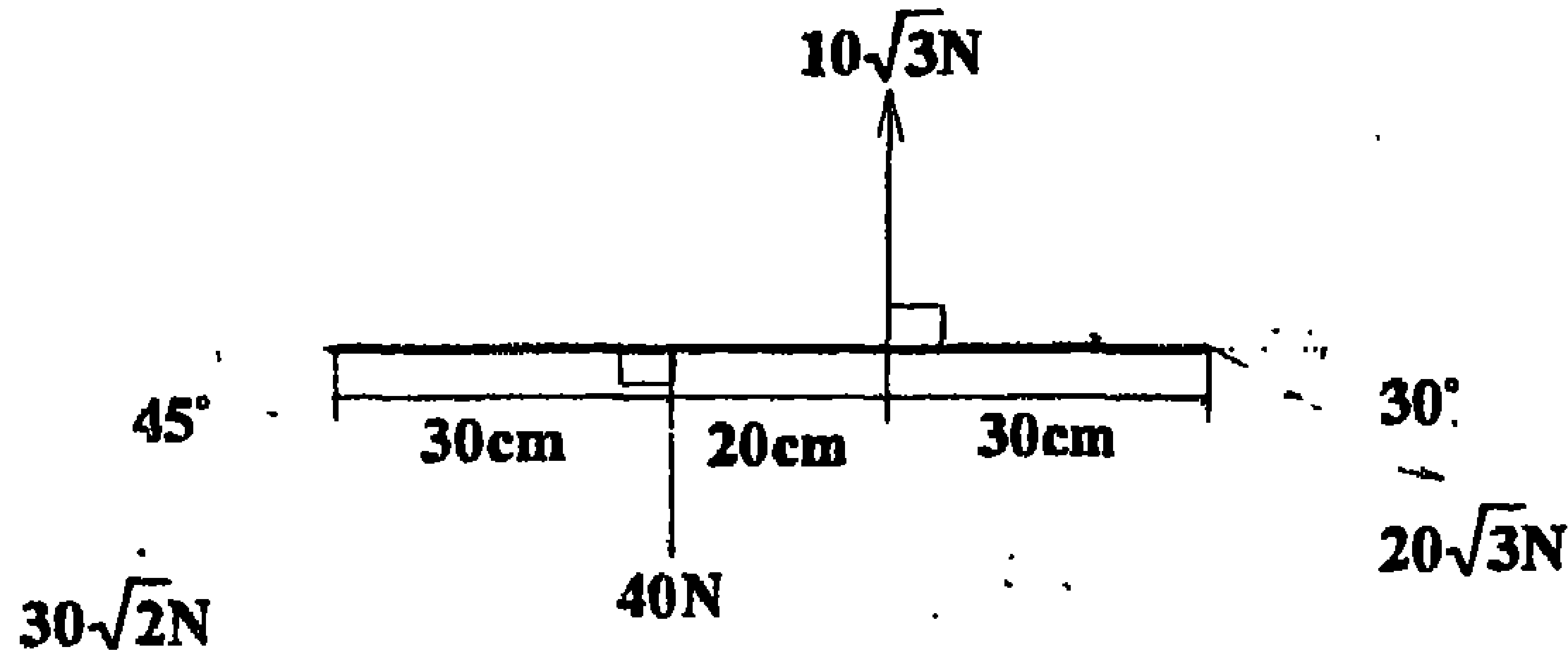


٣ – الوتر AB لجناح طائره تسير في إتجاه أفقي يميل بزاويه α مقدارها 5° على الأفقي كما في الشكل و محصلة ضغط الهواء على الجناح في هذه الأحوال تحدد بمركبتي الرفع L والسحب D حيث L تساوي ١٥٠٠نيوتن، D تساوي ٢٠٠نيوتن ،

والأولى رأسيه والثانيه أفقيه كما هو مبين بالشكل. حلل ضغط الهواء إلى مركبتين متعامدتين y , x الأولى تنطبق على الوتر AB والثانيه عموديه عليه.

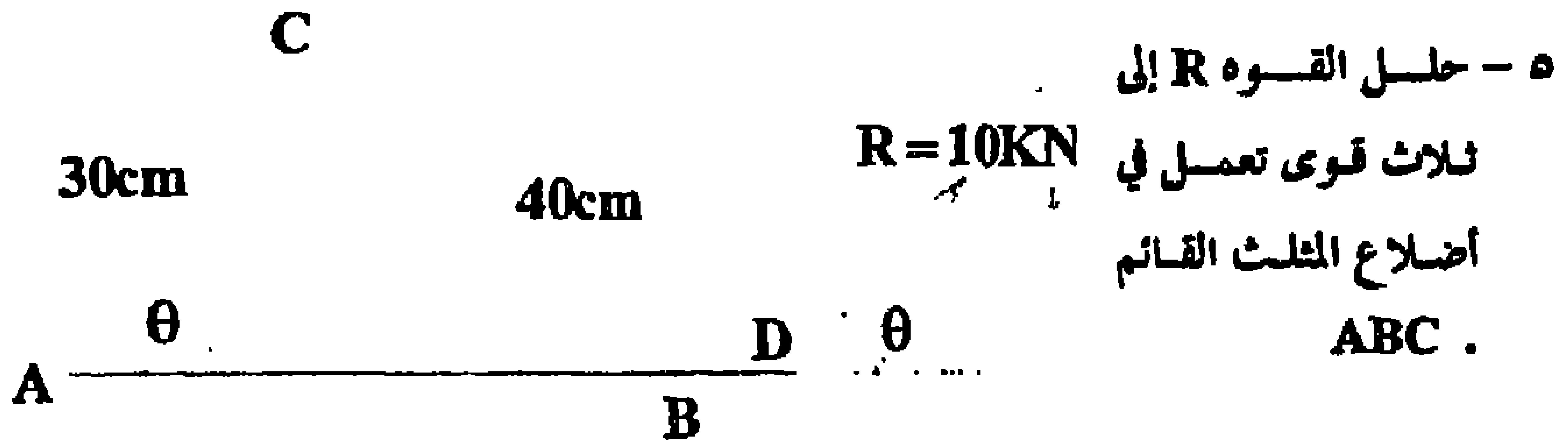
الجواب: $(X = 68.5N , Y = 1511.7N)$

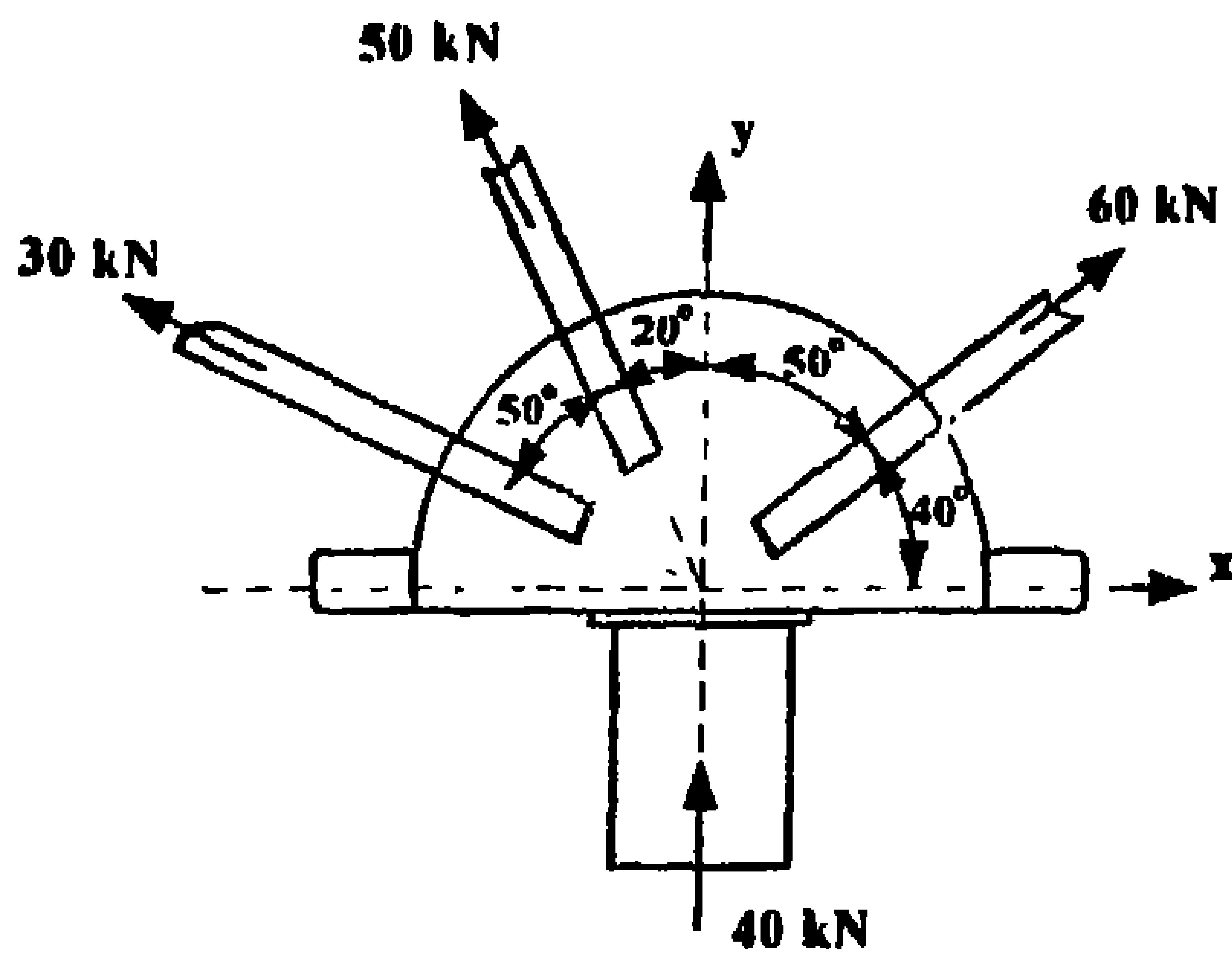
٤ – أوجد مقدار وإتجاه وخط عمل محصلة هذه المجموعه من القوى وذلك بالطريقتين البيانيه والتحليليه.



الجواب: $(R = 70N , L = 24.5cm , \theta = 90°)$

٥ – حلل القوه R إلى ثلاث قوى تعمل في أضلاع المثلث القائم ABC .

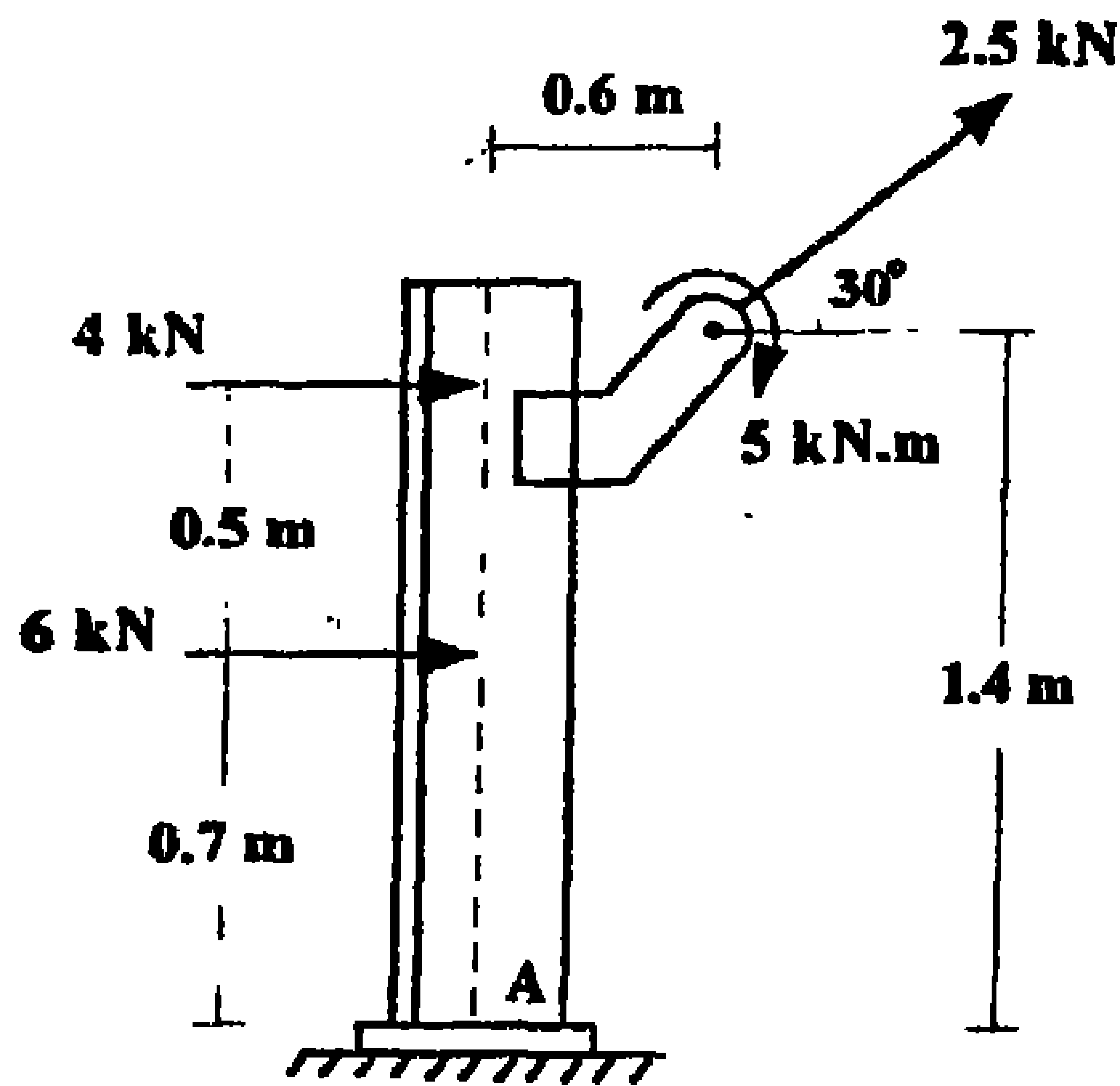




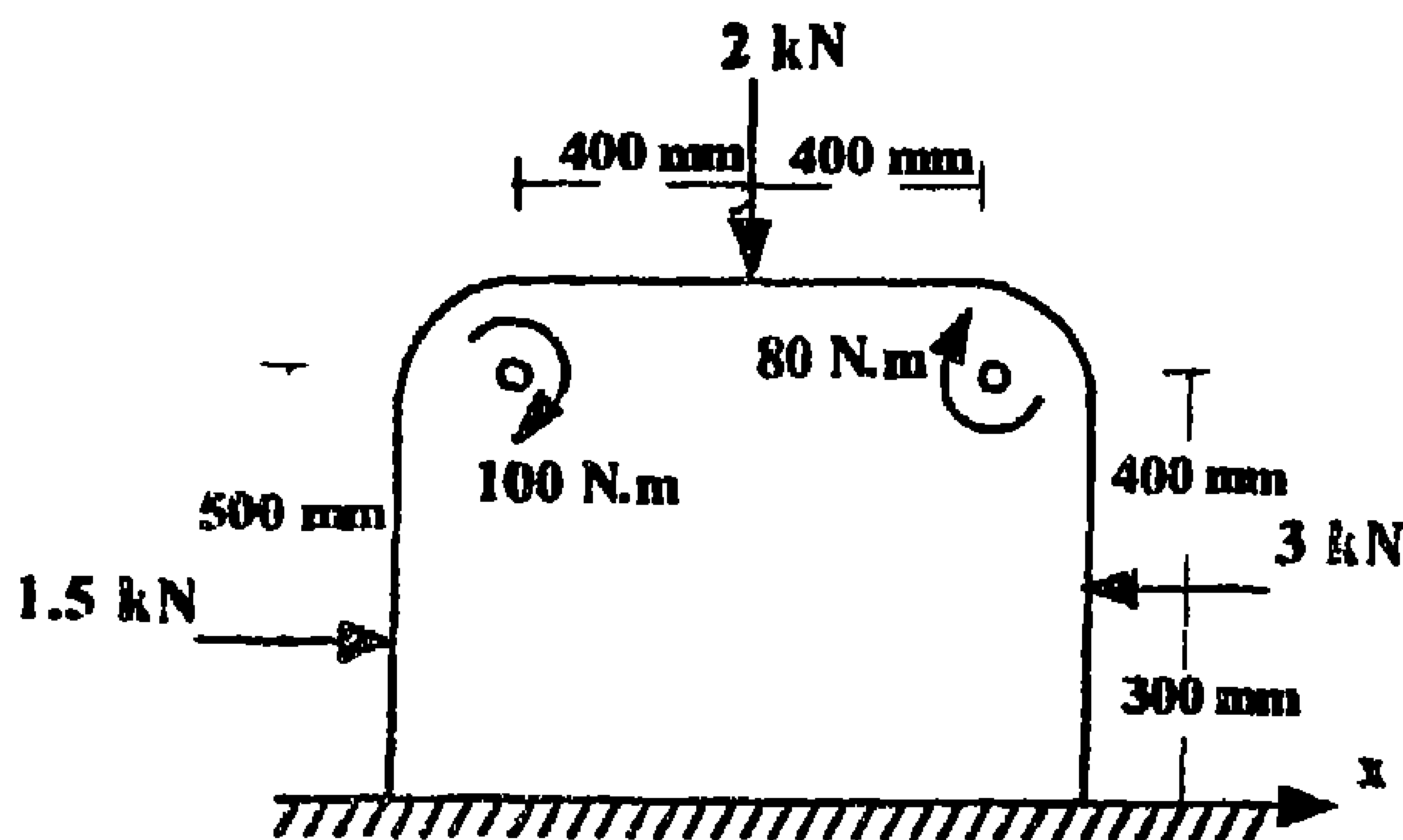
٦ – أوجد المحصلة للقوى الأربع المؤثرة على لوح التقوية كذلك أوجد قيمة الزاوية θ_x المحصورة بين المحصلة والمحور x

(الجواب: R = 54.5 KN ,

θ = 50.2°)

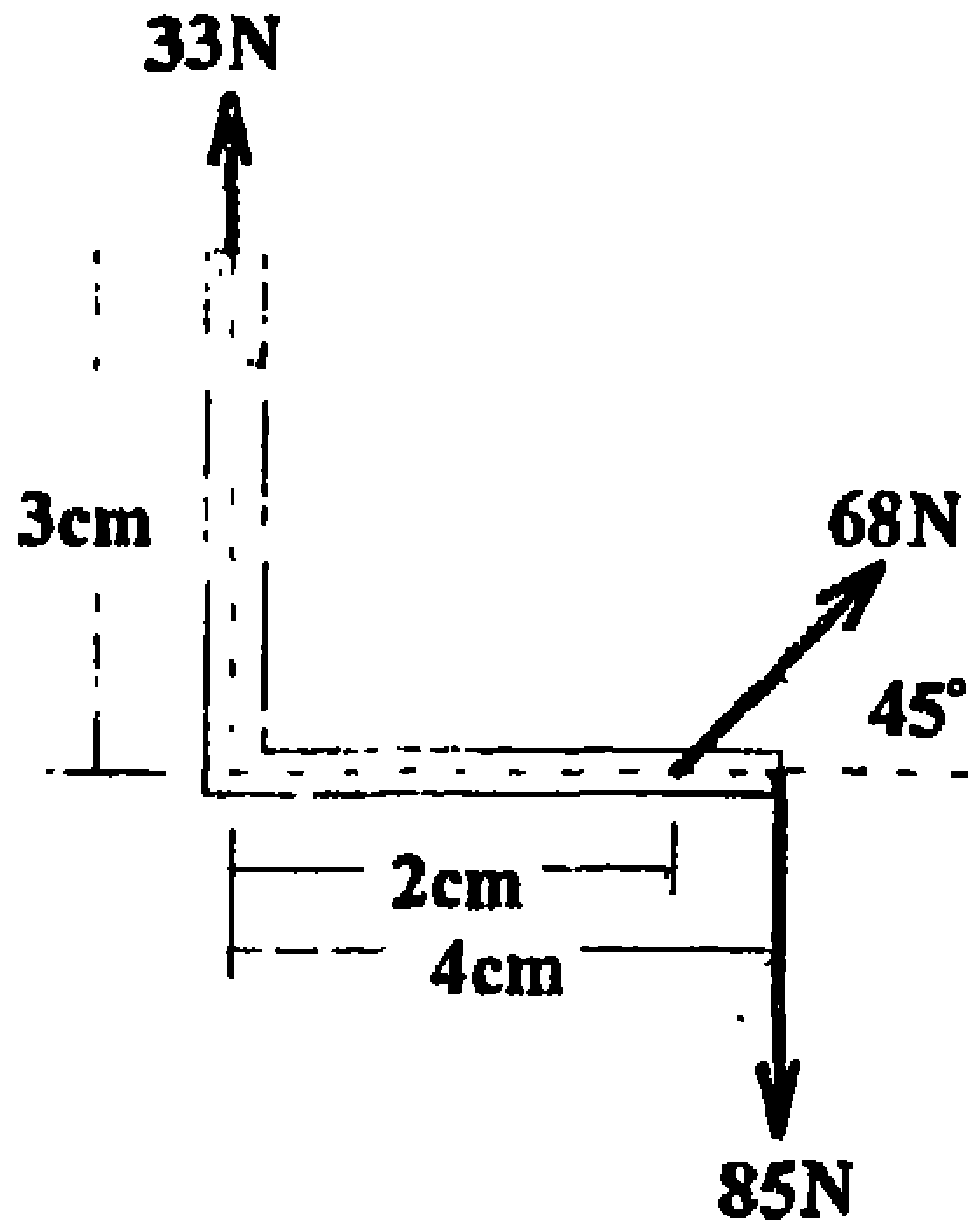


٧ – استبدل القوى الثلاث وعزم الازدواج بقوة مكافئة R تمر بـ A وعزم ازدواج M



٨ – أوجد المحصلة R للقوى الثلاثة ولعزمي الأزدواج كما هو موضح في الشكل أوجد الأحداثي x لنقطة المحصلة والمحور x.

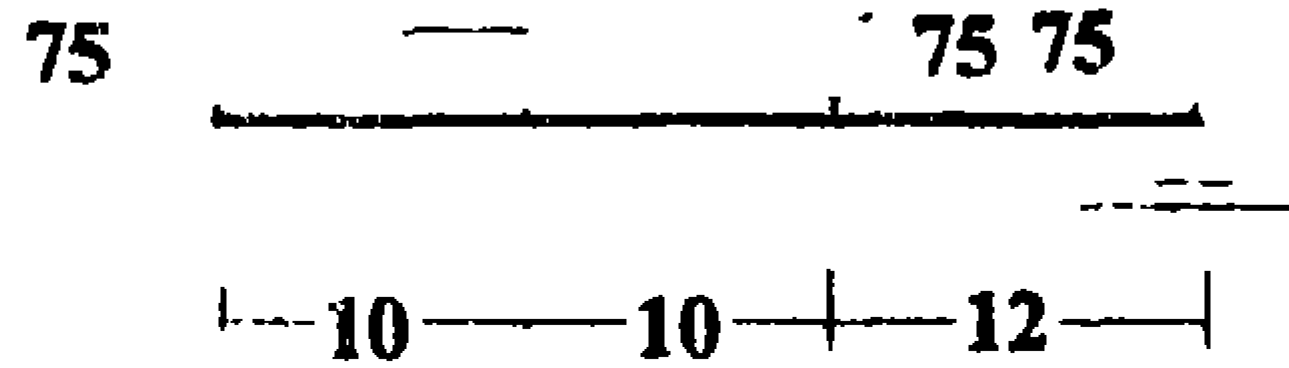
(الجواب: $R = -1.5\,i - 2\,j$ KN , $x = 290$ mm)



٩ – إختزل مجموعة القوى والازدواج المبينه في الشكل في رأسي الزاويه ، القوى بالنيوتن والأبعاد بالسنتيمتر.

الجواب: ($R_x = 48.1$ N , $R_y = -3.9$ N , $M_A = 36.2$ N·cm)

١٠ – عين بالطريقه البيانيه محصلة القوى الأربع المؤثره على العتب البسيط AB – القوى بالنيوتن والأبعاد بالسنتيمتر.



الجواب: (R = 6830) رأسيا لأسفل ، (x = 16 .8) من المفصل A

الباب الرابع

إتزان الجسيم والجسم المتماسك

أولاً : إتزان الجسيم:

يعتبر الجسيم متزن عندما يؤثر فيه مجموعة من القوى المتوازنة أي تتلاشى محصلتها. ونتيجة لأن الجسيم هو نقطة فإن القوى المؤثرة علية متلاقية فينطبق عليها شروط إتزان القوى الملتقية. والشرط البياني هو أن يكون مضلع القوى مقفلا، أما الشروط التحليلية للإتزان فهما شرطان.

$$R_x = \Sigma x = 0 \qquad \text{.......} \qquad (1)$$

$$R_y = \Sigma y = 0 \qquad \text{.......} \qquad (2)$$

والحالة الخاصة منها هي حالة ثلاث قوى يمكن إستخدام قاعدة "لامي" المعروفة كبديل للمعادلتين (1) ، (2) وهي مرادفة لقانون الجيوب.



شكل (١-٤)

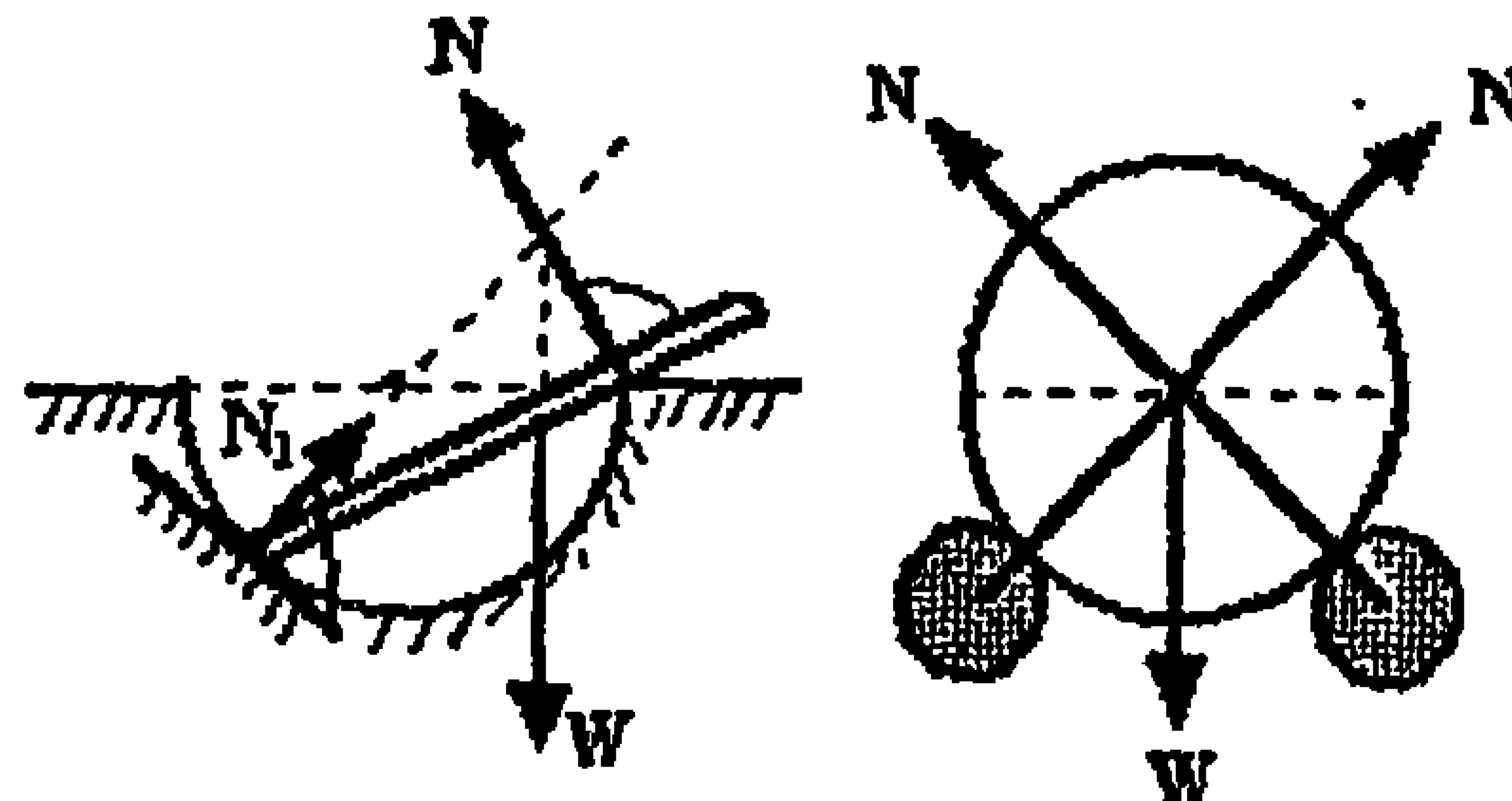
$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma}$$

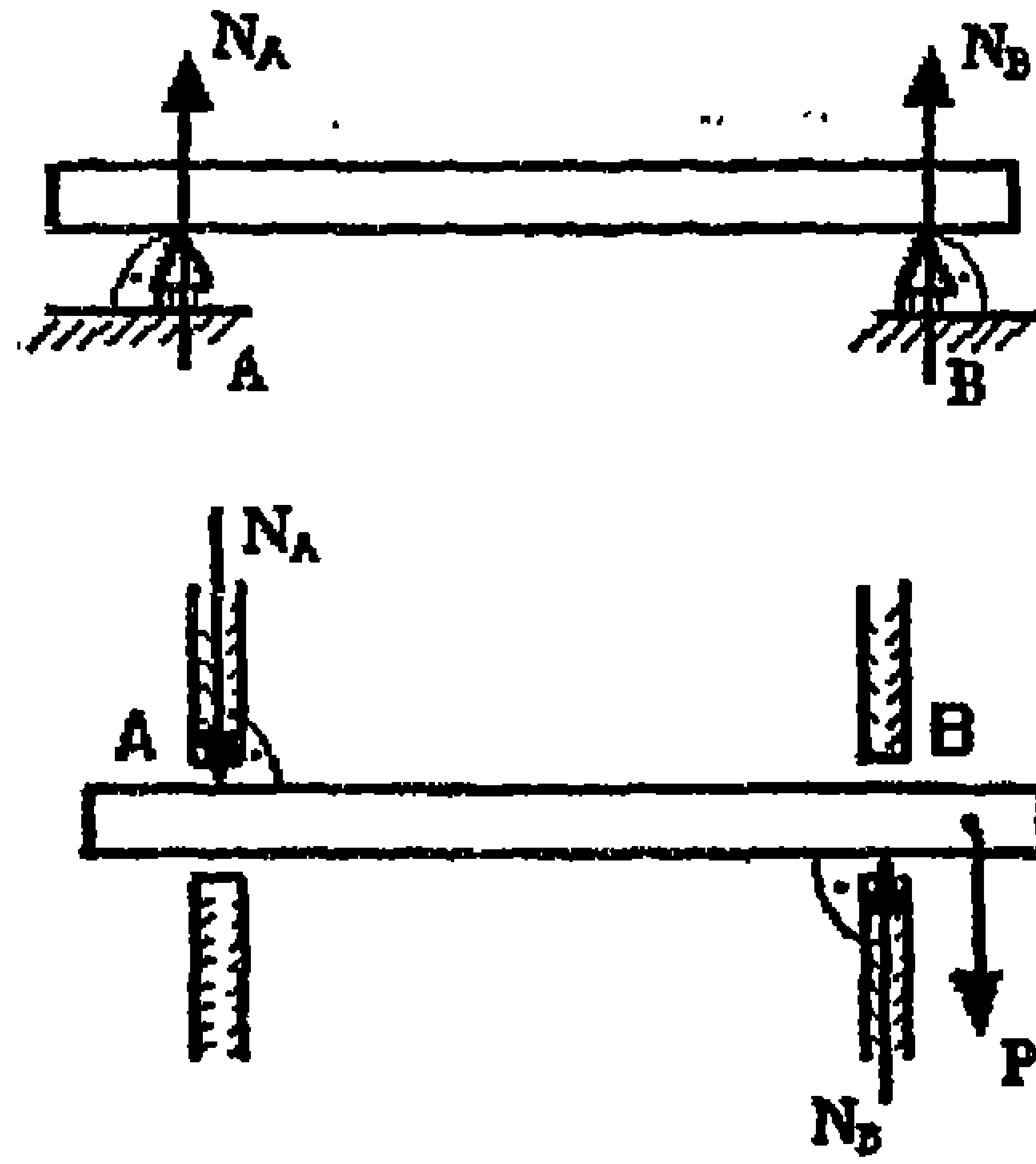
ثانياً : إتزان الجسم المتماسك:

لدراسة إتزان الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة علية وهنا يجب التمييز بين القوى العاملة (Acting Force) والقوى المعروفة بردود الفعل (Reaction) في المرتكزات. ووزن الجسم يعتبر من القوى العاملة أما ردود الفعل فتوقف على نوع الإرتكاز.

١ – الإرتكاز البسيط:

وهو أبسط أنواع الإرتكاز كحالة تماس الأجسام الملساء ورد الفعل عمودي على المستوى المماس للسطحين المتلامسين أو عمودي على إتجاه أية حركة نسبية بينهما كما في الأمثلة المبينة بشكل (٢–٤)، تستخدم البكرات كمرتكزات للكباري وهي كالتماس الأملس نظرا لصغر مقاومات التدحرج لهذه البكرات ورد الفعل عمودي على المستوى التي تتدحرج عليه هذه البكرات. ونظراً لأن إتجاه رد الفعل في المرتكز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الإتزان.





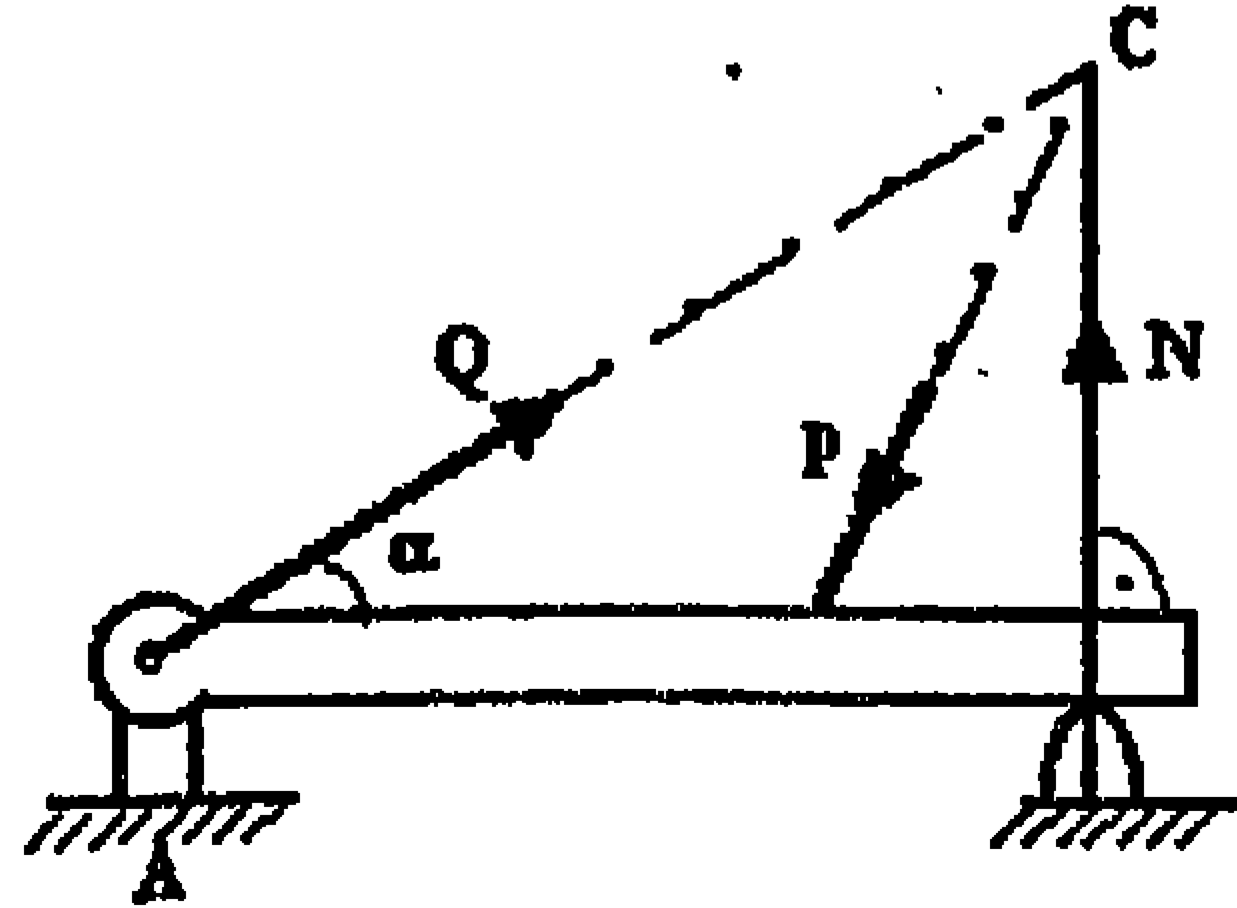
شكل (٢-٤)

٢ - الإرتكاز المفصلي:

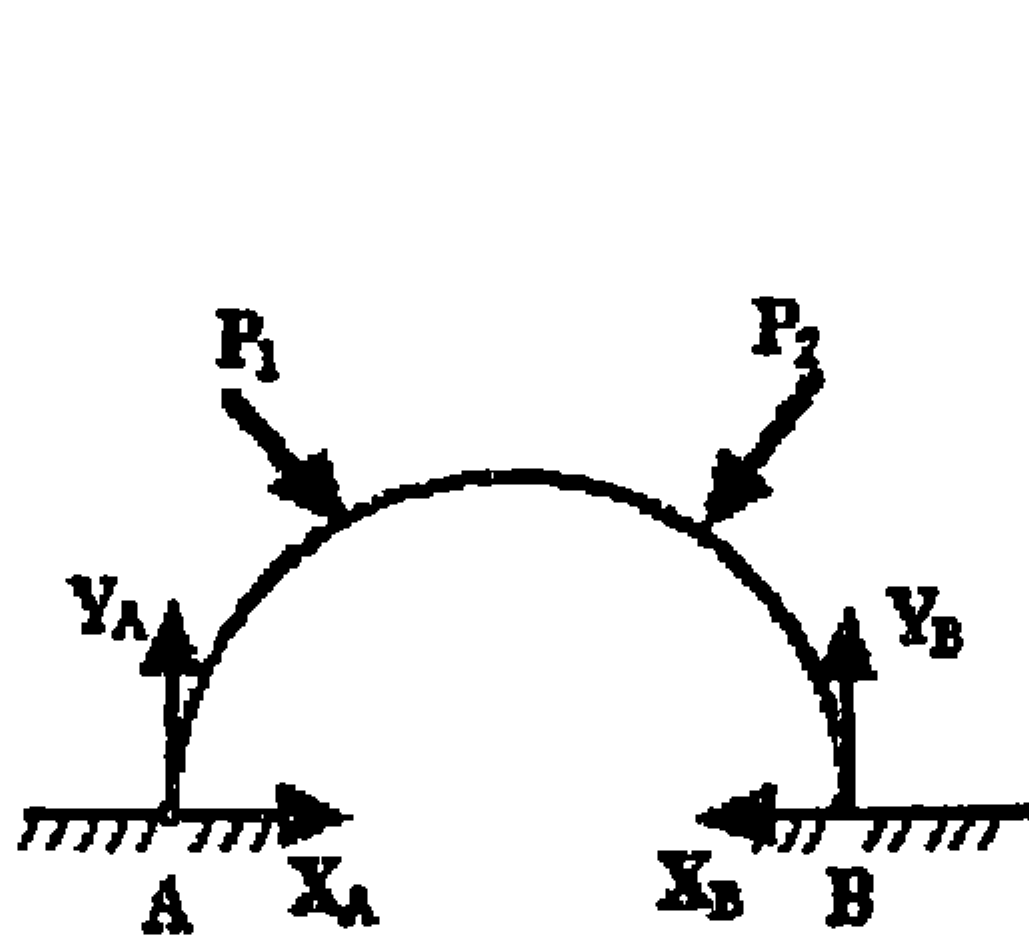
الإرتكاز المفصلي عبارة عن تثبيت نقطة من جسم بحيث يمكن أن يدور حولها. والمفصل في المستوى عبارة عن ثقب دائري بداخله مسمار أسطواني كما في شكل (٣-٤) ولما كان التلامس بين المسمار وحافة الثقب الدائري يمكن أن يتم في أي نقطة على محيط الدائرة فإن رد الفعل يمكن أن يتخذ أي إتجاه حسب ما تتطلبه ظروف التحميل والإرتكاز.

ففي شكل (٣-٤) إذا غيرنا موضع P أو اتجاهها يتغير مقدار واتجاه رد الفعل Q في المفصل A بحيث يتم الإتزان بتلاقي القوى الثلاث P ، N ، Q في نقطة واحدة. وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مقداره وميله أو مركبتيه المتعامدتين Q_x ، Q_y .

ويلاحظ أن حمل جسم على مرتكز بسيط من ناحية ومرتكز مفصلي من ناحية أخرى ينطوي على ٣ قيم مجهولة لردي فعل المرتكزين (إثنان في المفصل وواحد في المرتكز البسيط) مما يجعل إتزان الجسم محدداً إستاتيكياً لأن معادلات الإتزان الثلاث تكفي لتحديد المجاهيل الثلاثة كما في شكل (٣-٤أ).



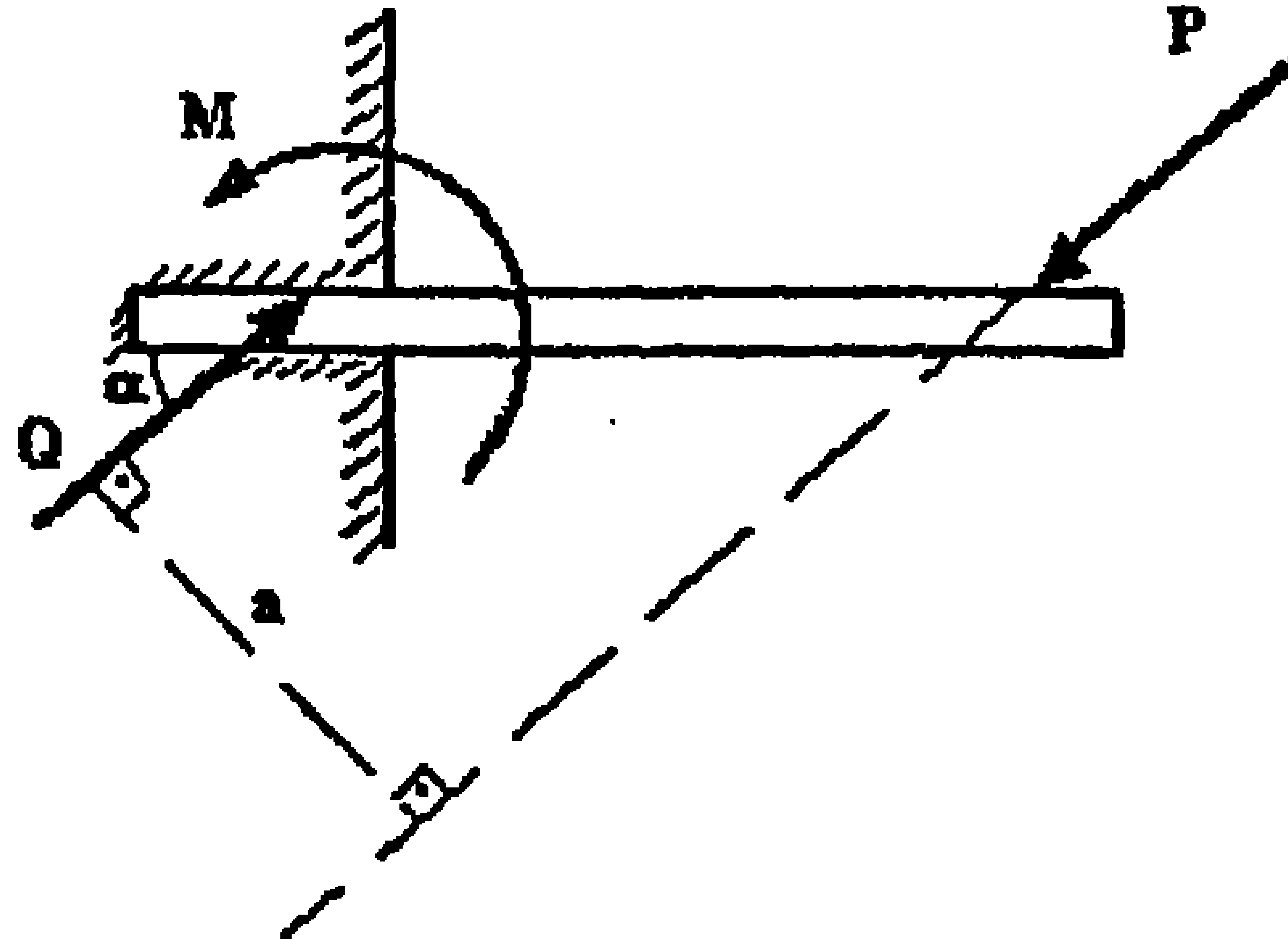
شكل (٣-٤أ)



شكل (٣-٤ب)

أما الجسم المحمول على مفصلين كما في شكل (٣-٤ب) فهو غير محدد إستاتيكياً لأن معادلات الإتزان الثلاث لا تكفي لتحديد المجاهيل الأربعة X_A, Y_A, X_B, Y_B الناشئة في المفصلين ولا بد من الإستعانة بنظريات المرونة لحل مثل هذه المسألة وهذا يخرج عن نطاق هذا الكتاب.

٣ – التثبيت:



شكل (٤-٤)

يعطي شكل (٤ – ٤) فكرة عن التثبيت وهو منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً عند أحد أطـراف الجسم فتتولد قوى حول هذا الجزء المثبت تتوازن مع محصلة القـوى العاملـة P ويمكـن إختزال رد فعل نقطة التثبيت إلى قوى Q وعزم دوران M وهما معاً يعادلان قوة تساوي وتضاد محصلـة القـوى العاملة P فإذا غيرنا مقدارا أو موضع P يتغير مقدار واتجاه Q ومقدار M تبعاً لشروط التوازن في كل حالة.

وعلى هذا يتألف رد فعل التثبيـت من مجاهيل ثلاثة هي مقدار واتجاه Q وعـزم التثبيـت M أو Q_x, Q_y, M.

ثالثا : شروط إتزان الجسم المتماسك:

لدراسة إتزان الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة وهي القوى العاملة وردود الفعل المجهولة في المرتكزات كما سبق شرحه في البند السابق. وتمثل القوى المؤثرة على جسم متماسـك بصفـة عامة حالة القوى المتفرقة التي سبق بيان عملياتها.

ويتزن الجسم المتماسك بتلاشي محصلة مجموعة القوى المتفرقة المؤثرة عليه ويلزم لذلك من الشروط ما يلي حسب ما سبق شرحه في الباب السابق.

(أولاً) بيانياً:

يلزم شرطان هما: ١ – مضلع القوى مقفل.

٢ – المضلع الحبلي مقفل.

(ثانياً) تحليلياً:

يلزم ٣ شروط هي :

$$R_x = \sum X = 0 \qquad (4)$$
$$R_y = \sum Y = 0 \qquad (5)$$
$$\sum M_A = 0 \qquad (6)$$

وذلك بالتحليل في اتجاهين متعامدين x ، y وأخذ العزوم حول نقطة ما A. هذا ويمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بأخذ العزوم حول ٣ نقط ليست على استقامة واحدة.

$$\sum M_A = 0 \qquad (7)$$
$$\sum M_B = 0 \qquad (8)$$
$$\sum M_C = 0 \qquad (9)$$

وشرط اختيار النقط A ، B ، C بحيث لا تقع على استقامة واحدة ضروري لأنه قد تكون هناك محصلة وقد تقع نقطتان مثل A ، B عليهما مصادفة فيتلاشى العزم حولهما تلقائياً فإذا تلاشى العزم حول نقطة خارجة C كان ذلك دليلاً على تلاشي المحصلة ذاتها.

كما يمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بتحليل واحد في اتجاه ء مثلاً وأخذ العزوم حول نقطتين A ، B بحيث لا يتعامد x على AB لأنه قد تكون هناك محصلة مطابقة للخط AB مصادفة فيتلاشى عزمها حول كل من A ، B تلقائيا كما تتلاشى مركبتها في اتجاه x في حالة التعامد تلقائياً كذلك.

وعدد الشروط التحليلية للاتزان ثلاثة وأية معادلة أخرى لا تأتي بجديد. وهذه الشروط الثلاثة لازمة وكافية.

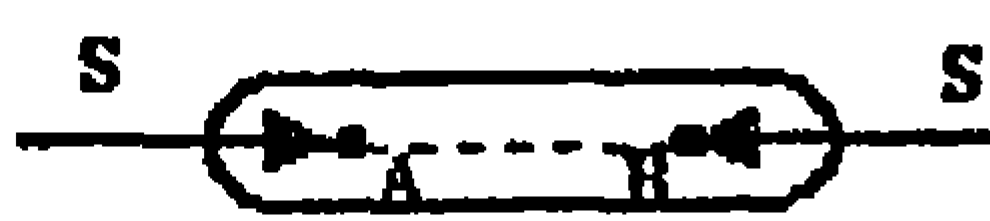
لازمة بمعنى أنه إذا كان الجسم المتماسك متزناً فلا بد من تحققها أي من تلاشي المحصلة. وكافية بمعنى أنه إذا توفرت هذه الشروط أي تلاشت المحصلة فإن الجسم يكون متزناً.

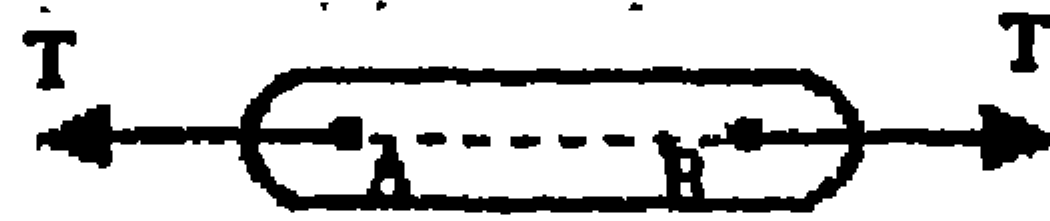
وفي الحالة الخاصة كحالة القوى الملتقية يؤول عدد الشروط إلى اثنين كما سبق شرحه. وكذلك في حالة القوى المتوازية يصير عدد الشروط إثنين فقط لأن معادلة التحليل في اتجاه عمودي على القوى المتوازية تكون غير ذات موضوع في هذه الحالة.

وإذا اقتصرت القوى المؤثرة على جسم متماسك متزن على ٣ قوى فقط وجب أن تلتقي في نقطة واحدة وأن يعطى تحليلها في إتجاهين متعامدين.

رابعاً : السواند والشدّادات:

إذا اتزن الجسم تحت تأثير قوتين فقط كل منهما تؤثر في نقطة ما من الجسم فإن القوتين تعملان على خط عمل واحد وهو الخط الواصل بين نقطتين تأثير القوتين كما يتساوى مقدارا القوتين ويتضاد إتجاههما كما في الشكل (٥-٤ أ،ب).





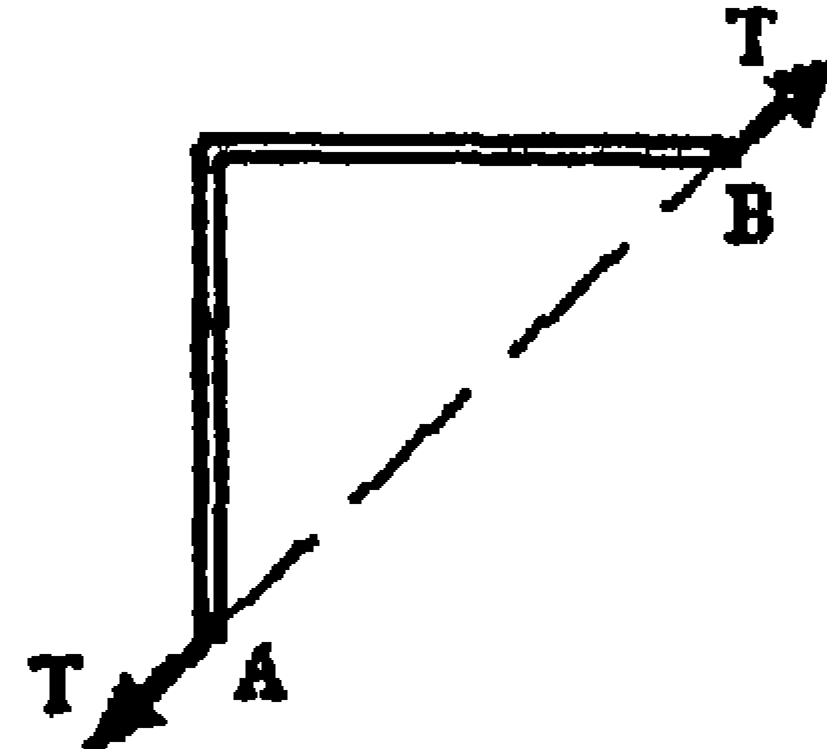
شكل (٥-٤ب) شكل (٥-٤أ)

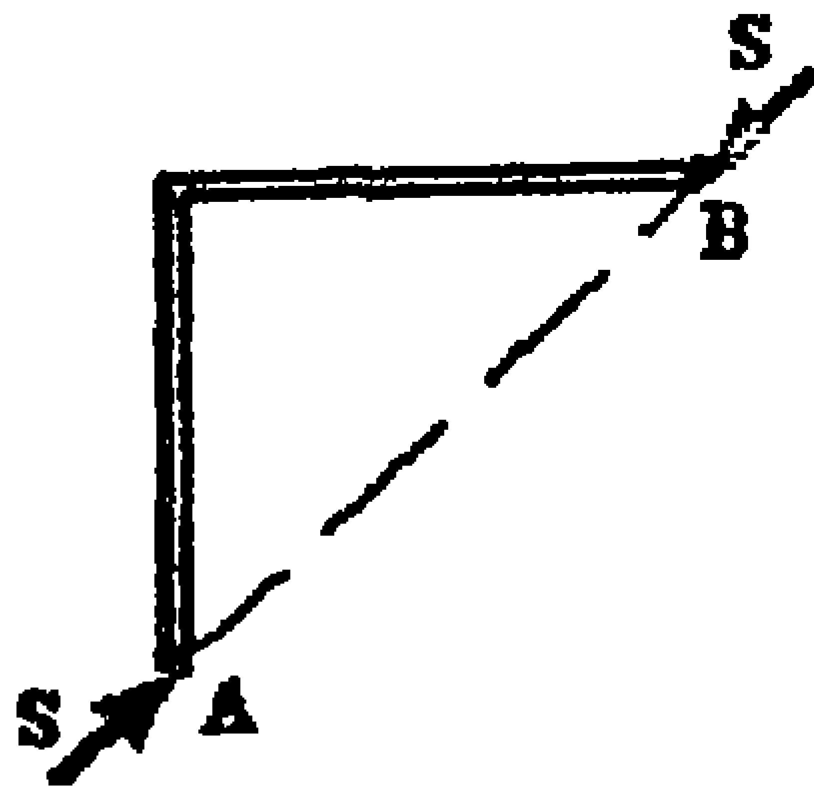
وقد يتخذ الجسم المتماسك شكل قضيب خفيف ينتهي عند كل من طرفيه بمفصل، فإذا لم يؤثر أي حمل (أو قوة) على القضيب بين مفصليه أطلق عيه قضيب خفيف غير محمل فإذا اتزن القضيب في هذه الحاله فإنه يتزن تحت تأثير ردي الفعل عند مفصلين، وعلى ذلك تظهر ردود الأفعال على شكل زوج من القوى المتساوية وخط عملها هو الخط الواصل بين مفصلين (محور القضيب) كما في الشكل (٦-٤).





قضيب خفيف غير محمل







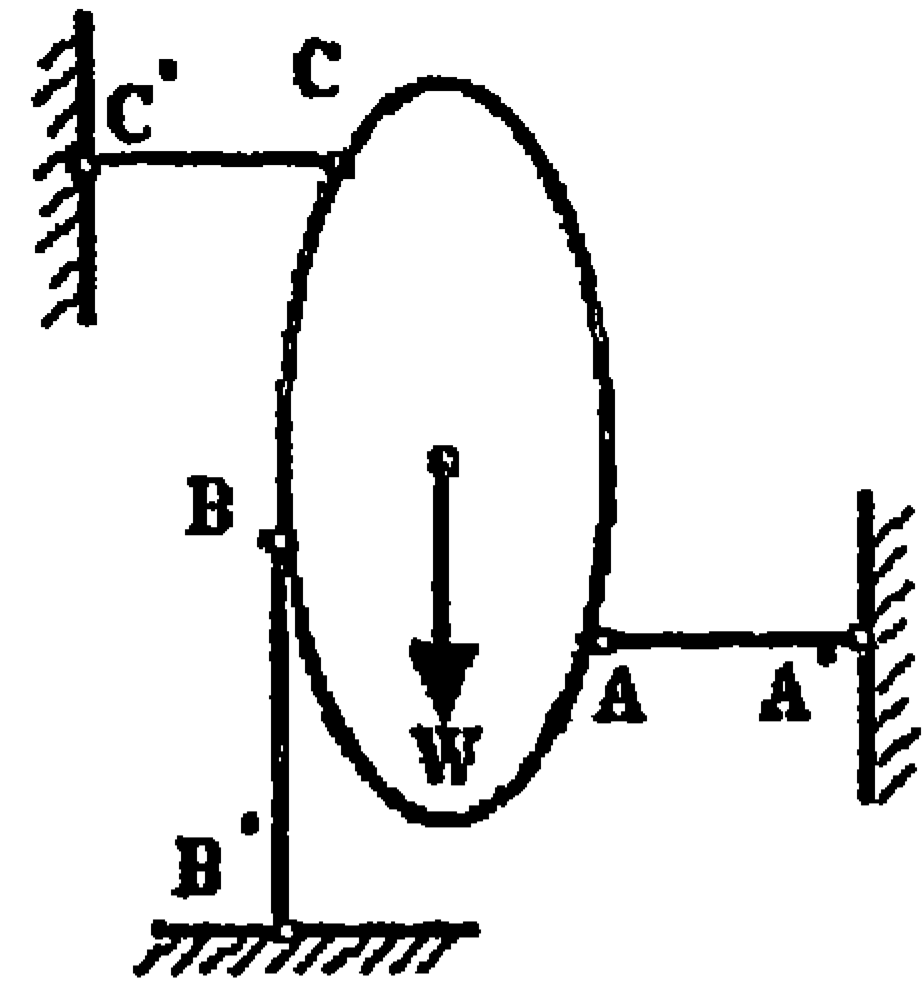


شدادات

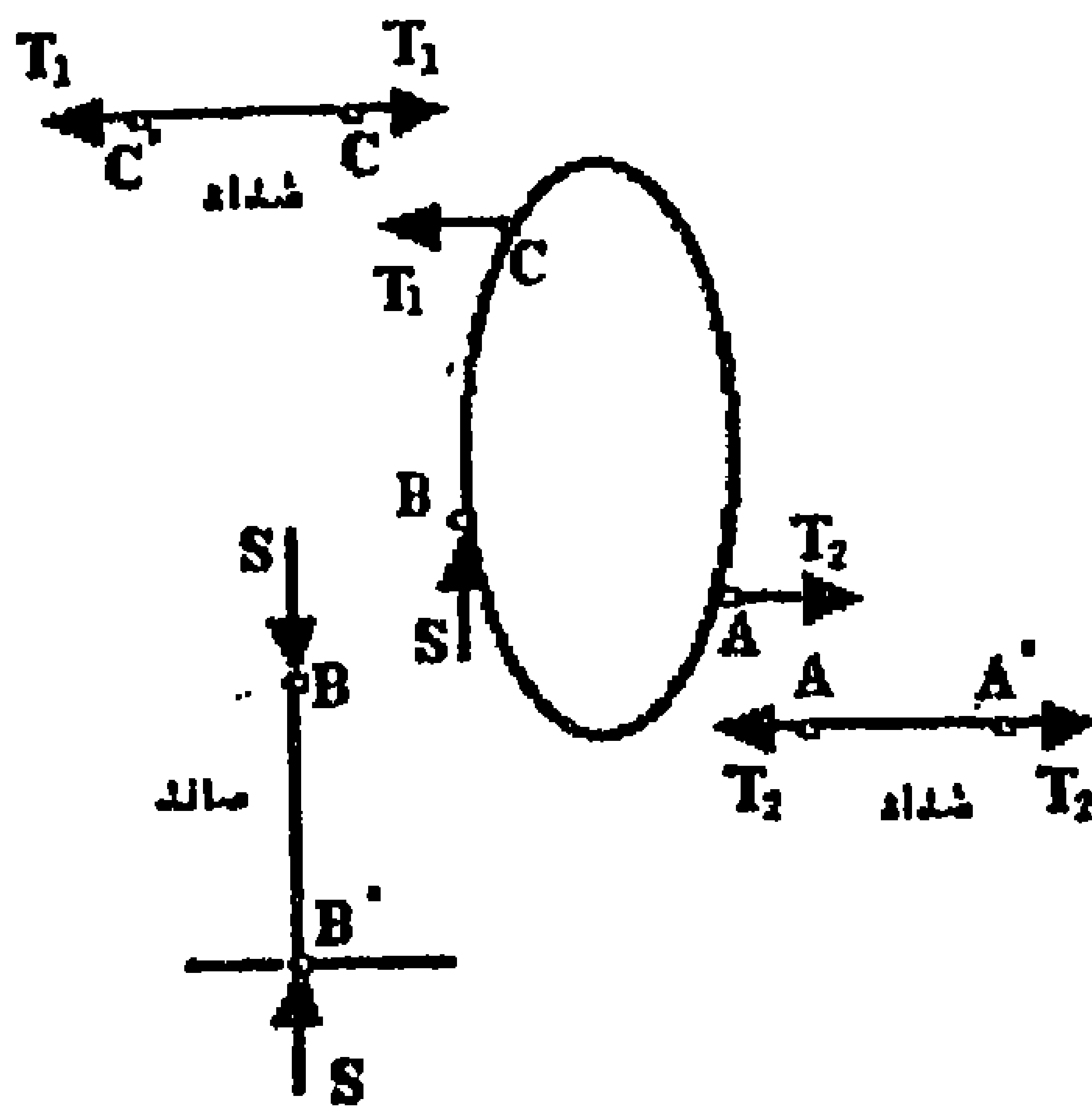
سواند

شكل (٦-٤)

والقضيب المشدود يعتبر شداداً أي تأثر عليه قوى شد دائماً، أما القضيب المضغوط فيعتبر سانداً أي أنه تؤثر عليه قوى ضغط دائماً، وعند اتصال هذه القضبان بأجسام أخرى محمله بقوى خارجية فإن كل قضيب خفيف غير محمل (سانداً أو شداداً) كوسيلة من وسائل الإرتكاز يعطي للجسم رد فعل عند مفصل الإرتكاز في الاتجاه المضاد لاتجاه تأثيره على القضيب وخط عمله معلوم وهو محور القضيب، وعلى ذلك فرد فعل الشداد أو الساند هو مجهول واحد (في المقدار فقط).



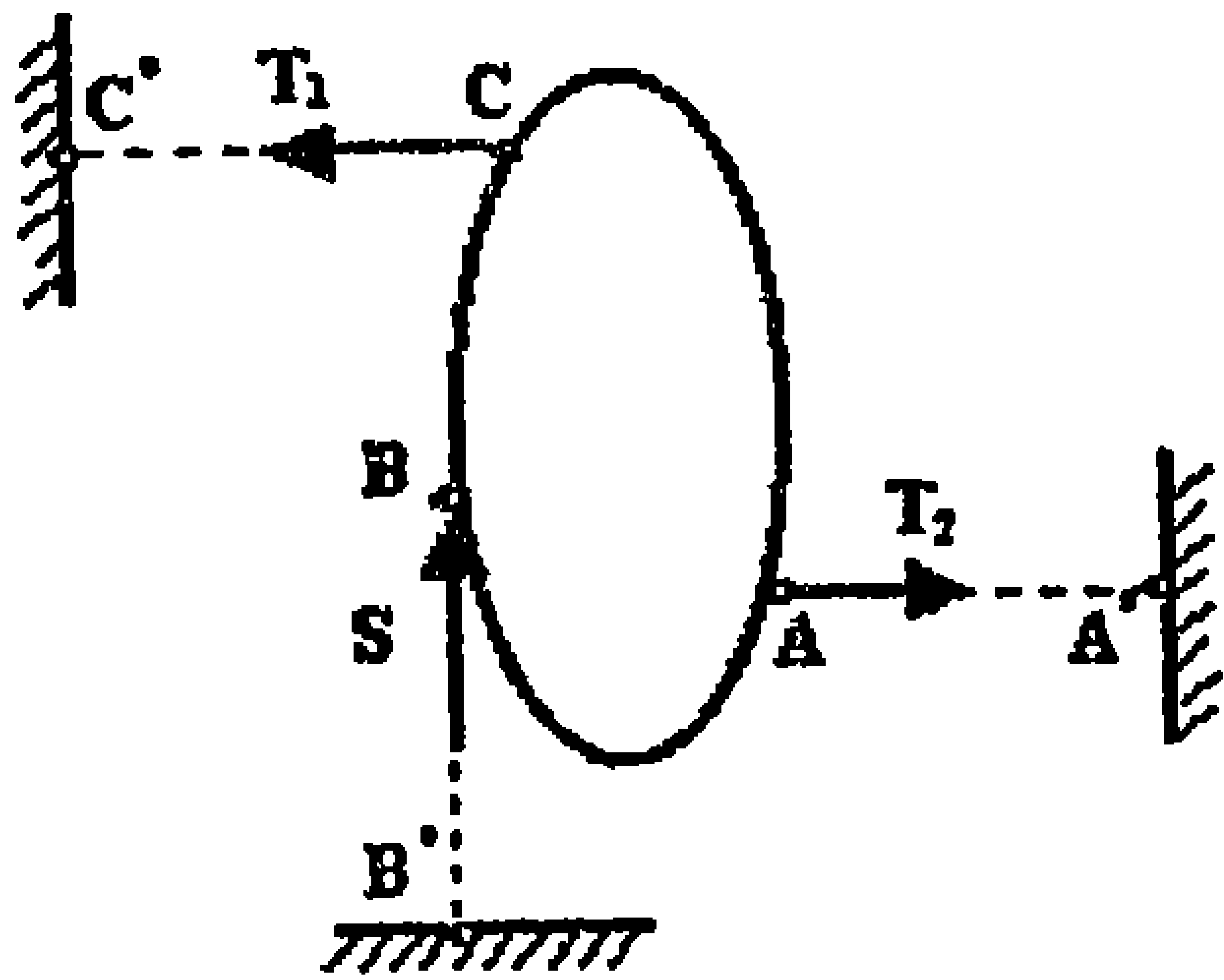
شكل (٧-٤)



شكل (٨-٤)

الجسم المتماسك في الشكل (٧-٤) محمل بقوة W ويرتكز على ثلاثة أعضاء خفيفة غير محملة وهي القضبان AA',BB',CC' فإذا فرضنا أن القضبان AA',CC' شدادات اتزنت بمفردها تحت تأثير قوى الشد عند مفاصلها وعند انتقال ردود الأفعال عند مفاصل الاتصال بالجسم A,C تظهر ردود الأفعال هذه (T_1,T_2) على الجسم كقوى تشد هذا الجسم ولذلك فإذا اتصل شداد بجسم ما بمفصل فإن هذا الشداد يعمل على شد الجسم ولذا أطلقت عليه هذه التسمية.

وبفرض أن القضيب BB' ساند اتزان تحت تأثير قوى الضغط فيه بمفرده وعند انتقال رد الفعل عليه في المفصل B منه إلى الجسم يظهر رد الفعل S على الجسم كما لو كان يسند هذا الجسم ولذلك يطلق على القضيب BB' بالساند شكل (٨-٤).



شكل (٩-٤)

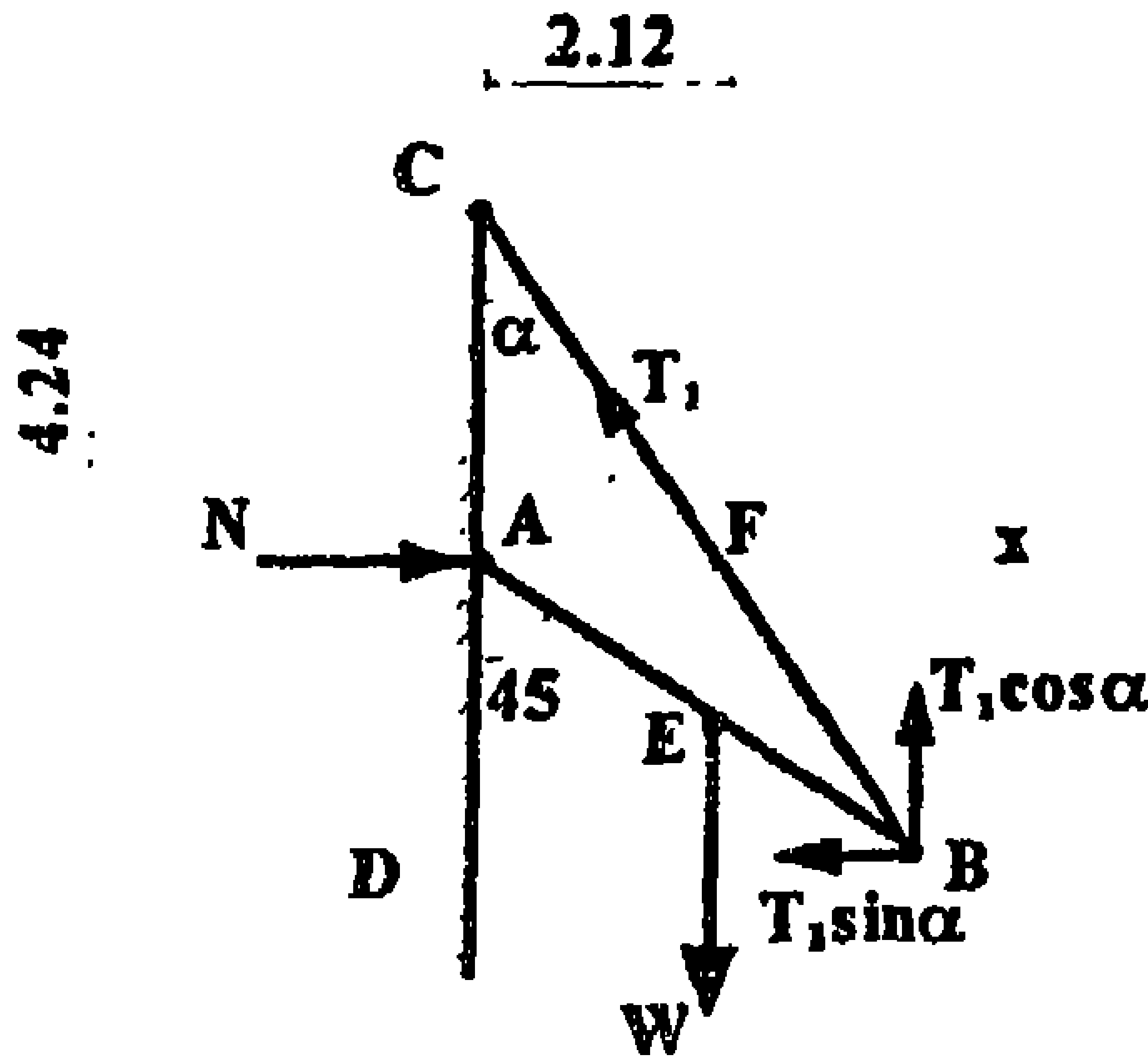
وعموماً عند ارتكاز جسم ما على مجموعة من الأعضاء الخفيفة الغير محمله (سواند أو شدادات) فإنه يمكن عزل هذا الجسم عن هذه الأعضاء مع وضع ردود أفعال هذه الأعضاء على الجسم كقوى شد أو سند حسب نوع العضو ومراعاة أن خطوط عمل هذه القوى هي الخط الواصل بين مفصلي كل عضو كما في الشكل (٩-٤).

أمثلة محلولة

مثال ١:

قضيب AB يزن ٥كجم طوله ٦م يستند على نقطة Aمن أحد طرفيه على حائط أملس وطرفه الأخر مربوط بخيط من B ومثبت عند C. الزاوية BAD تساوي ٤٥° في وضع الاتزان و AC تساوي ٤,٢٤م، أوجد الشد في الخيط وكذلك رد

فعل الحائط.



الحل:

$$AF = FE = AE\cos 45$$
$$= 3\cos 45$$
$$= 2.12$$
$$\tan\alpha = \frac{2.12}{4.24} = 0.5$$
$$\alpha = \tan^{-1} 0.5 = 36^{\circ}34'$$

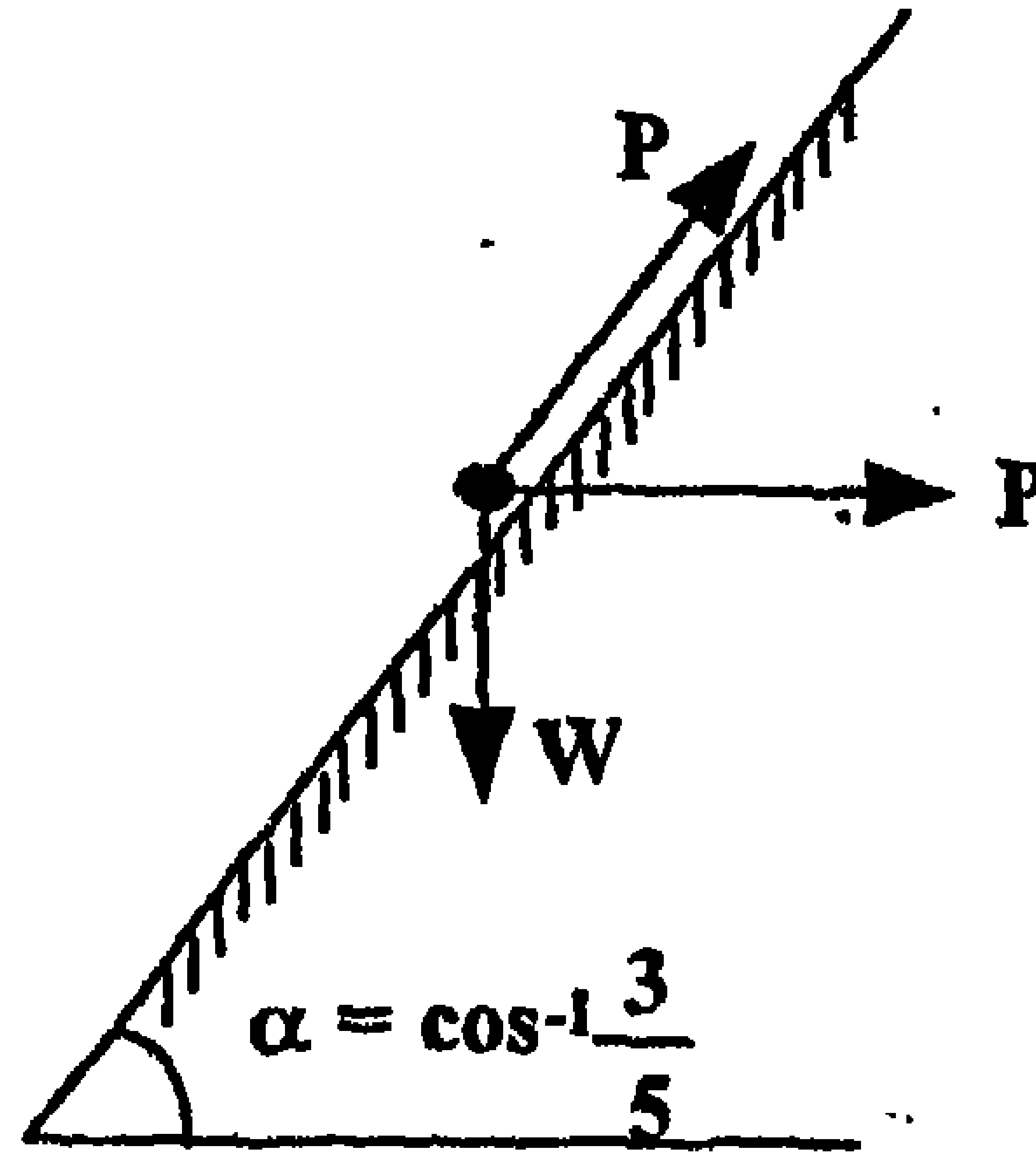
$$\because \sum x = 0$$
$$N - T_1 \sin\alpha = 0$$
$$N = T_1 \sin\alpha$$

$$\because \sum y = 0$$
$$W - T_1 \cos\alpha = 0$$
$$W = T_1 \cos\alpha$$
$$T_1 = \frac{W}{\cos\alpha} = 5.6Kg$$

$$N = 5.6 \times \sin 26.5667$$
$$= 2.5Kg$$

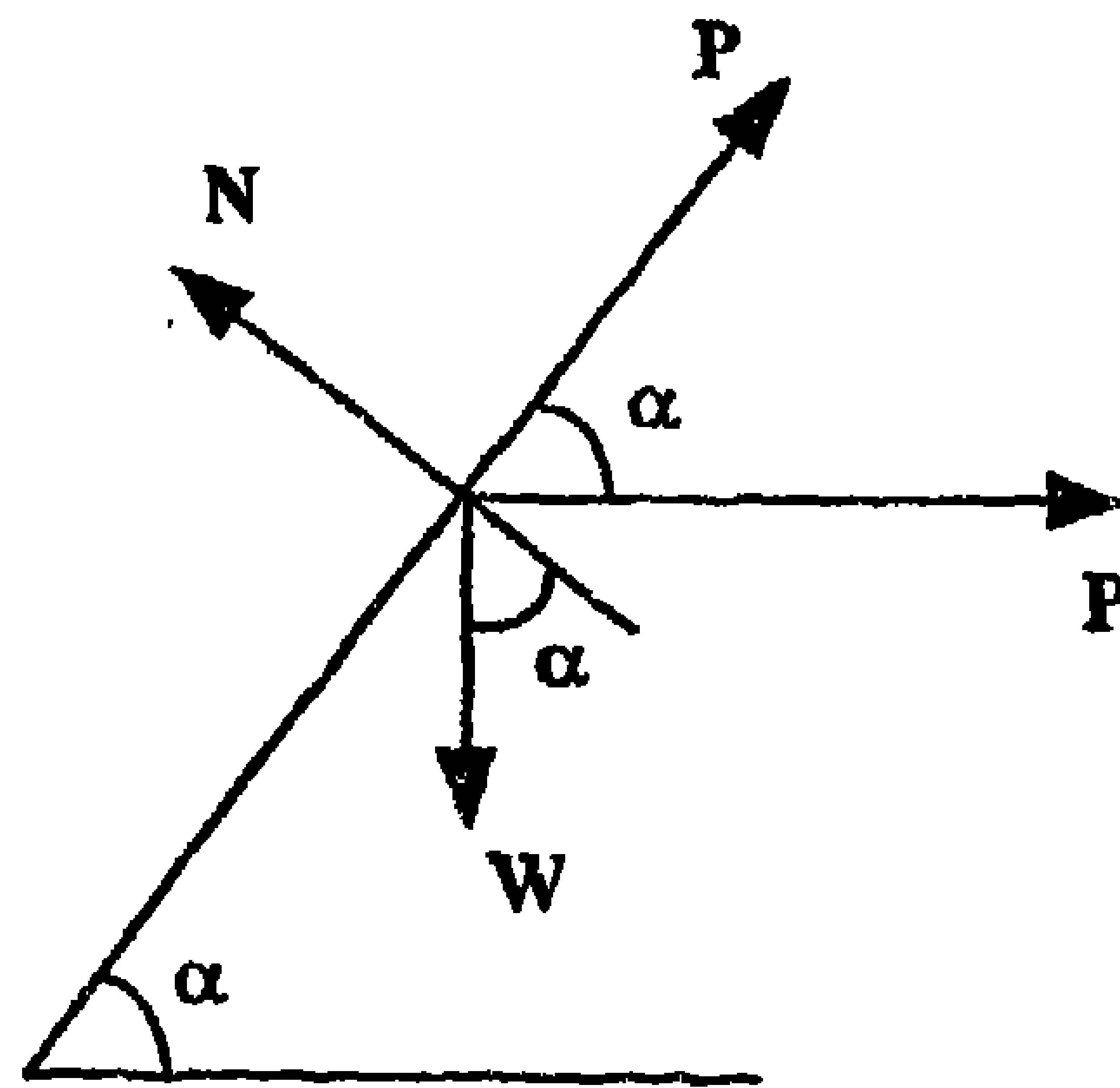
مثال ٢:

وضع جسيم وزنه W على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية α ومنع من الانزلاق بواسطة قوتين متساويتين مقدار كل منهما P أحدهما أفقية الاتجاه والثانية في اتجاه المستوى إلى أعلى كما في الشكل. أوجد P ومقدار رد فعل المستوى ، حل تحليليا وبيانياً.



الحل التحليلي:

نضع رد الفعل المستوي (ارتكاز بسيط) ثم نكتب معادلات اتزان الجسيم كما في الشكل



بالتحليل في اتجاه المستوى

$$\sum X = 0$$

$$P + P\cos\alpha - W\sin\alpha = 0$$

$$P+\frac{3}{5}P=\frac{4}{3}P\,w$$

$$\frac{8}{5}P=\frac{4}{3}w$$

$$P=\frac{w}{2}$$

بالتحليل في اتجاه العمودي على المستوى

$$\sum Y=0$$

$$N-p\sin\alpha-w\cos\alpha=0$$

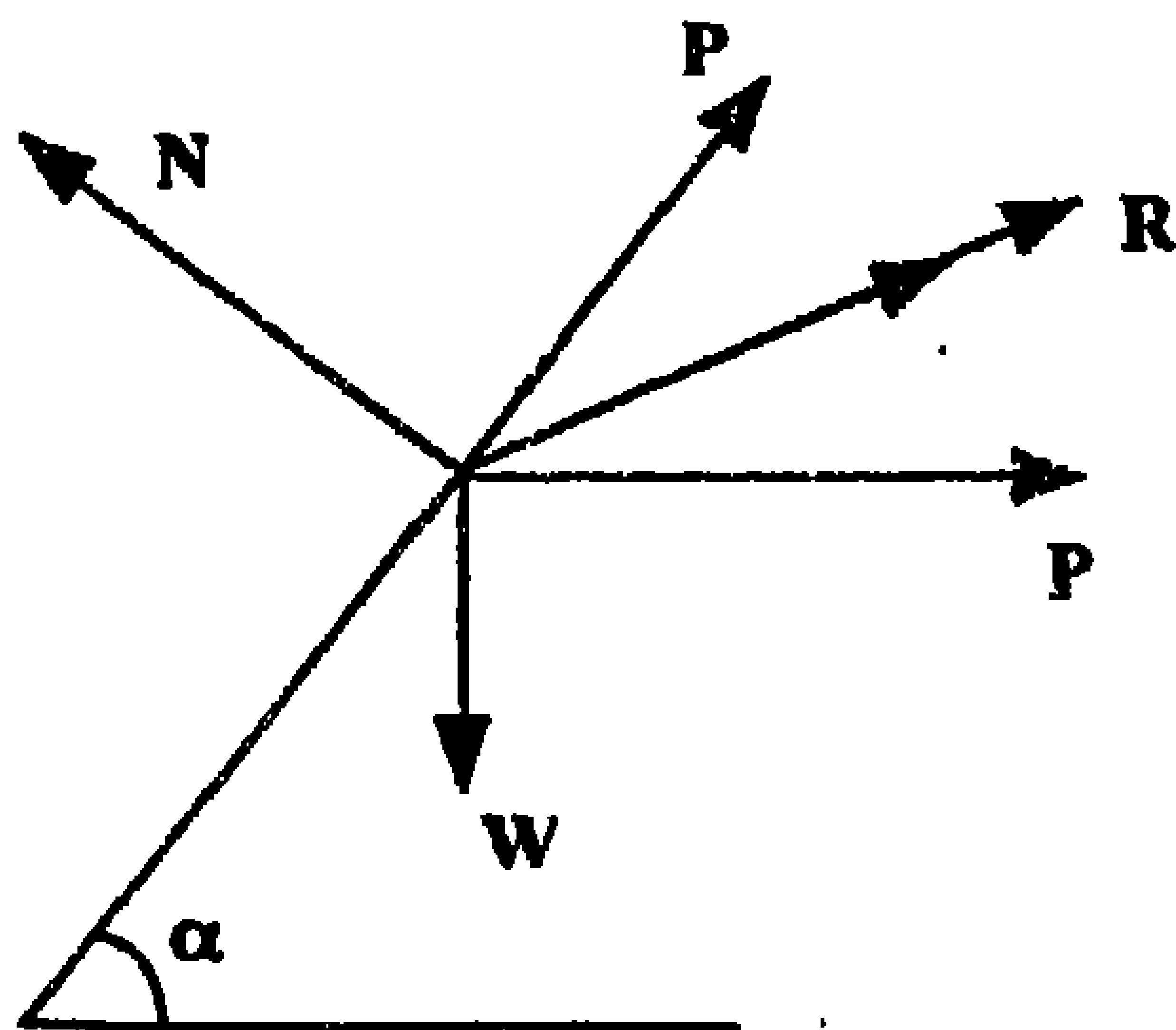
$$N=\frac{4}{5}P+\frac{3}{5}w=\frac{4}{5}(\frac{w}{2})+\frac{3}{5}w$$

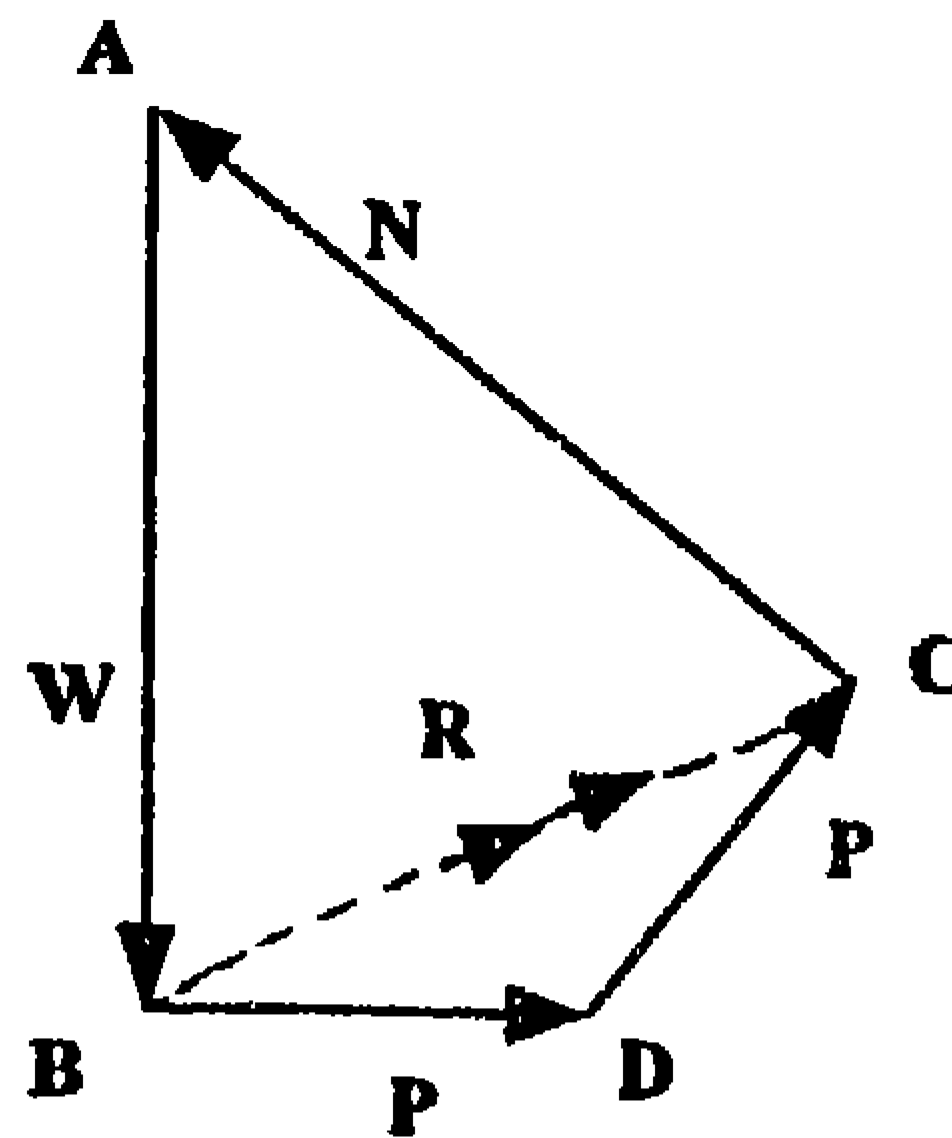
$$N=w$$

الحل البياني:

مقياس رسم القوى

نفرض أن w = 5 cm ومنها 1 cm = w/5





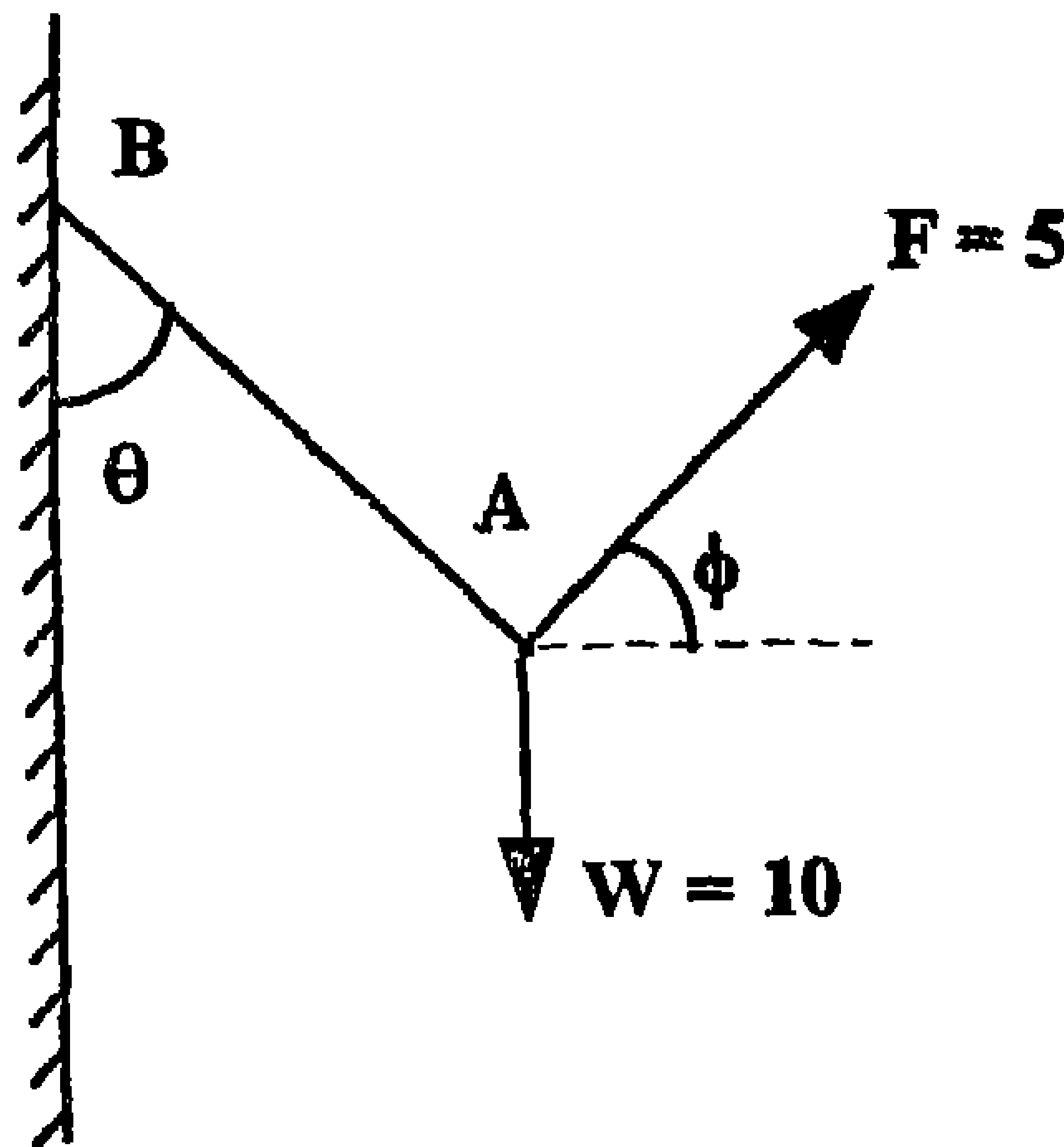
(ب)

شكل (أ) يمثل شكل خطوط العمل، شكل (ب) يمثل مضلع القوى المقفل وفيه $\overrightarrow{AB}$ يمثل وزن الجسيم W ، $\overrightarrow{BC}$ يمثل محصلة القوتين المتساويتين P و P ، $\overrightarrow{CA}$ يمثل رد فعل المستوى N ، $\overrightarrow{DC}$ يمثل القوة المائلة P ، $\overrightarrow{BD}$ يمثل القوة ناتتج من مضلع القوة وبالقياس

$$N = 5\text{ cm} = w \ , \ P = 2.5\text{ cm} = w/2$$

مثال ٣ :

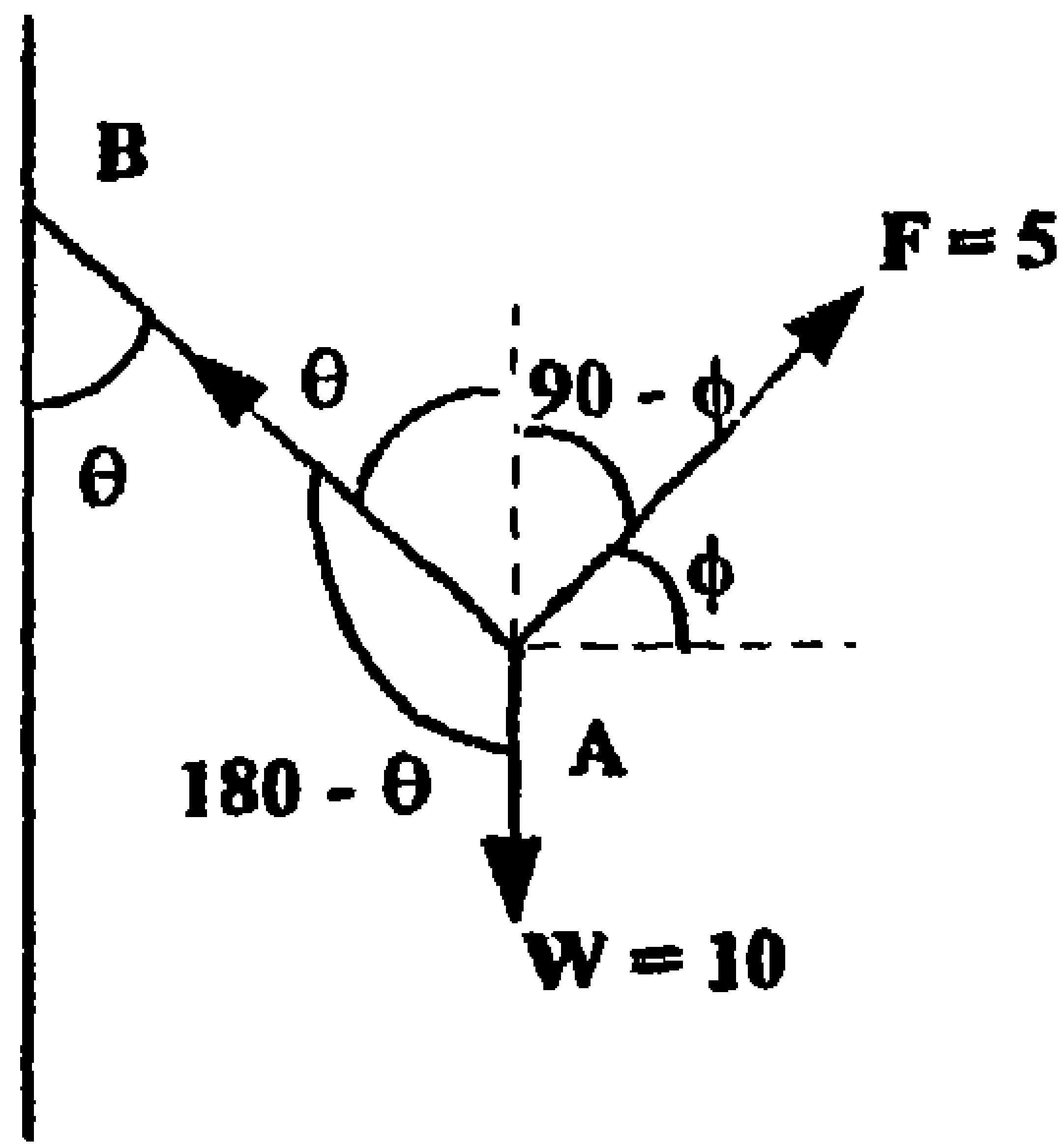
علق جسيم وزنه 10 N بخيط خفيف غير مرن AB مثبت طرفه الآخر في نقطة ثابتة B. اثرت على الجسيم قوة F مقدارها 5 N لتأخذ الخيط وضعا مائلا زاوية θ على الرأسي كما في الشكل. أوجد الاتجاه ϕ الذي تؤثر فيه هذه القوة حتى يصنع الخيط مع الرأس في وضع الاتزان أكبر زاوية ممكنة. حل تحليليا وبيانياً



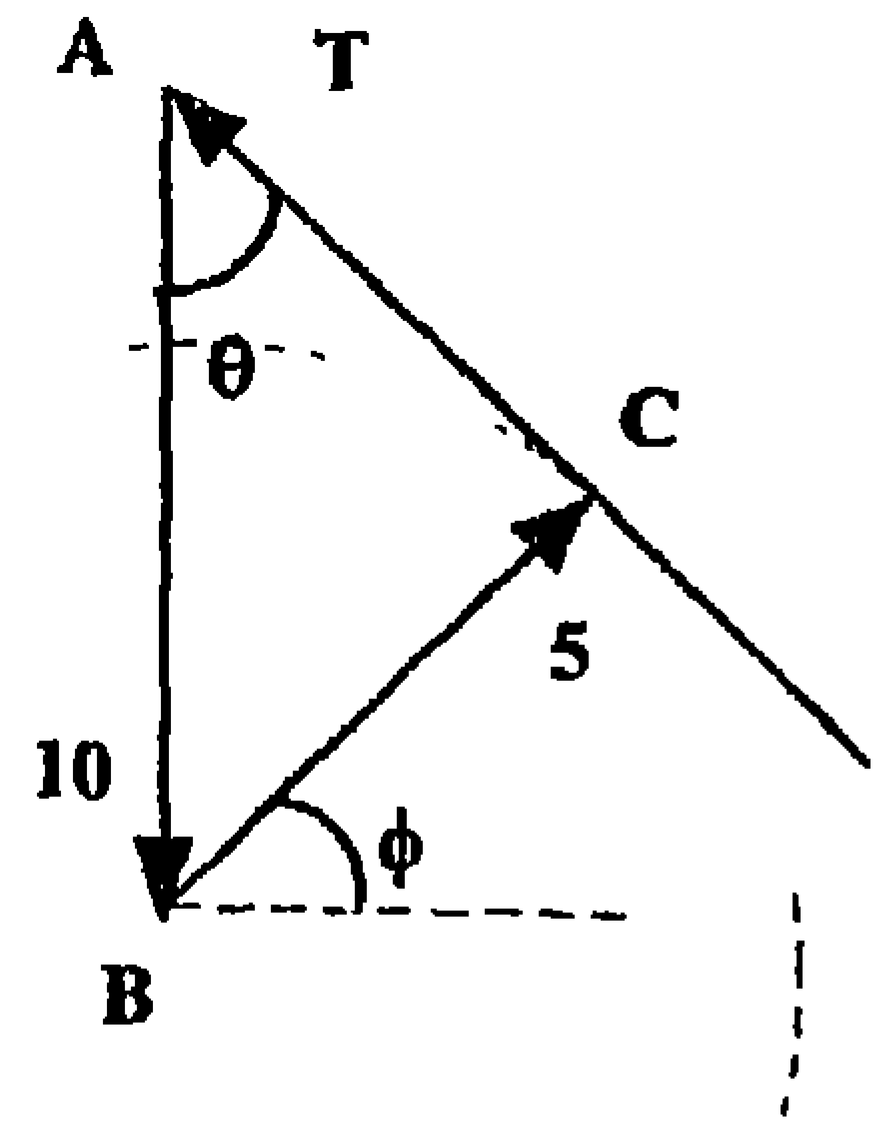
الحل التحليلي:

نضع رد فعل الخيط ثم نكتب معادلات اتزان الجسيم كما في شكل (أ)

الجسيم متزن تحت تأثير ثلاث قوى فقط لذلك يمكن استخدام قاعدة لامي.



(أ)



(ب)

$$\frac{10}{\sin(\theta+90-\phi)}=\frac{5}{\sin(180-\theta)}$$

$$2\sin\theta=\cos(\theta-\phi)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى الزاوية ϕ

$$2\cos\theta\frac{d\theta}{d\phi}=-\sin(\theta-\phi)\left\{\frac{d\theta}{d\phi}-1\right\}$$

ولكي تكون θ أكبر ما يمكن نضع $\frac{d\theta}{d\phi}=0$ ومنها

$$\sin(\theta-\phi)=0$$

$$\theta=\phi$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على أكبر قيمة للزاوية θ

$$2\sin\theta_{max}=1$$

$$\theta_{max}=30^\circ=\phi$$

الحل البياني:

مقياس رسم القوى $1\ cm = 2N$

شكل (ب) يمثل مثلث القوى المقفل ABC الذي فيه $\overrightarrow{AB}$ يمثـل الـوزن 10 N، $\overrightarrow{BC}$ يمثل القوة $F = 5\ N$ والحل الهندسي للنقطة C هو دائرة مركزها B

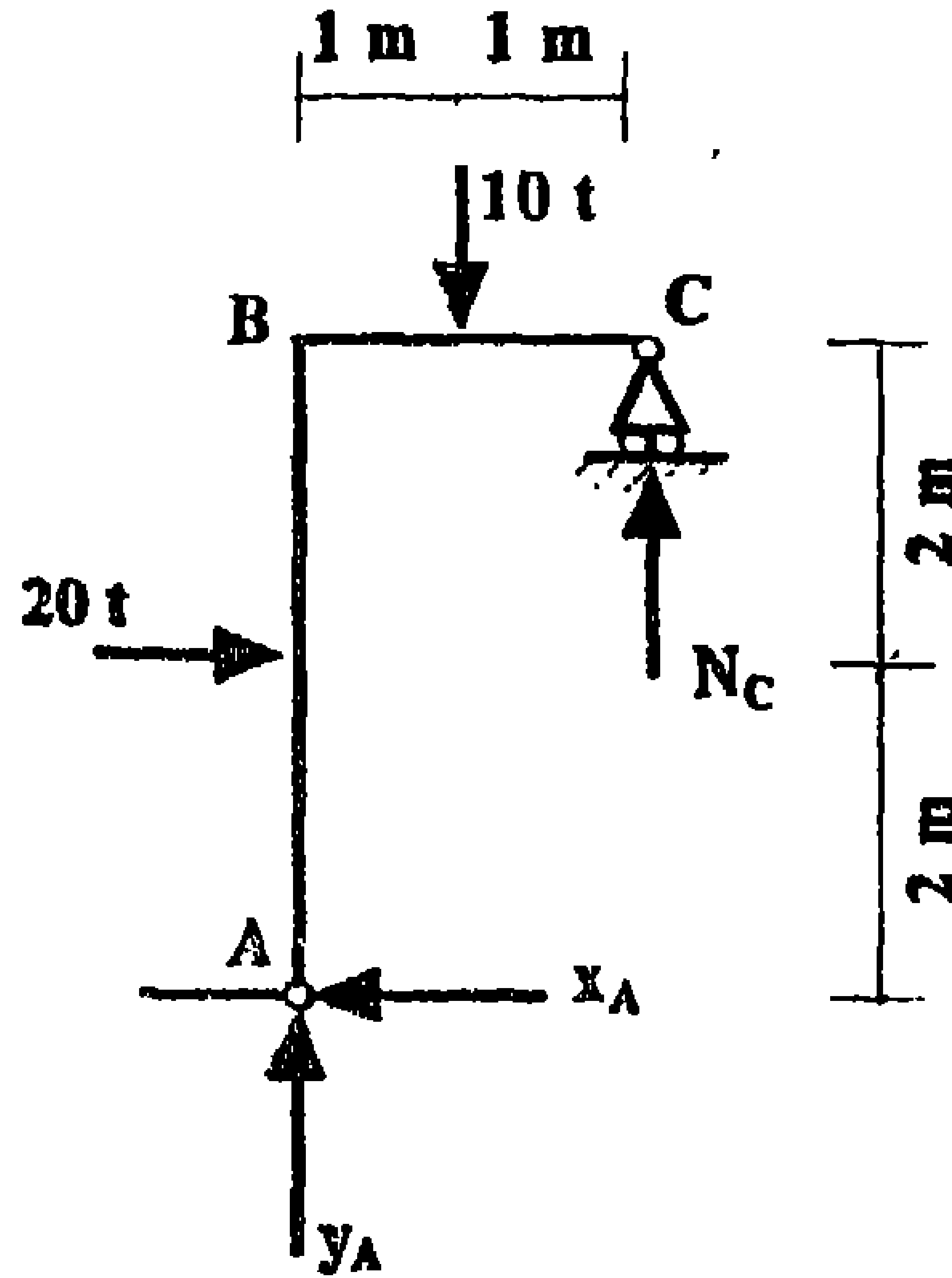
$\overrightarrow{CA}$ يمثل الشد T ولكي تكون الزاوية θ أكبر ما يمكن يجب أن يكون AC مماس للدائرة.

من مثلث القوى وبالقياس،

$$\theta max = 30° = \phi$$

مثال ٤ :

الجسم المتماسك A B C يرتكز مفصليا في C عين ردود الفعل في كل من المفصل A و C.



الحل :

$$\because \sum M_A = 0$$

$$N_C(2) - 10(1) - 20(2) = 0$$

$$\therefore N_C = 25 \quad t$$

$$\because \sum X = 0$$

$$20 - X_A = 0$$

$$X_A = 20 \ t$$

$$\because \sum Y = 0$$

$$y_A + N_C - 10 = 0$$

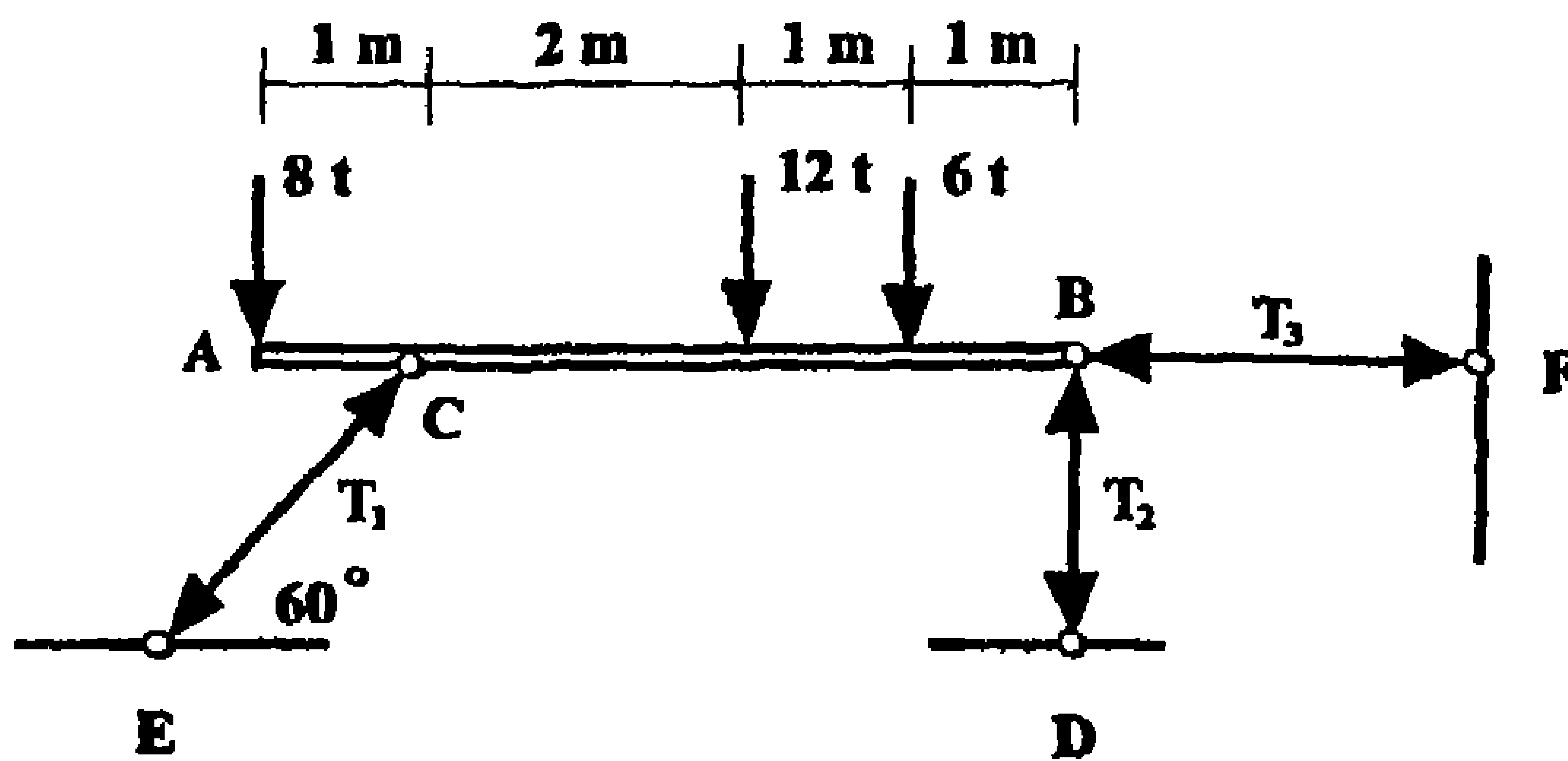
$$y_A + 25 - 10 = 0$$

$$\therefore y_A = -15 \ t$$

أي أن اتجاه y_A عكس الإتجاه المفروض.

مثال ٥ :

القضيب B A محمول على ثلاث قضبان خفيفة و القضيب محمل بالقوى المبينة في الشكل ، يراد تعيين ردود الأفعال في القضبان الخفيفة .



الحل :

$\because \sum M_C = 0$

$$8(1)-12(2)-6(3)+T_2(4)=0$$

$$T_2 = 8.5\ t$$

$\because \sum Y = 0$

$$-8+T_1 \sin 60 - 12 - 6 + T_2 = 0$$

$$T_1 = 20.2\ t$$

$\because \sum X = 0$

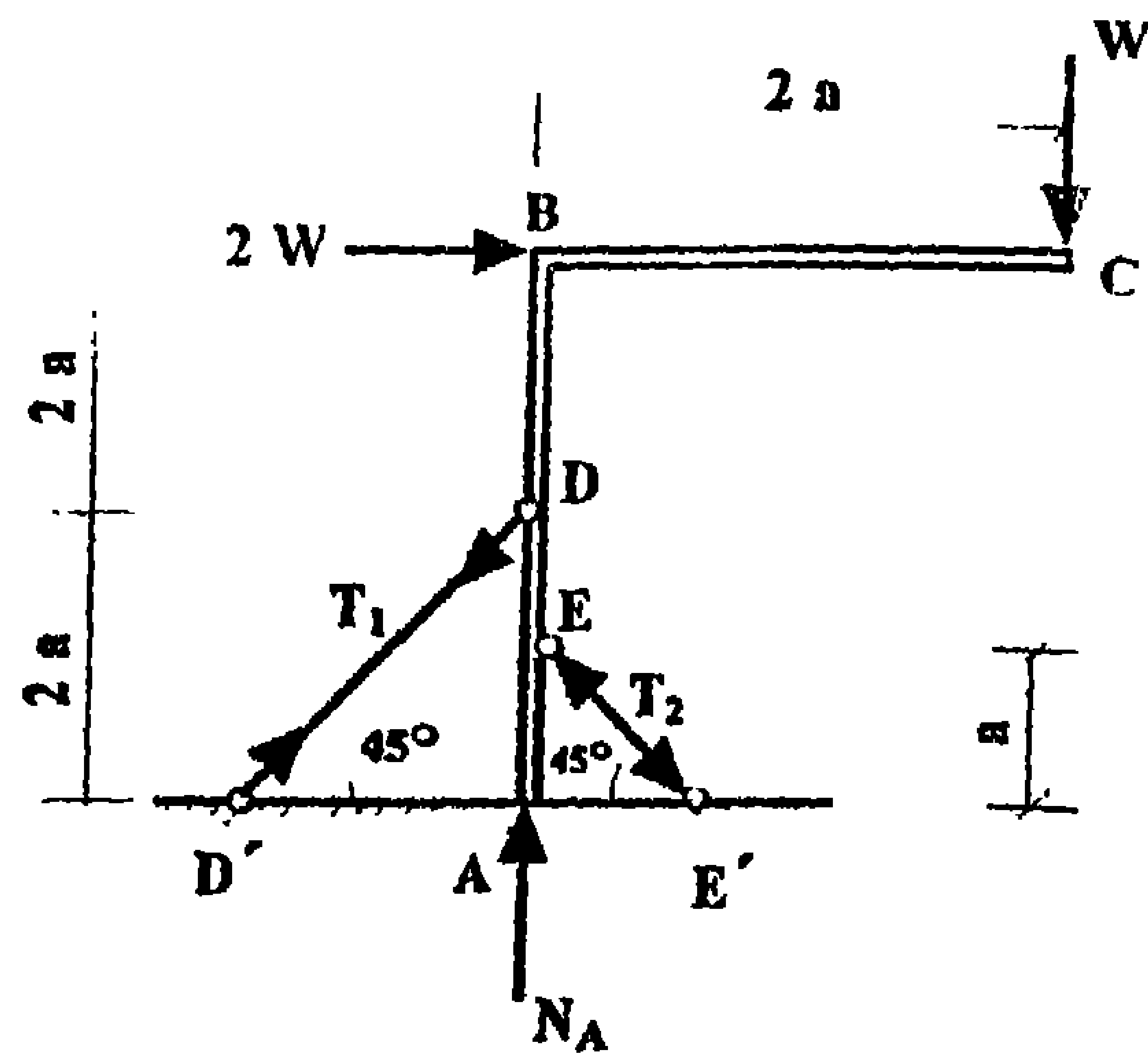
$$-T_3 + T_1 \cos 60 = 0$$

$$T_3 = 10.1\ t$$

مثال ٦ :

القضيب C B A المحمل كما في الشكل يرتكز ارتكاز بسيط عند A و يحتفظ بتوازنه القضيبان الخفيفان $D D'$ ، $E E'$. المطلوب : تعين رد الفعل عند A و القوى المحورية في القضيبان الخفيفان.

علماً بأن : $A E = a , A D = D B = 2 a , B C = 2 a$



الحل :

$$\because \sum M_D = 0$$

$$-T_2 \sin 45(a) - 2w(2a) - w(2a) = 0$$

$$T_2 = -6\sqrt{2}\ w$$

اي ان اتجاه T_2 عكس الإتجاه المفروض .

$\because \sum X = 0$

$$2w - T_1 \sin 45 - T_2 \sin 45 = 0$$

$$2w - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$T_1 = 8\sqrt{2}\ w$$

$\because \sum Y = 0$

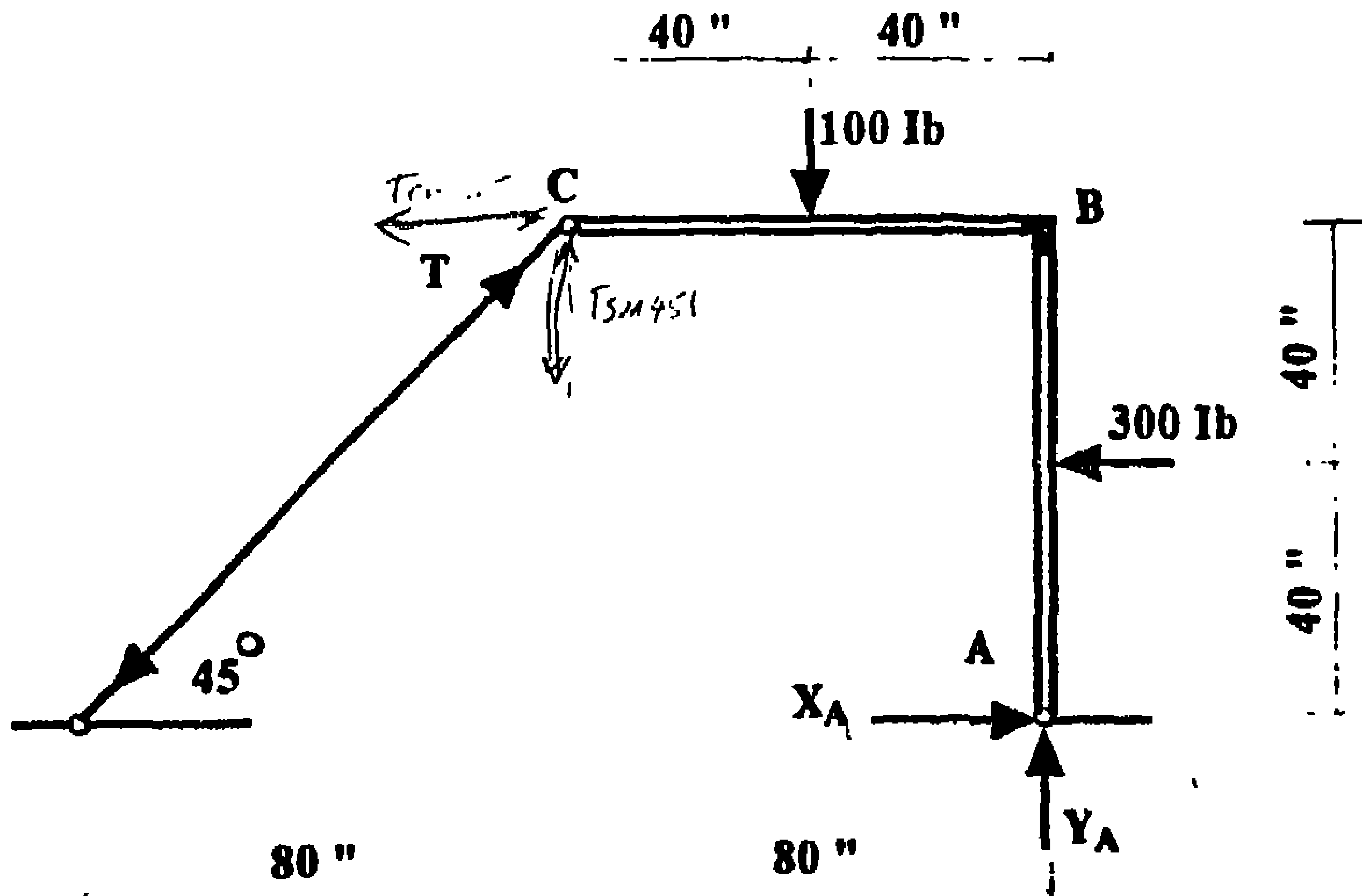
$$N_A - W - T_1 \sin 45 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$N_A - W - \frac{8\sqrt{2}W}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} W = 0$$

$$N_A = 15\ w$$

مثال ٧ :

C B A جسم متماسك يرتكز على مفصل ثابت في A و يشده القضيب الخفيف D C و الجسم A B C محمل كما في الشكل عين ردود الفعل في المفاصل .



الحل :

$$\because \sum M_A = 0$$

$$300(40) + 100(40) + T\sin 45(80) + T\cos 45(80) = 0$$

$$T = -100\sqrt{2}\ \text{Ib}$$

$$\because \sum X = 0$$

$$T\sin 45 - 300 + X_A = 0$$

$$X_A = 200\ \text{Ib}$$

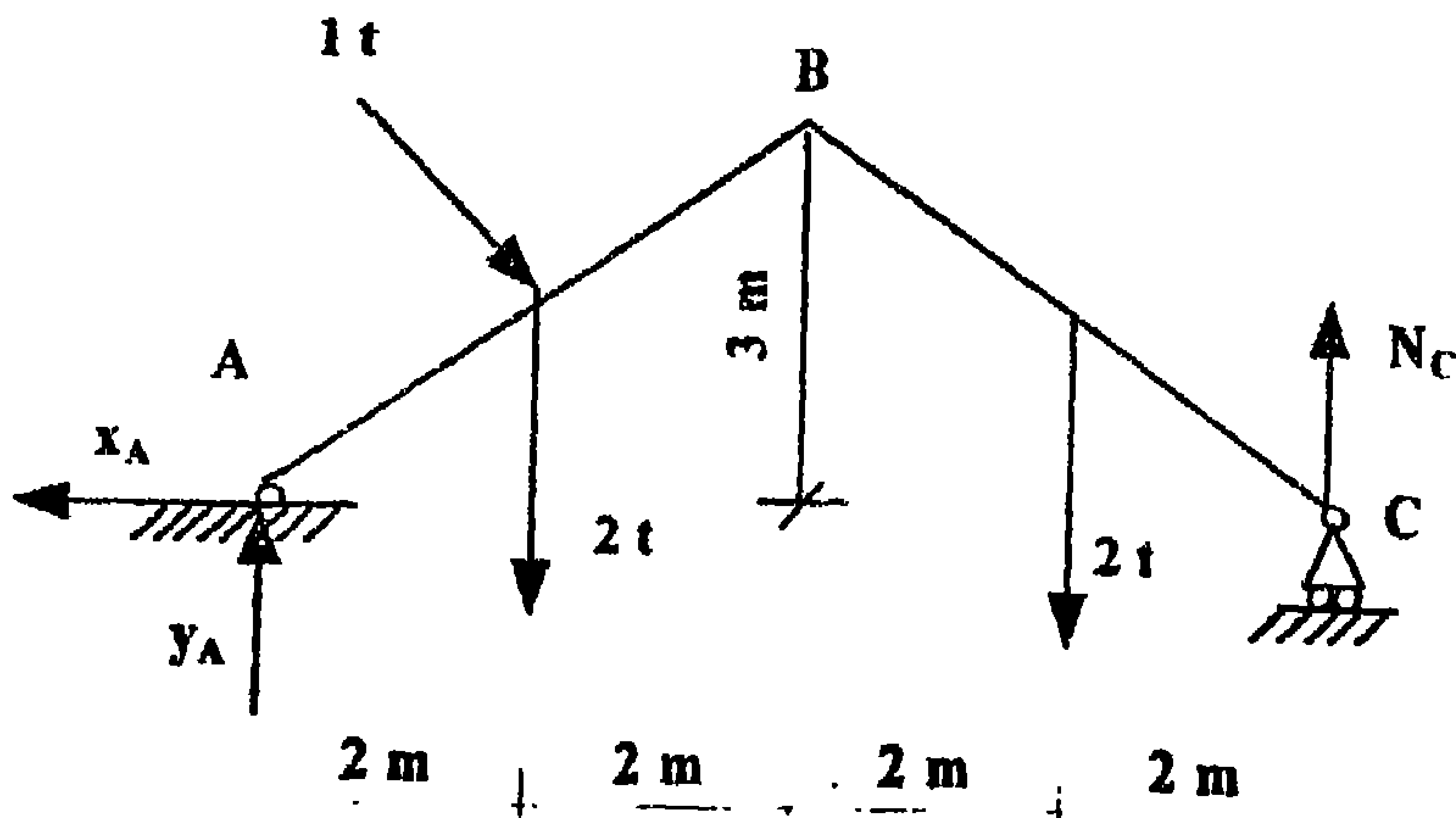
$$\because \sum Y = 0$$

$$T\cos 45 - 100 + Y_A = 0$$

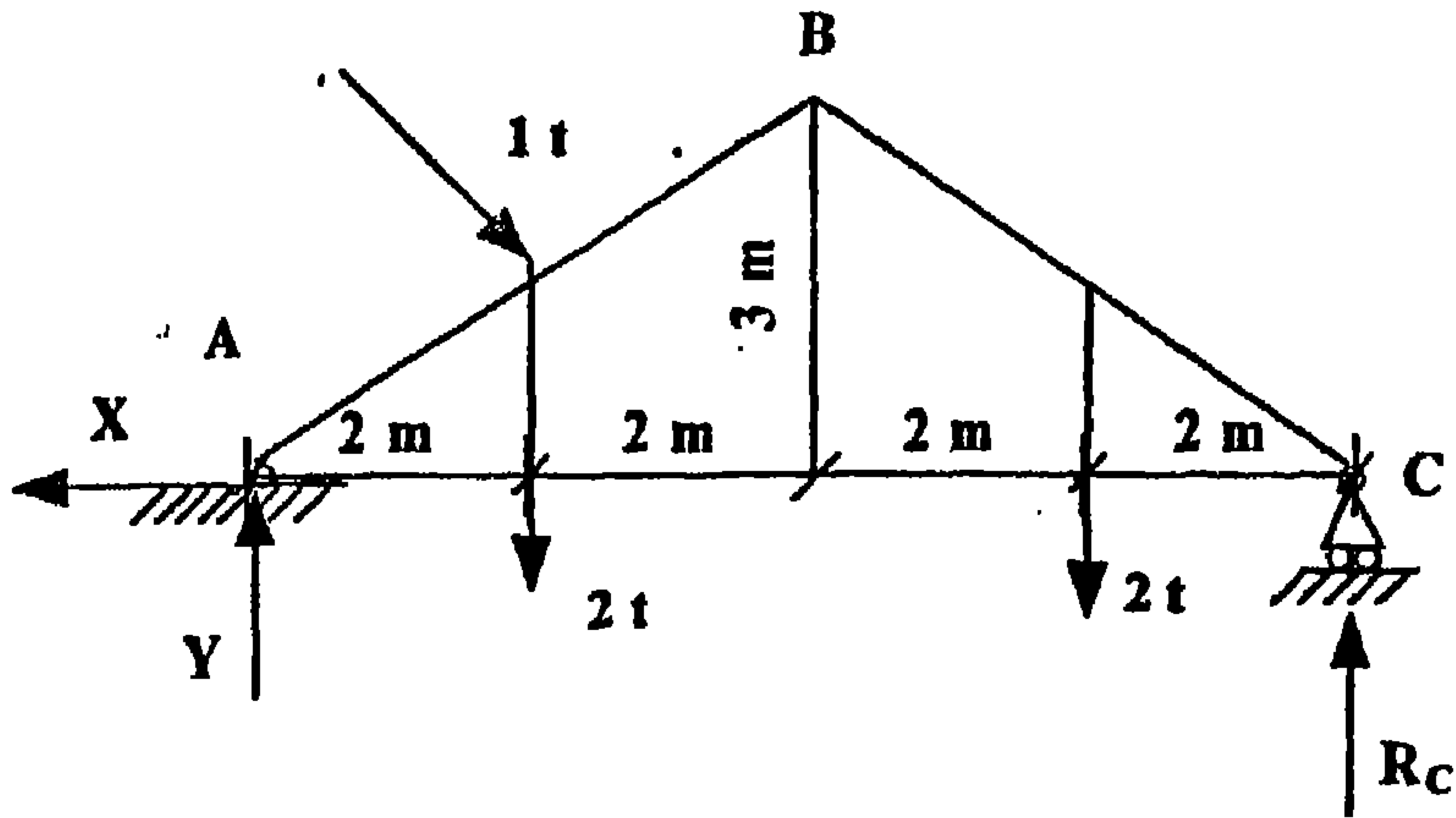
$$Y_A = 0\ \text{Ib}$$

مثال ٨:

ABC هيكل متماسك مثبت مفصليا في A ويرتكز ارتكازاً حراً في Cويحمل الأحمال الموضحة بالأطنان. احسب ردود الفعل في A ، C وحقق النتائج بيانياً



الحل:



بأخذ العزوم حول المفصل A نحصل على ردود الفعل Rc

$$1 \times 2.5 + 2 \times 2 + 2 \times 6 = R_c \times 8$$

$$R_c = \frac{18.5}{8}\,t = 2.30\,t$$

بالتحليل أفقيا ورأسياً نحصل على رد فعل المفصل A:

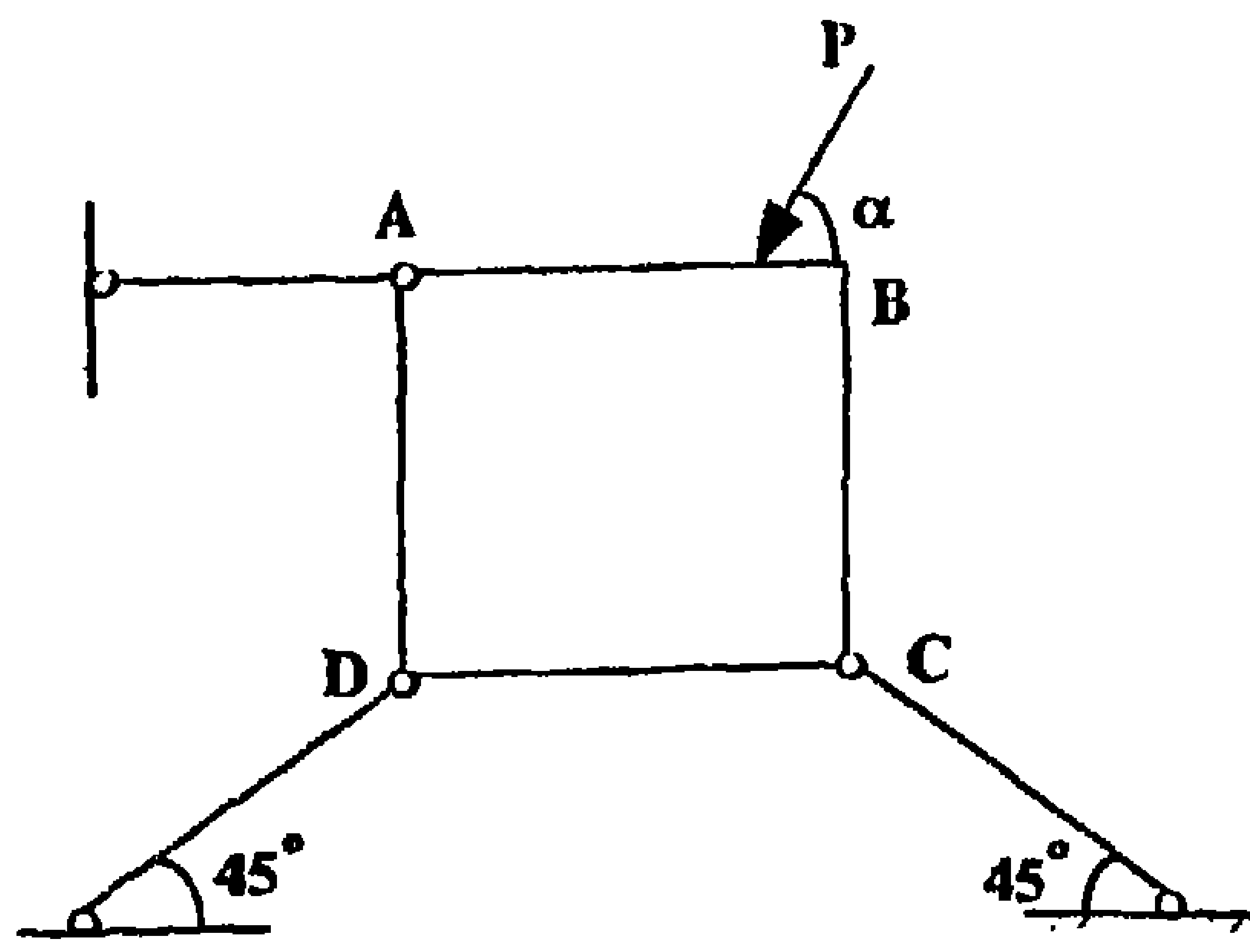
$$x = 1 \times \frac{1.5}{2.5} = 0.6\,t$$

$$y + R_c = 2 + 2 + 1 \times \frac{2}{25}$$

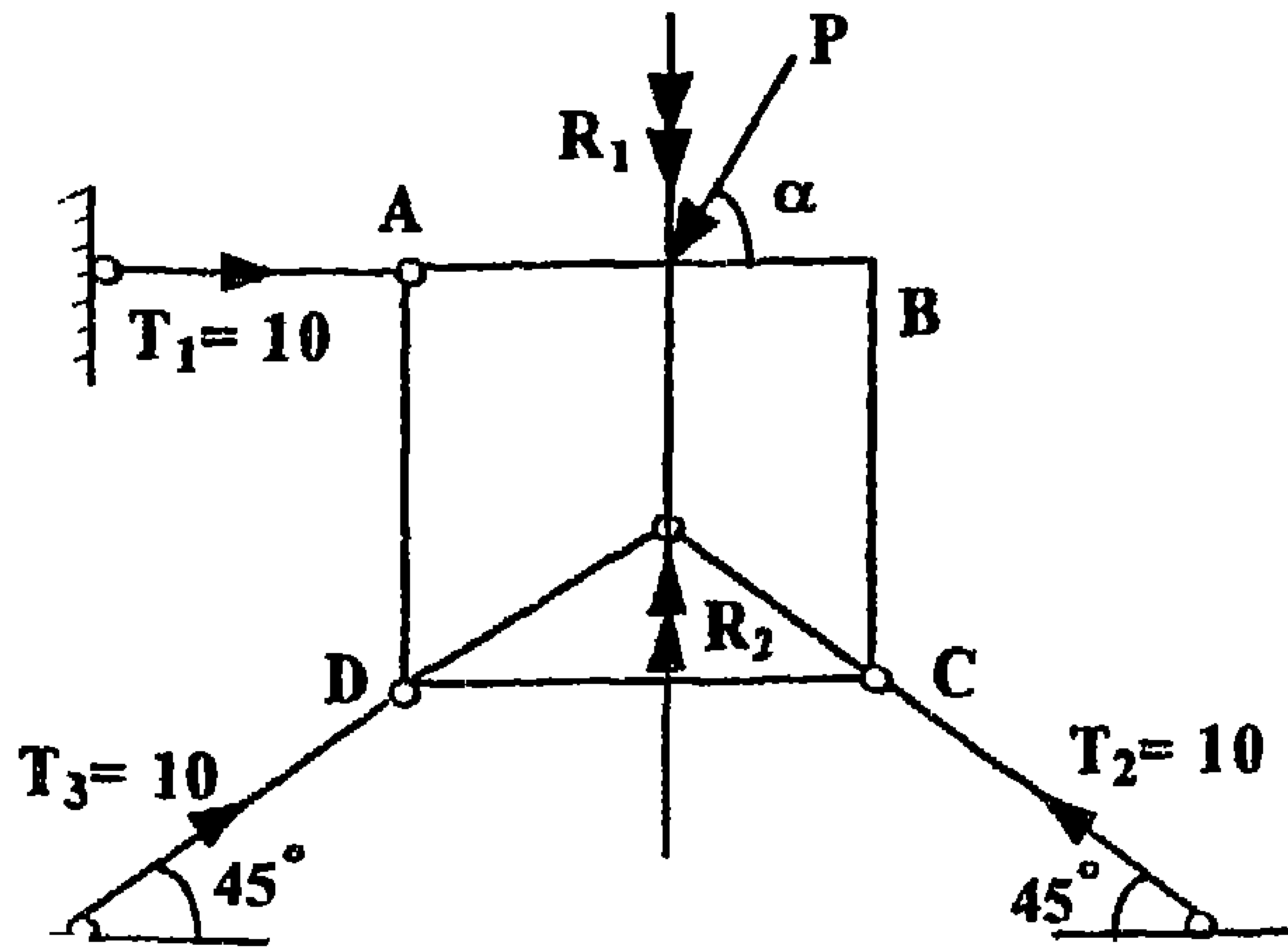
$$y = 2.5\,t$$

مثال ٩:

لوحة مربعة خفيفة ABCD تحملها من رؤوسها A ، C ، D ثلاثة سواند خفيفة وتؤثر عليها قوة P كما في الشكل، عين P مقداراً واتجاهاً بحيث يكون رد فعل كل من السواند مساوياً ١٠ كجم. حل بالطرق التحليلية والبيانية.



الحل:



ردود فعل الوصلات نفسها ومقدار كل منها ١٠ كجم كما هو معطى برأس السؤال. اللوحة متزنة تحت تأثير ٤ قوى هي T_1 ، T_2 ، T_3 ، P من شرط اتزان القوى الأربع أن تكون محصلة أي اثنين منها مساوية ومضادة لمحصلة الإثنين الآخرين ويجمعها خط عمل واحد.

محصلة T_2 ، T_3 هي R_2 المبينة بالشكل وهي رأسية وتقطع الضلع AB في منتصفه E وفيها تلتقي القوتان الأخريان T_1 ، P كما تمر بها R_1 محصلة هاتين القوتين وبذا تتحدد نقطة تأثير القوة المجهولة P وهي E منتصف AB

أما مقدار P فيمعينه التحليل الأفقي والرأسي للقوى الأربع المتزنة:

$$10+\frac{10}{\sqrt{2}}-\frac{10}{\sqrt{2}}-P\cos\alpha=0$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}}+\frac{10}{\sqrt{2}}-P\sin\alpha=0$$

$$\therefore P\cos\alpha=10\ ,P\sin\alpha=10\sqrt{2}$$

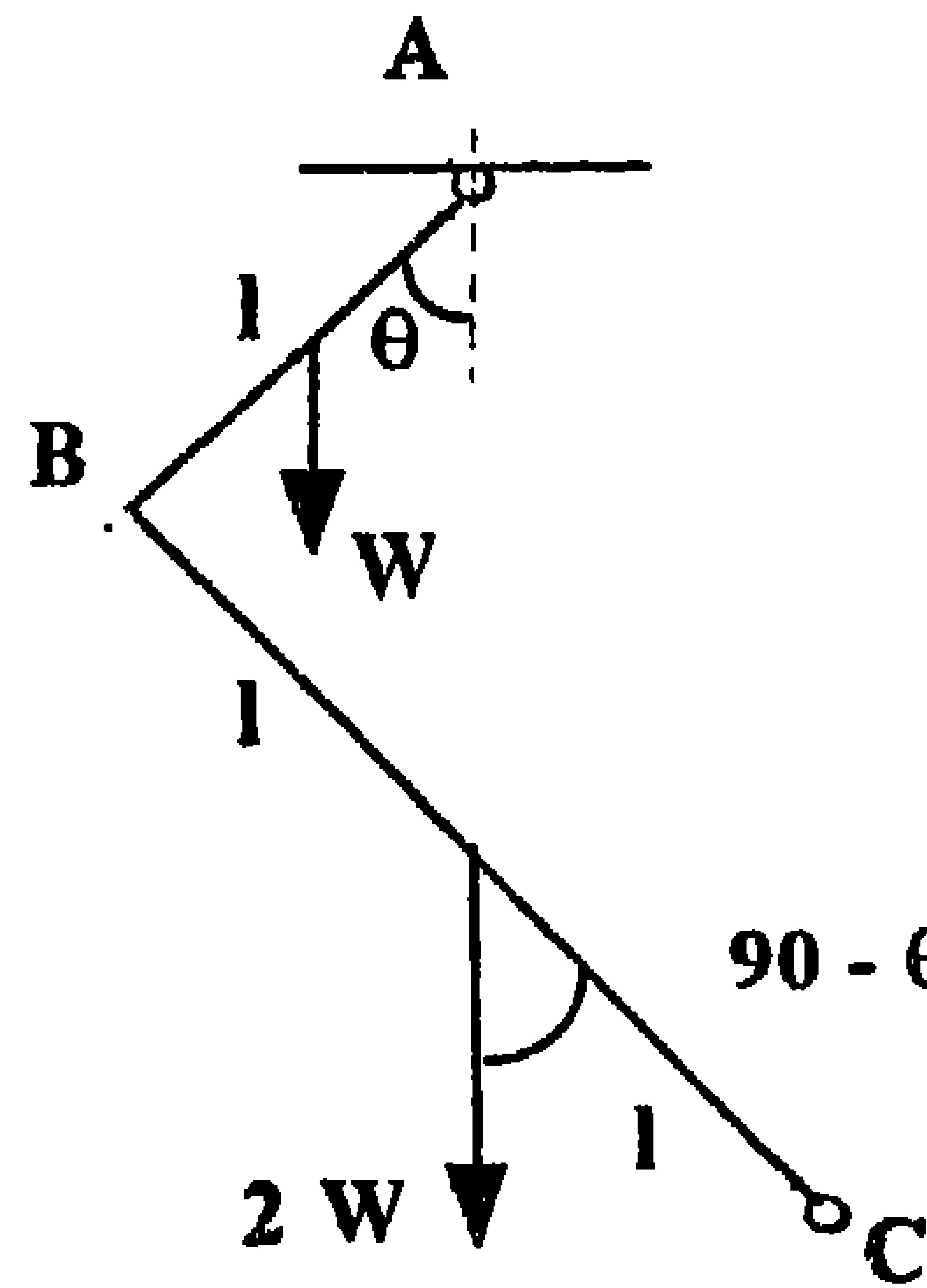
بالتربيع والجمع نحصل على مقدار P :

$$P^2=100+200=300 \qquad \therefore P=10\sqrt{3}$$

$$\tan\alpha=\sqrt{2}$$

وللحل بيانياً يرسم مضلع قوى للأربع قوى المتزنة

مثال ١٠ :



جسم متماسك على شكل زاوية قائمة ABC معلق مفصلياً في A ويرتكز على وتد أملس عند طرفه C. أوجد رد فعل الوتد بدلالة الزاوية θ التي يتلاشى عندها رد الفعل هذا.

اذا كانت ($\theta = 60°$) أوجد قيمة القوة P التي يلزم التأثير بها على خط العمل CB لحفظ الإتزان بدون الوتد وأوجد رد فعل المفصل A في هذه الحالة الأخيرة.

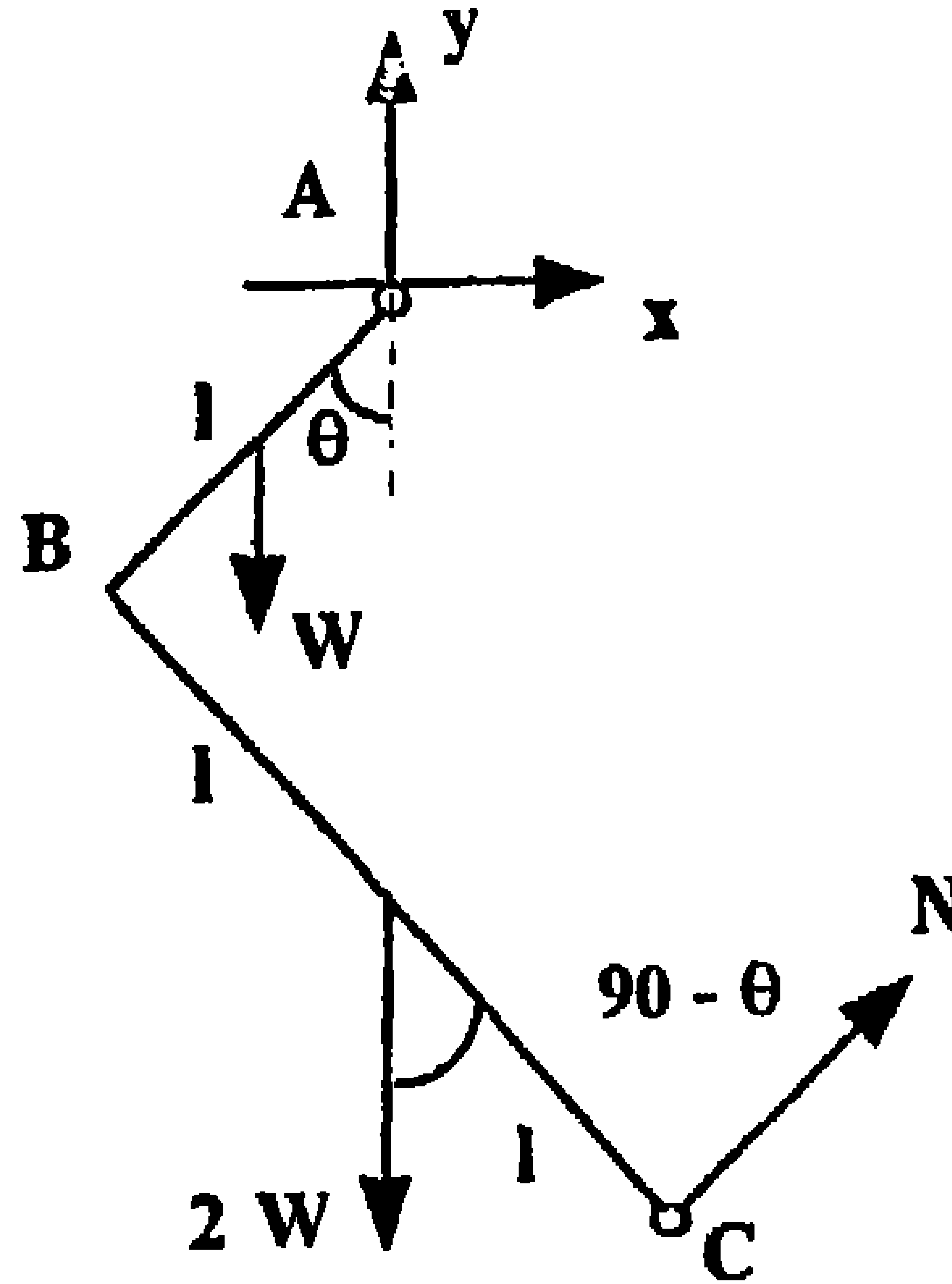
القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه جزئية W ، 2W ورد الفعل العمودي من الوتد الأملس N ، ردا فعل المفصل (x, y)

$$N2=W\sin\theta.\frac{1}{2}+2W\sin\theta-2W\cos\theta=0$$

$$\therefore N=W(\cos\theta-\frac{5}{4}\sin\theta)$$

تلاشي N عندما يكون:

$\tan\theta = 4/5$



الحالة الثانية: في حالة التأثير بقوة P في خط العمل CB نأخذ العزوم حول A

$$-P + W\sin 60^\circ\,\frac{1}{2} + 2\,W\sin 60^\circ - 2\,W\cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore\ P = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} - 1\right)W$$

بالتحليل أفقياً ورأسياً على مركبتي رد فعل المفصل:

$$X - P\cos 60 = 0$$

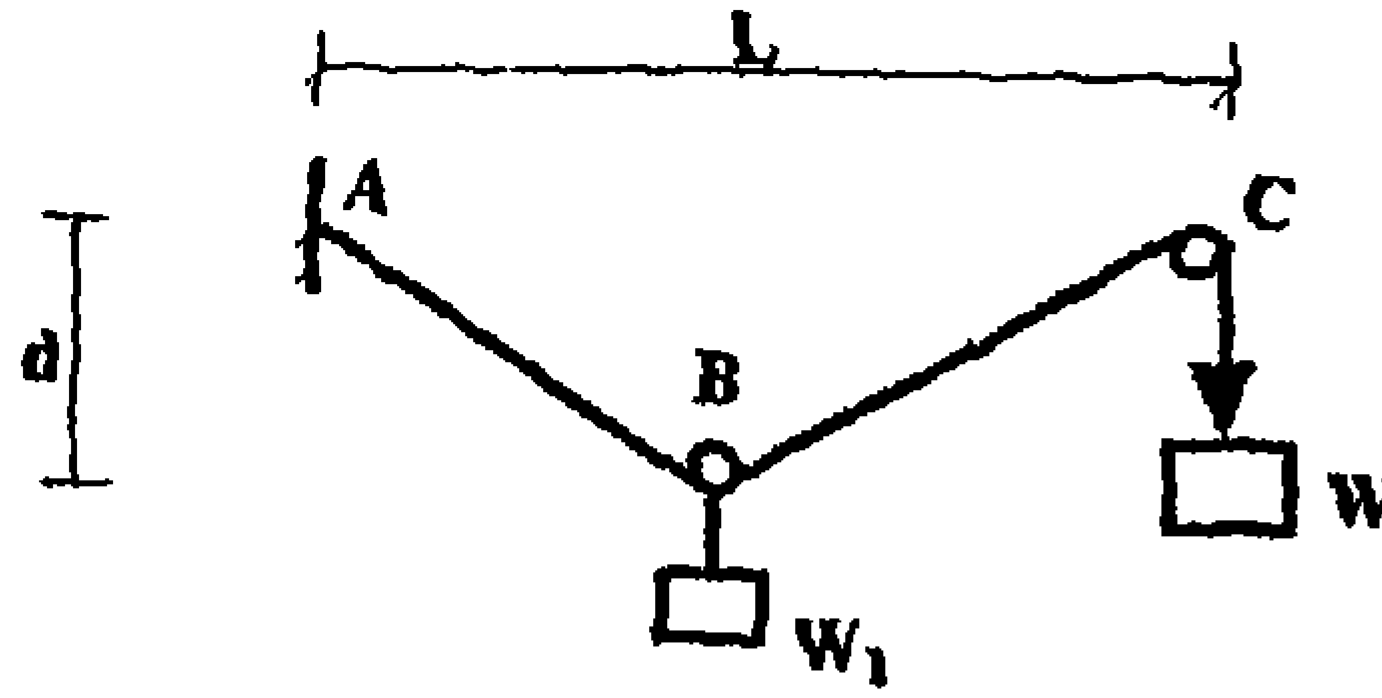
$$Y - 3\,W + P\sin 60 = 0$$

$$\therefore\ X = \frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{4} - 1\right)W$$

$$Y = \left(\frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)W$$

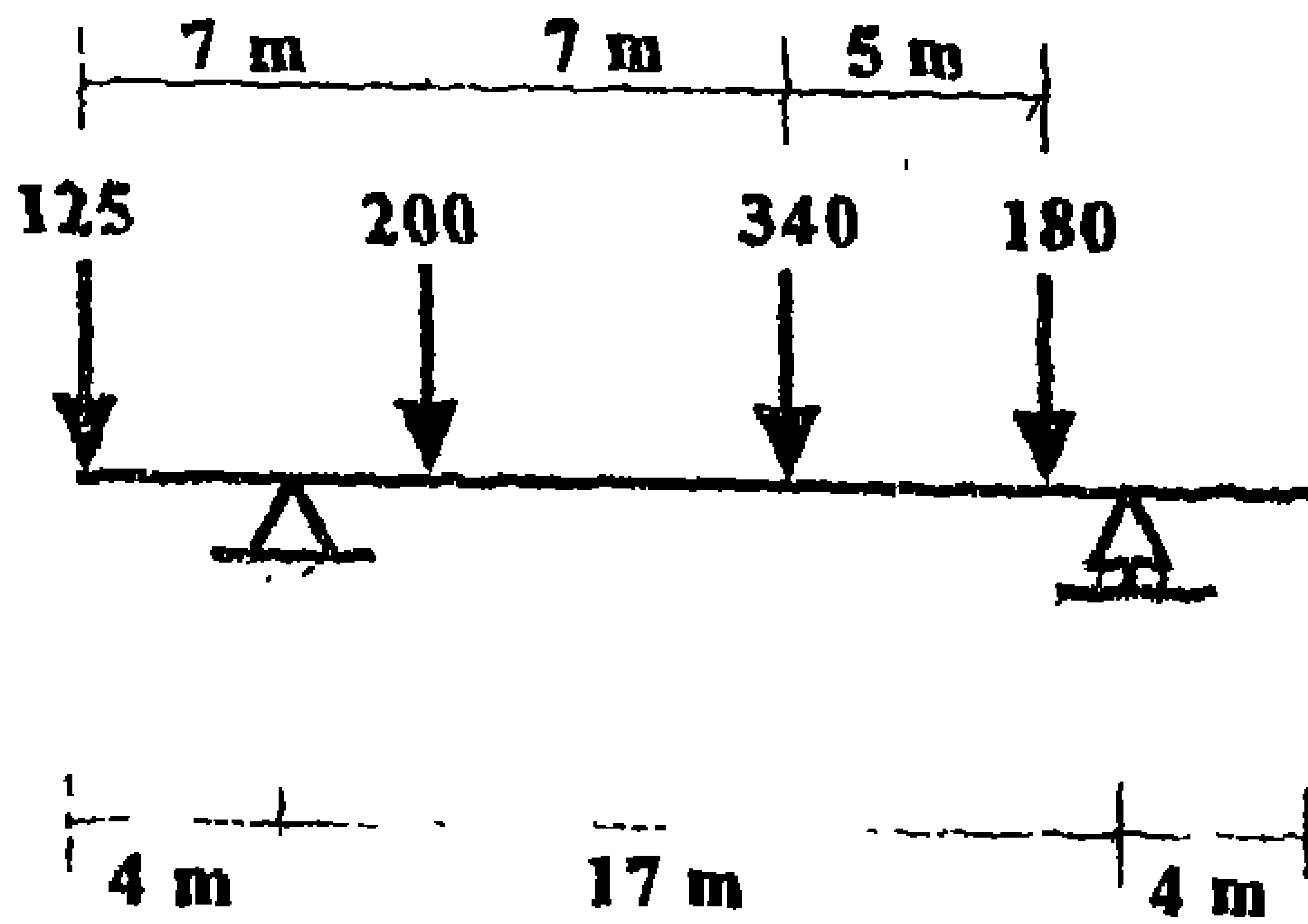
تمارين

١ - بكرة خفيفه B معلق بها ثقل W_1 وهي مركبة على حبل خفيف A B C مثبت طرفه A و يمر طرفـه الأخر حول بكرة ثابتة صغيرة ملساء C ليتدلى منه ثقل W . عين المسافة L بدلالة L ، W ، W_1 .



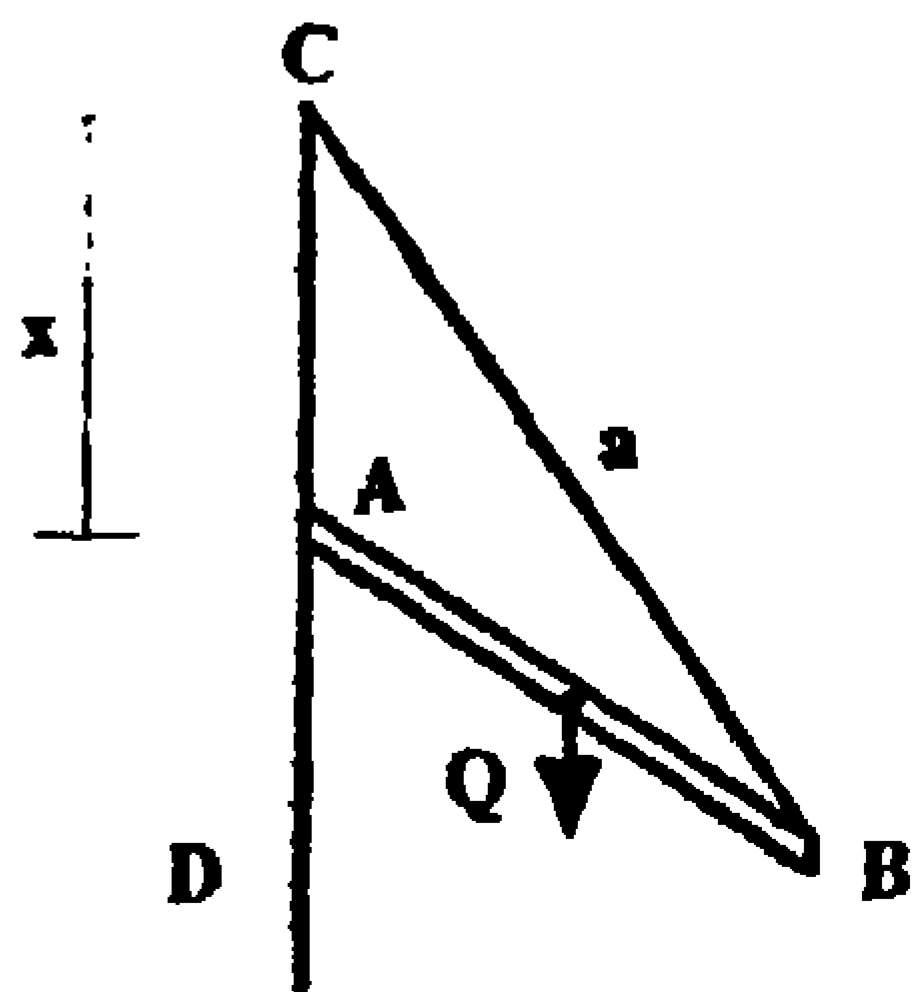
الجواب $\left[d = \frac{1}{2} L \sqrt{\left(2w/w_1\right)^2 - 1} \right]$

٢- عين ردود فعل مرتكـزي العتب A B القوى بالكجم و الأبعاد بالمتر ، و ذلك بالطرق التحليلية و البيانية .

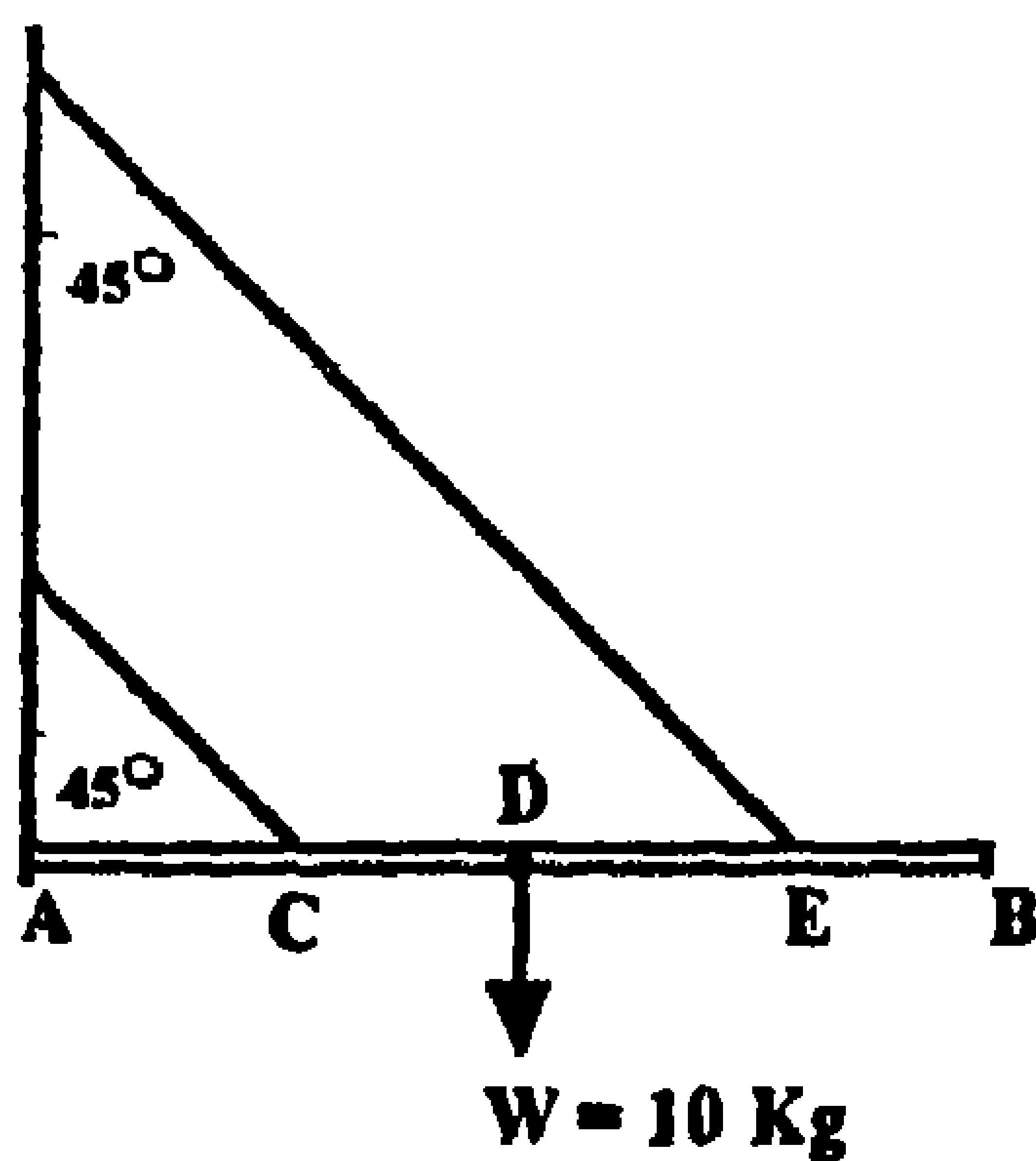


الجواب $\left[R_A = 180\,Kg\ ,\ R_B = 365\,Kg\right]$

٣- قضيب منتظم A B وزنه Q .و طوله l محمول في إحدى نهايته B بخيط B C طولـه a و يرتكـز أيضا في A الموجودة رأسيا أسفل C على حائط راسي أملس كما في الشكل . أوجد وضع الإتزان الممكن للقضيب بدلالة الطول x .



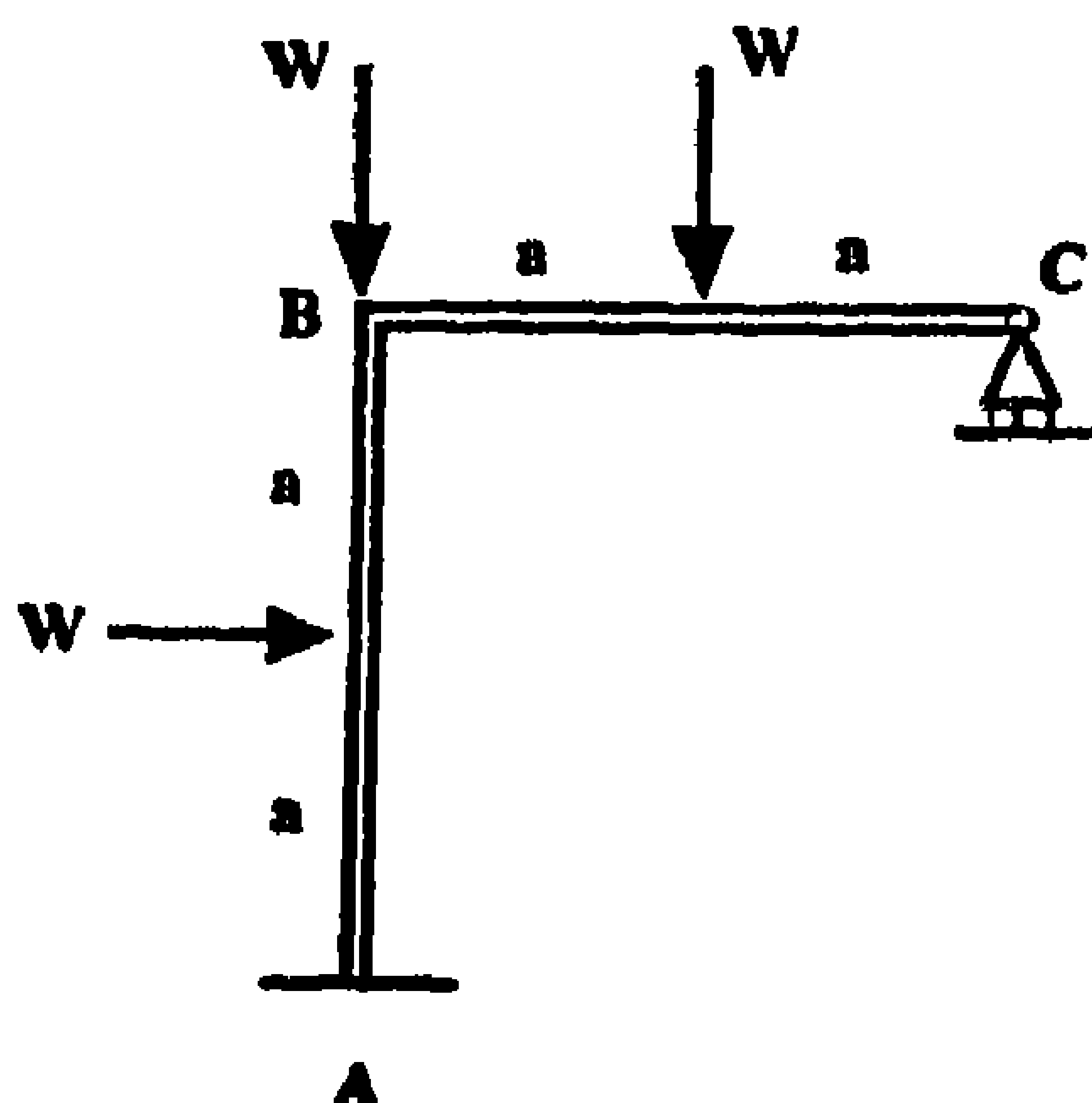
الجواب $\left[x=\sqrt{\left(a^2-l^2\right)/3}\right]$



٤- قضيب منتظم A B وزنه ١٠ كجم معلق في وضـع أفقي على حائط رأسي أملس . و يربطه الى الحـائط خيطان كما في الشكل . عين رد فعـل الحـائط عنـد A و شدي الخيطين .

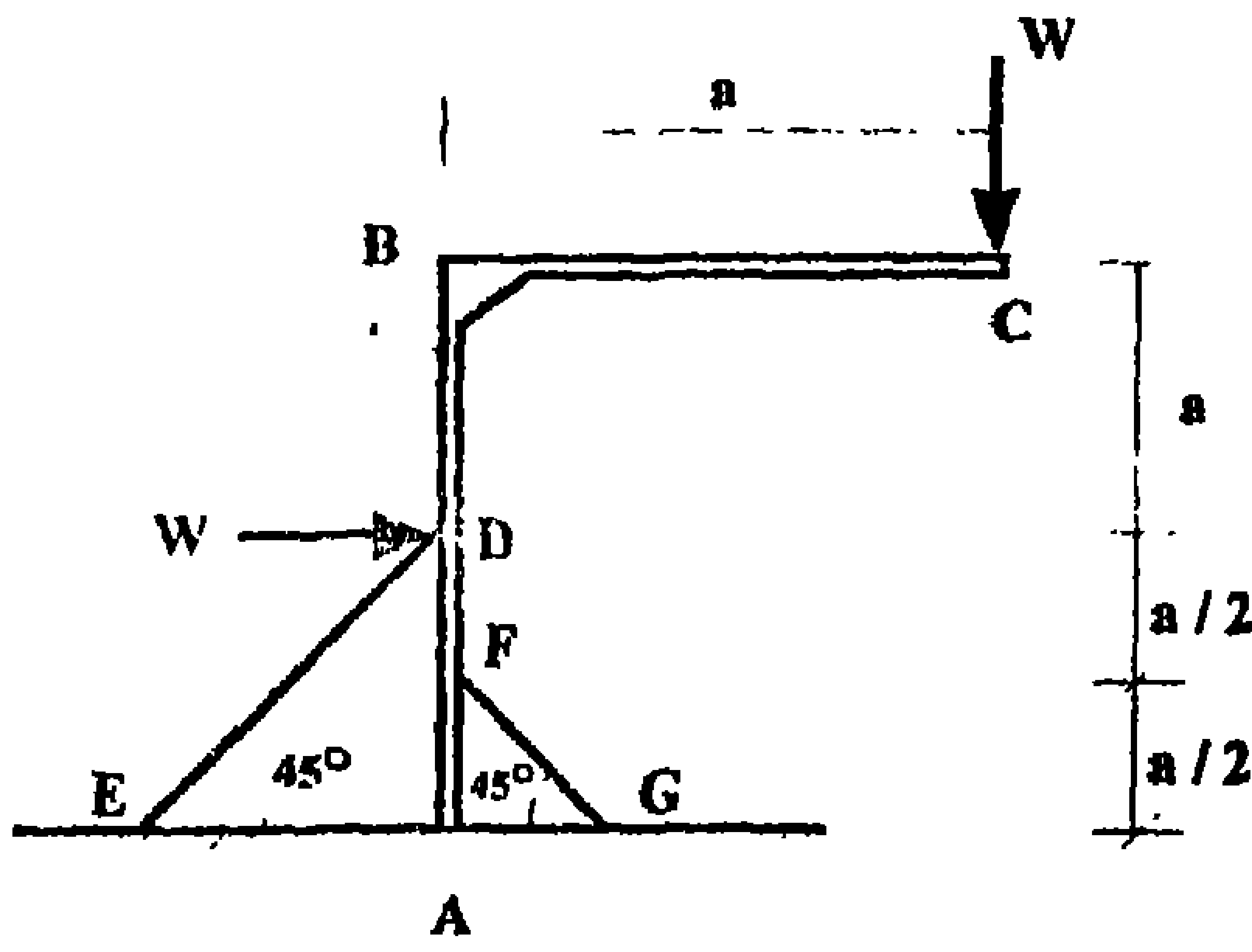
علما بأن طول AB = ٤ متر

و أن AC = CD = DE = EB = 1 m

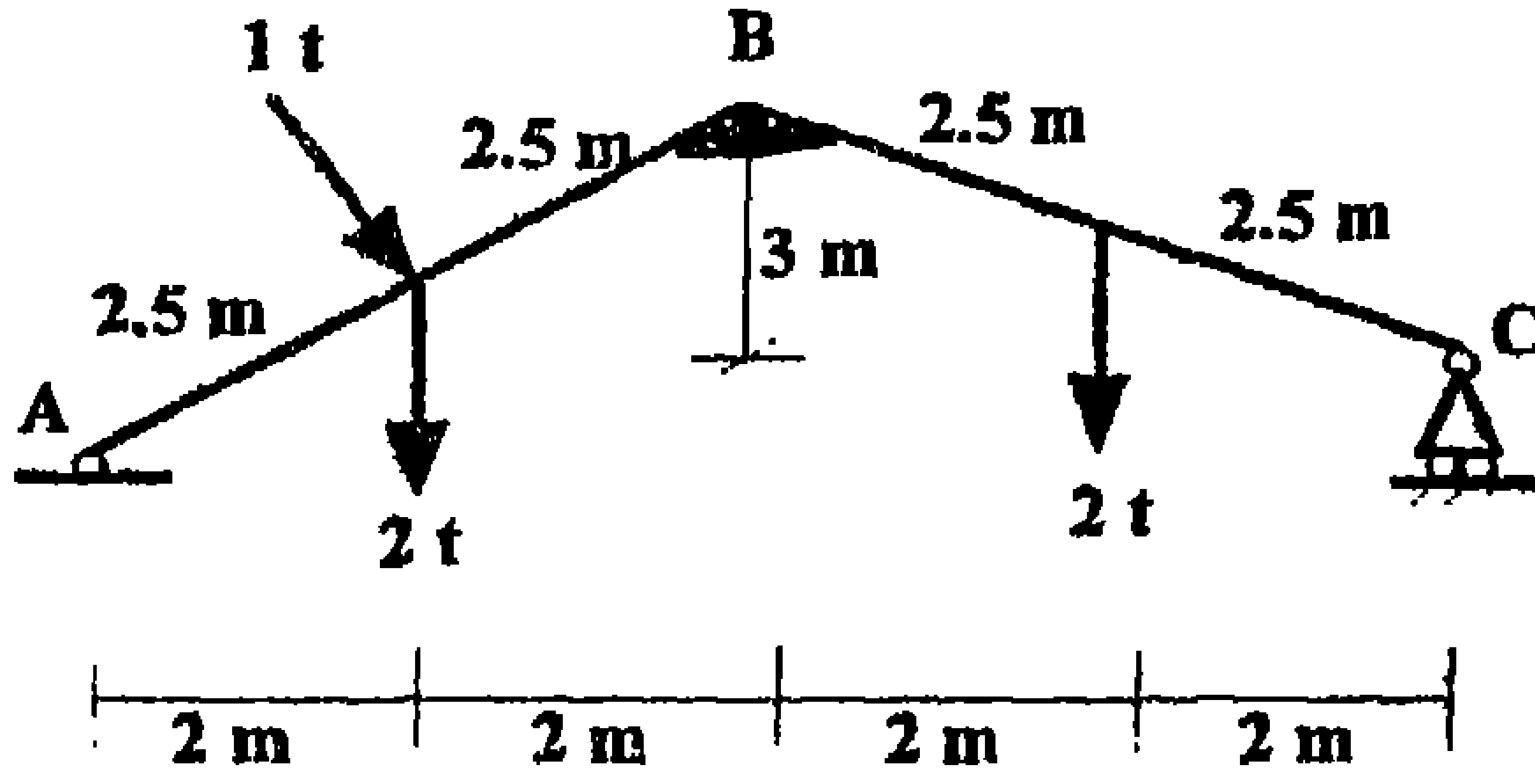


٥- الجسم المتماسك A B C يرتكز مفصليـا في A و ارتكاز حرا في C ، عـين ردي الفعل في A ، C و ذلك تحليليا و بيانيا .

٦- A B C جسم متماسك خفيف قائم الزاوية في B يرتكز بطرفه A على أرض ملساء و ضلعه A B رأسي و يشده إلى الأرض شدادان EG ، ED كما في الشكل . أوجد شديهما و رد فعل الأرض في A نتيجة لتأثير القوتين الموضحتين .



٧- A B C هيكل متماسك مثبت مفصليا في A و يرتكز ارتكازاً حراً في C و يحمل الأحمال الموضحة بالشكل. احسب ردود الفعل في A ، C .

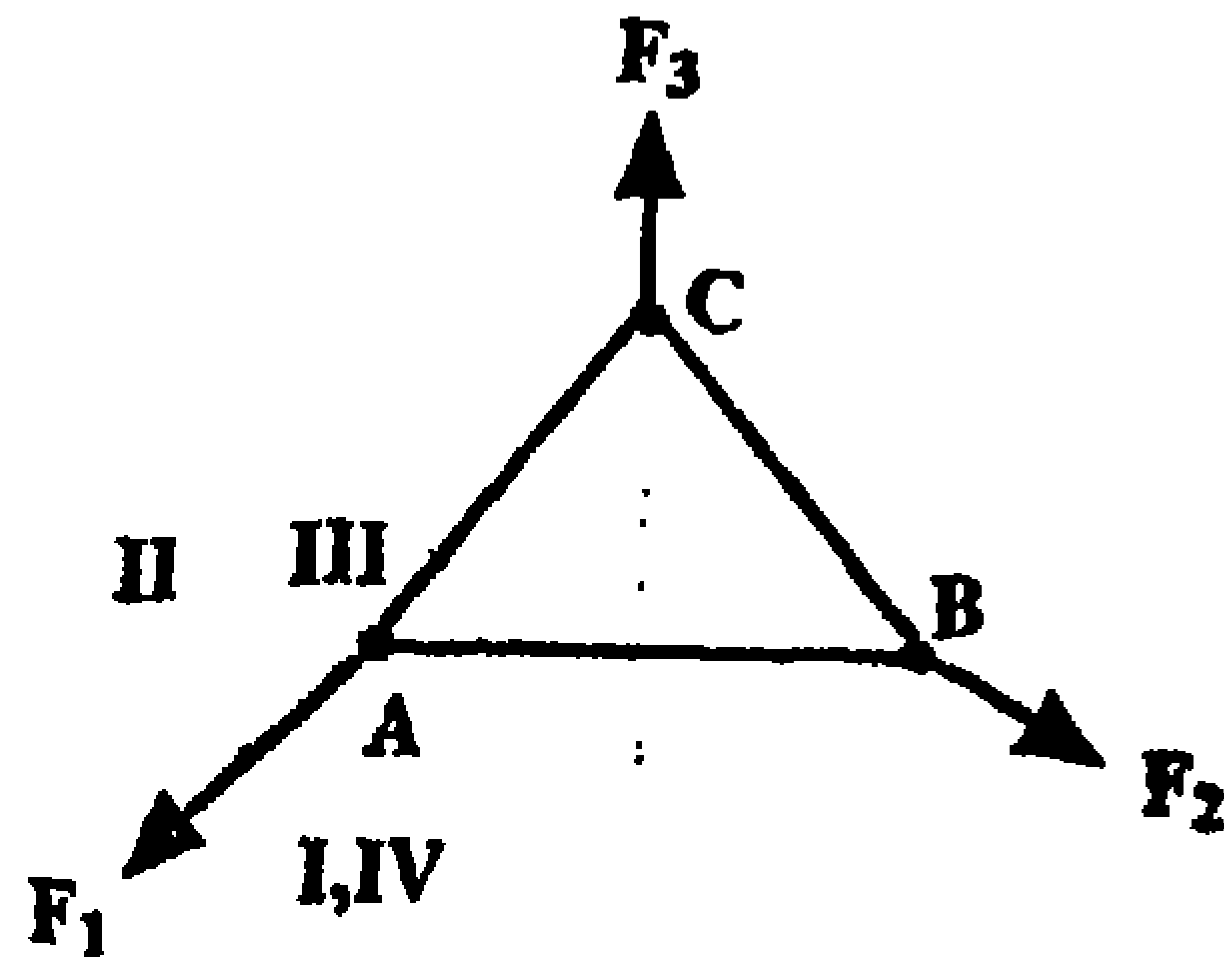


الباب الخامس

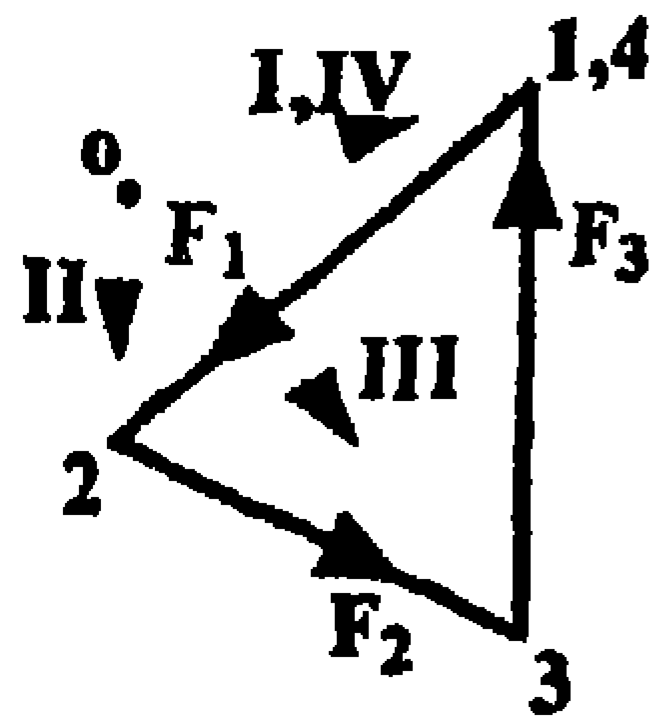
إتزان مجموعة الجسيمات

اذا اتصلت مجموعة من الجسيمات المتزنة فيما بينها بأعضاء خفيفة و أثرت القوى الخارجية على الجسيمات فقط دون الأعضاء فإن المجموعة ككل تتزن تحت تأثير القوى الخارجية فقط بينما يتزن كل جسيم على حده تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه فضلاً على ردود الأفعال للأعضاء الخفيفة التي يتصل بها و هي القوى المحورية في هذه الأعضاء .

و اتزان الجسم أو المجموعة ككل لها ثلاثة شروط تحليلية لإتزان القوى الخارجية على المجموعة و بيانياً يجب أن تمثل بمضلع قوى مقفل و مضلع حبلي مقفل كما في الشكل (٥ – أ ، ب) .

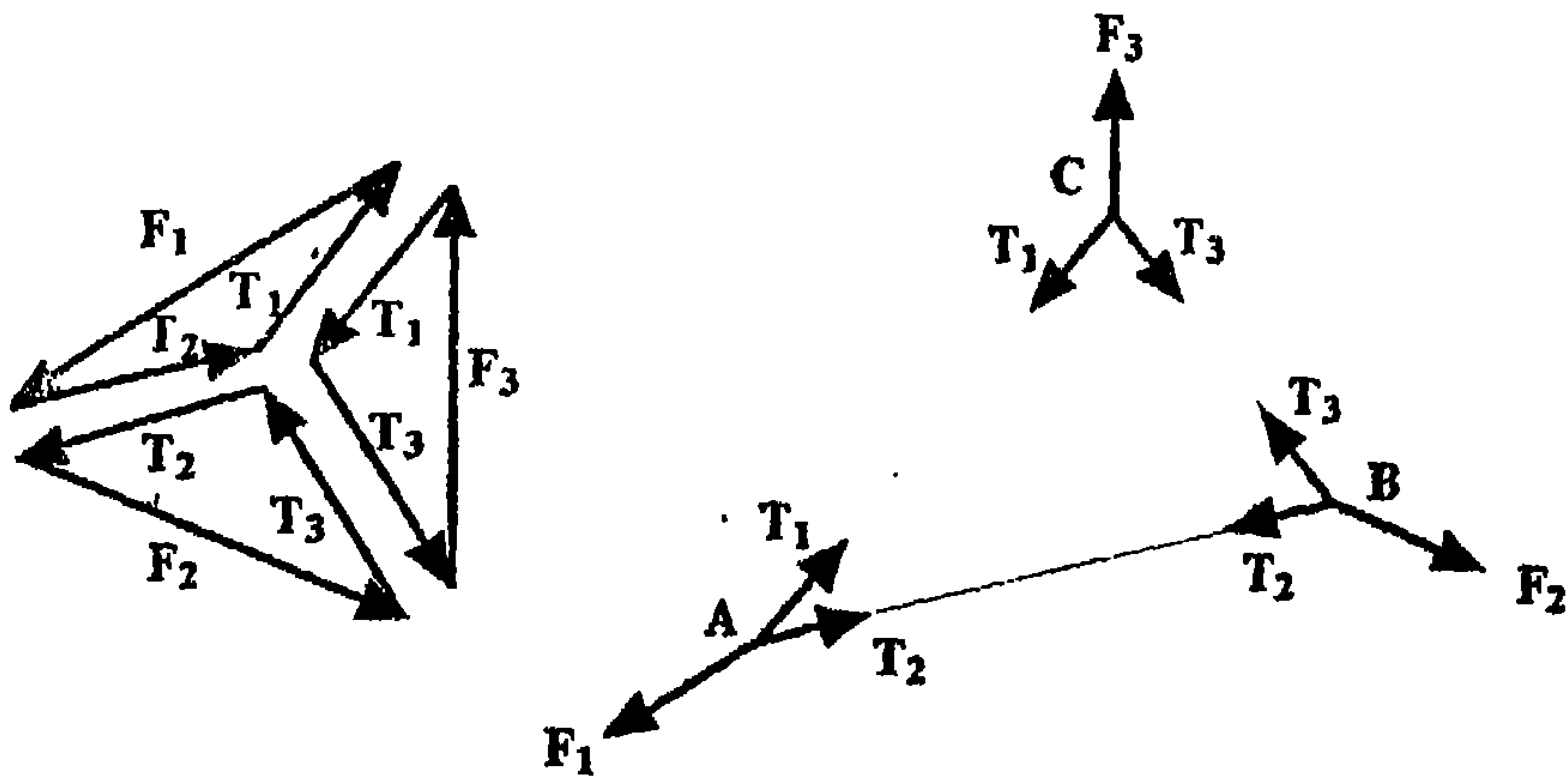


شكل (٥ – أ) المضلع الحبلي مقفل



شكل (٥ – ب) مضلع القوى مقفل

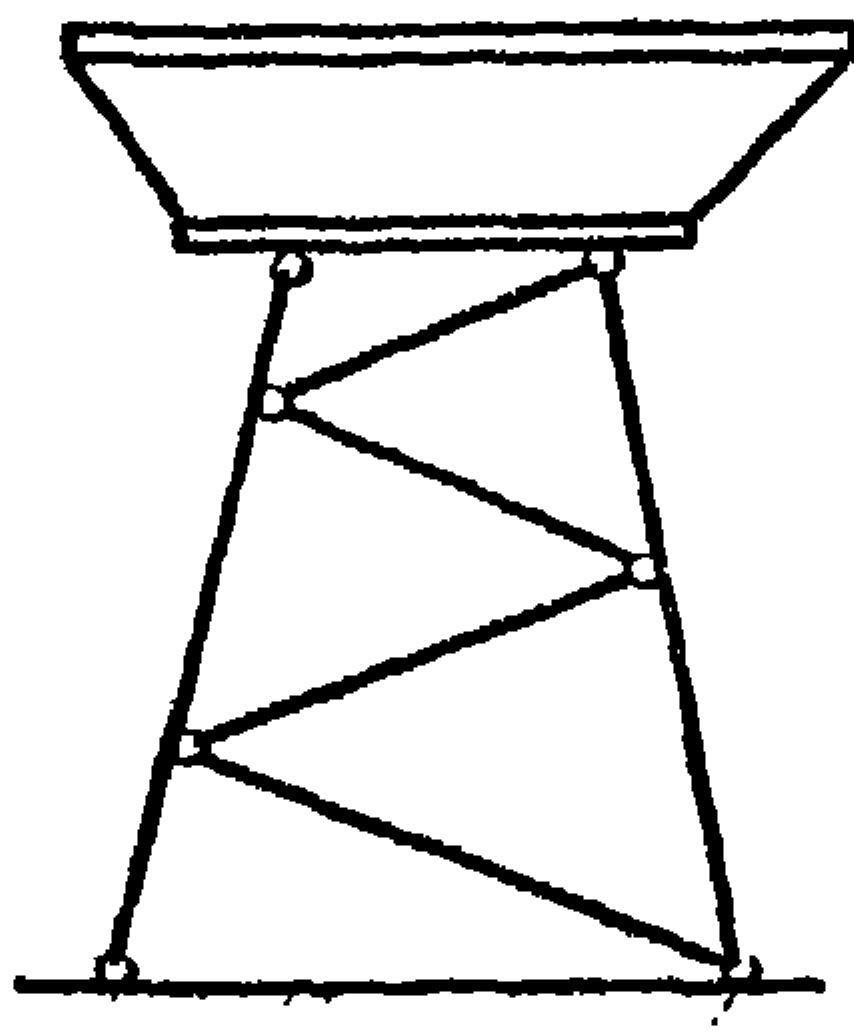
اتزان الجسيم يتحقق بشرطين تحليليين فقط و بيانيا بشرط واحد فقط هو مضلع قوى مقفل للقوى الخارجية و القوى المحورية .

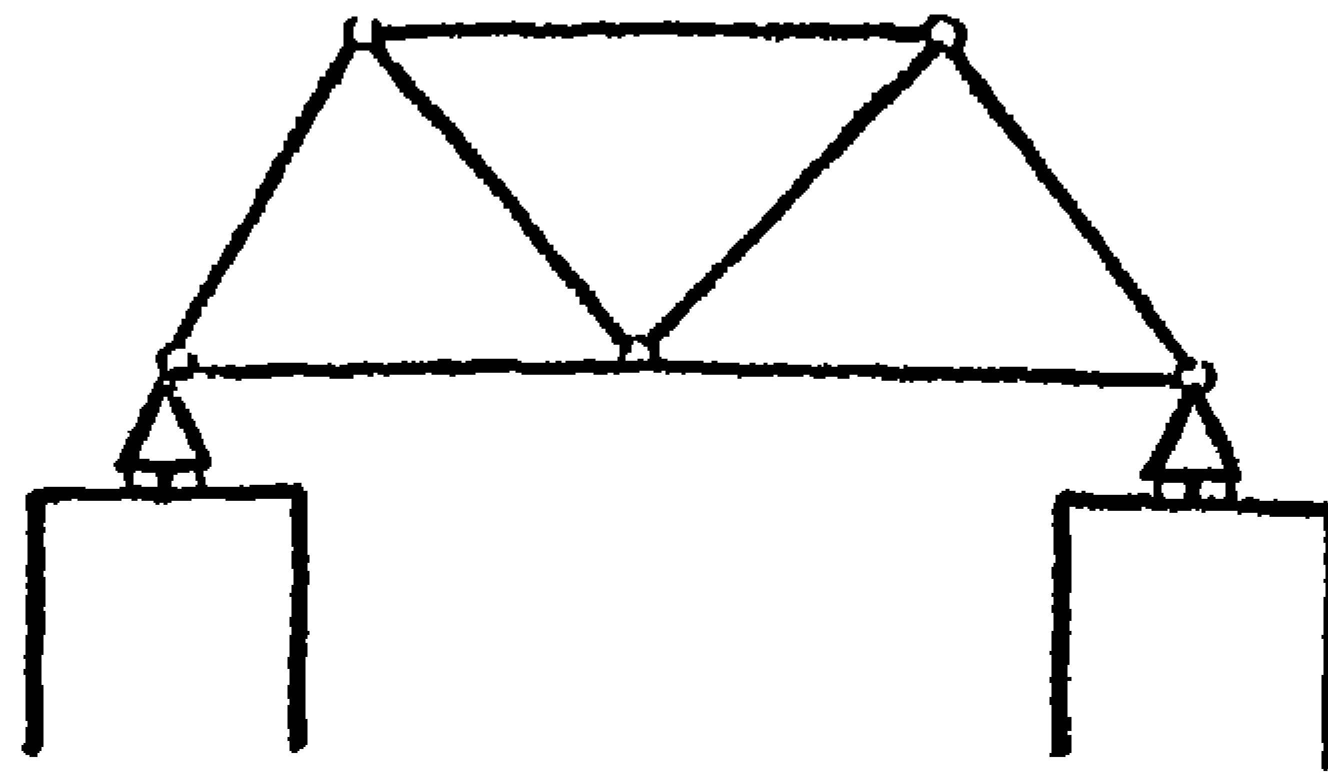


الهياكل المحملة بالمفاصل (الجمالونات أو الشبكيات

Trusses) :

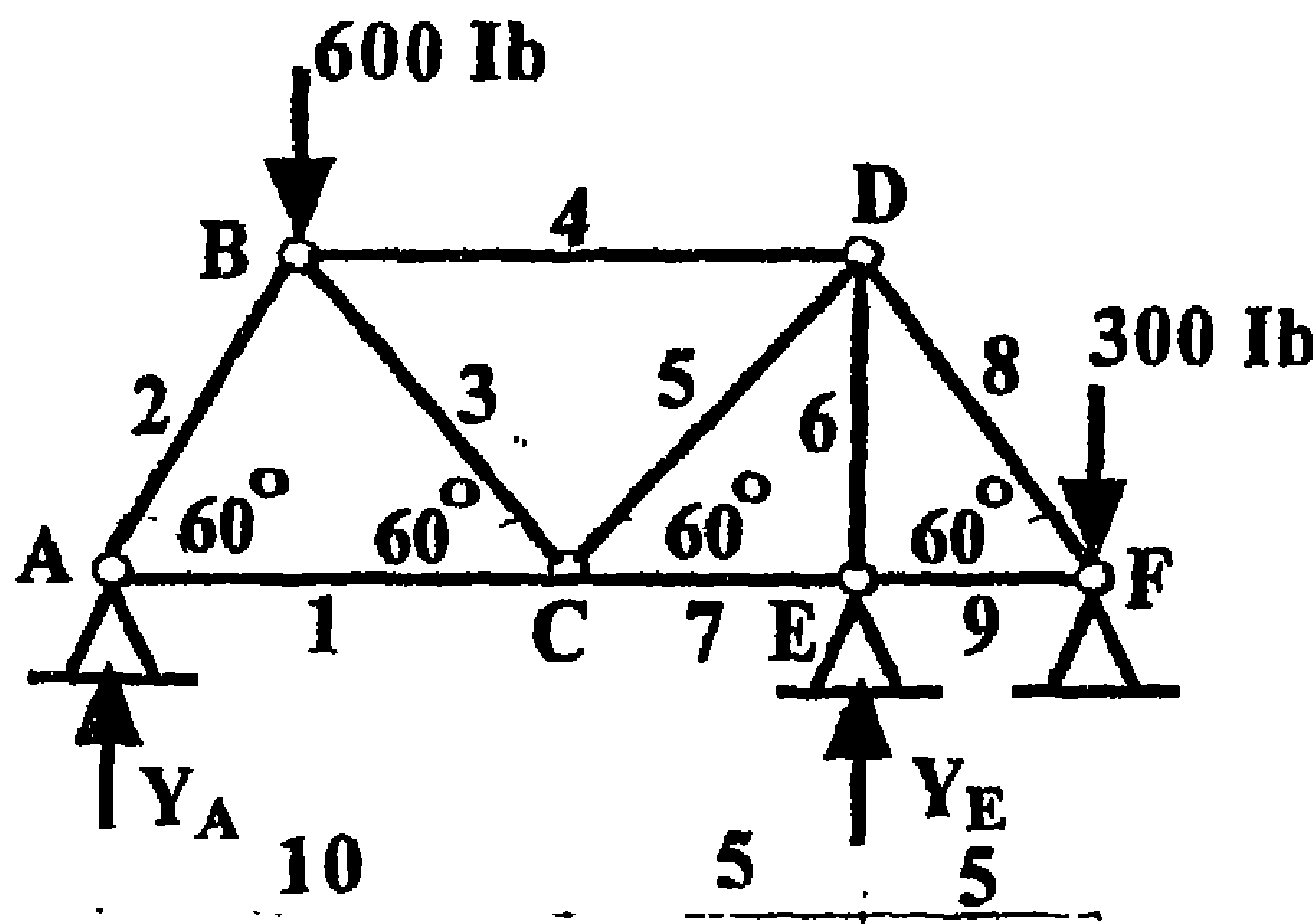
تتكون الهياكل الإنشائية المستخدمه في الكبارى و الأبراج المعدنيه العالية من مجموعه من القضبان المستقيمه الخفيفة الوزن بالنسبه لأحمال الواقعة على الهياكل ، و تتصل تلك القضبان مع بعضها البعض عن طريق مفاصل ملساء بقدر الإمكان و تسمى القضبان بأعضاء الهيكل . و يلاحظ أن الأحمال التي تؤثر على الهيكل تقع مباشره على المفصل . و لذا فإن أعضاء الهيكل تعتبر خفيفه و غير محمله فتعمل أما سواند أو شدادات أي أنها أعضاء مضغوطة أى ضاغطه للمفصل أو أعضاء مشدودة أى تعمل كشداد للمفصل . و من حيث الدراسة الإستاتيكية فإنه يمكن اعتبار مفاصل الهيكل مجموعة من الجسيمات المتزنة تحت تأثير الأحمال الخارجية و قوى الشد أو الضغط (القوى المحورية)الناتجة من الأعضاء المتصلة بالمفاصل . و أبسط وحدة هندسيه من عدة خلايا مثلثية . و نظرا لأن الأحمال الخارجية المؤثرة على هذه الهياكل تؤثر على المفاصل فقط فيطلق عليها بالهياكل المحمله المفاصل . و لهذا فيدرس اتزان كل مفصل باعتباره جسيم واقع تحت تأثير مجموعة من القوى الملتقيه في المفصل ذاته و هذه القوىتتألف من الأحمال الخارجية و كذا ردود فعل الأعضاء المتصله بالمفاصل من شدود أو ضغوط .





أمثلة

مثال ١:



في الهيكل المفصلي المبين بالشكل أوجد جميع القوى المحورية في جميع أعضاء الهيكل:

الحل:

بدراسة اتزان المجموعة ككل يتم الحصول على y_E ، y_A كما يلي :

$$\sum M_a = 0$$

$$y_E \times 15 - 300 \times 20 - 600 \times 5 = 0$$

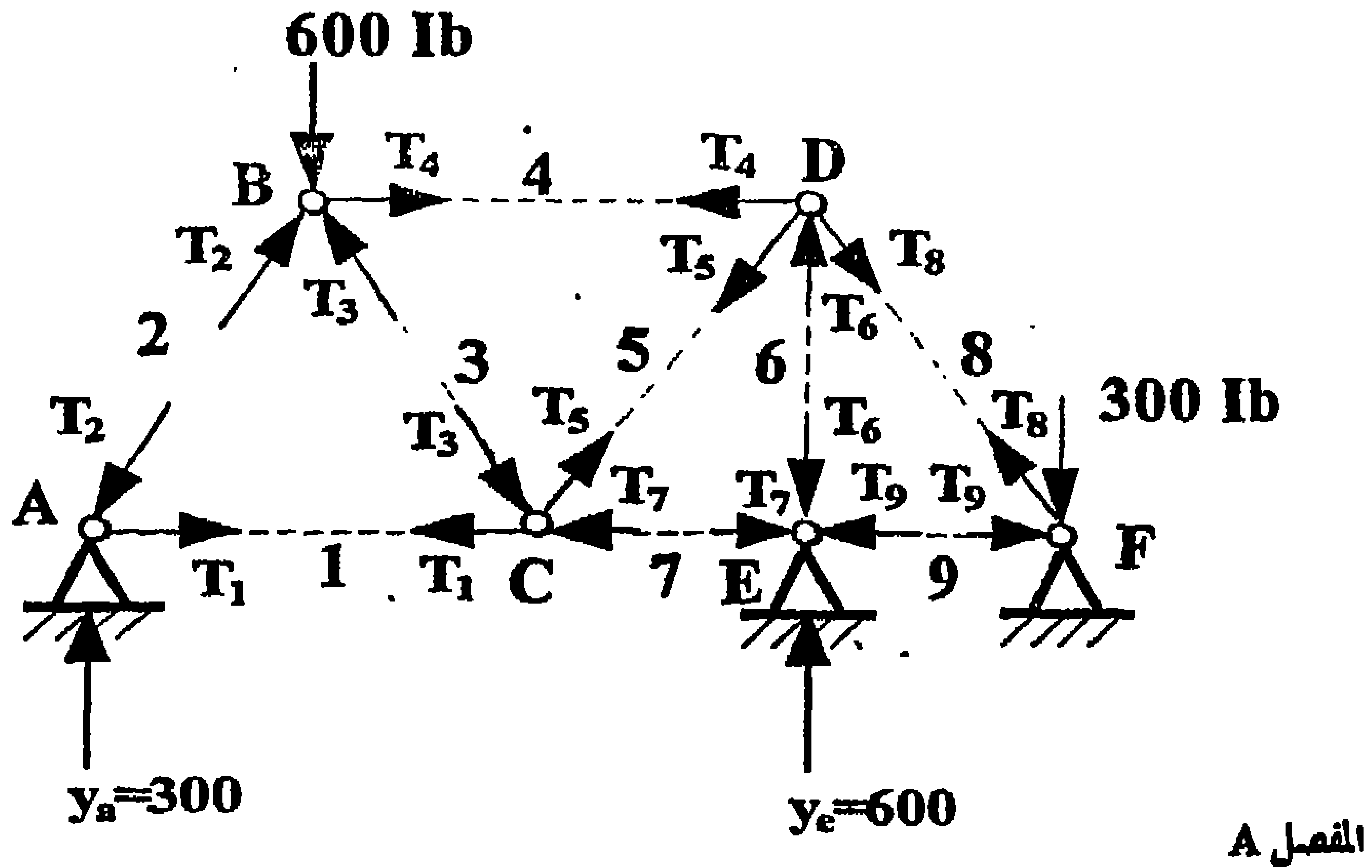
$$y_E = 600 \quad Ib$$

$$\sum M_E = 0$$

$$y_A \times 15 = 600 \times 10 - 300 \times 5 = 0$$

$$y_A = 300 \quad Ib$$

ثم بدراسة كل مفصل على حده :



المفصل A

$$\sum y = 0$$

$$300 - T_2 \sin 60 = 0$$

$T_2 = 346$ Ib قوة ضغط

$$\sum x = 0$$

$$T_1 - T_2 \cos 60 = 0$$

$T_1 = 173$ Ib قوة شد

مفصل B

$$\sum y = 0$$

$$T_2 \sin 60 + T_3 \sin 60 - 600 = 0$$

$T_3 = 346$ Ib قوة ضغط

$$\sum x = 0$$

$$T_4 + 346 \cos 60 - 346 \cos 60 = 0$$

$T_4 = 0$ Ib

$$\sum x = 0$$

$$T_4 + 346\cos 60 - 346\cos 60 = 0$$

$$T_4 = 0 \quad lb$$

مفصل C

$$\sum y = 0$$

$$T_3 \sin 60 - T_5 \sin 60 = 0$$

$T_5 = 346 \quad lb$ قوة شد

$$\sum x = 0$$

$$T_5 \cos 60 + T_3 \cos 60 - T_7 - T_1 = 0$$

$T_7 = 173 \quad lb$ قوة ضغط

مفصل D

$$\sum y = 0$$

$$T_5 \sin 60 + T_8 \sin 60 - T_6 = 0$$

$$\sum x = 0$$

$$T_8 \cos 60 - T_5 \cos 60 - T_4 = 0$$

$T_8 = 346 \quad lb$ قوة شد

$T_6 = 600 \quad lb$ قوة ضغط

المفصل E

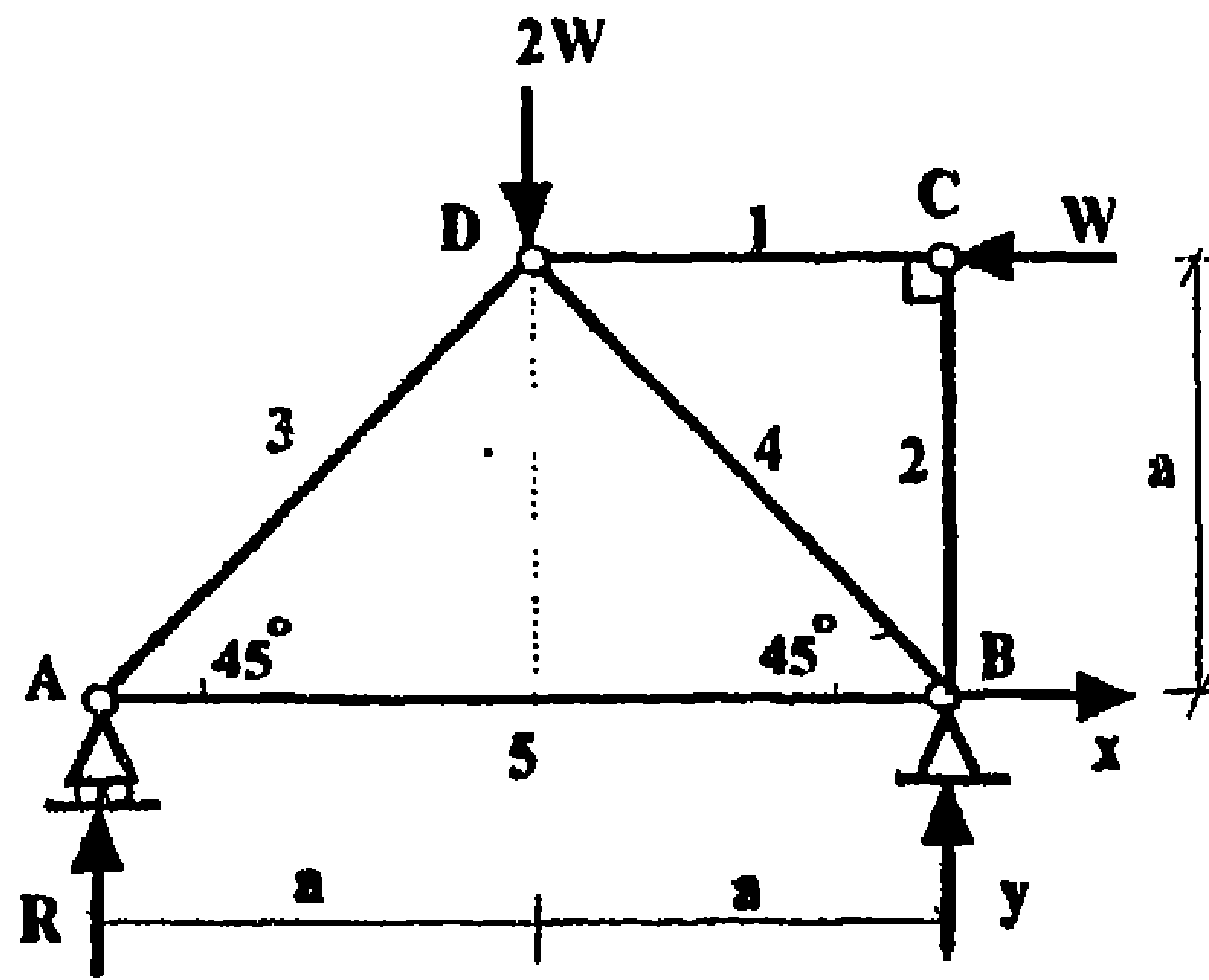
$$\sum x = 0$$

$$T_7 - T_9 = 0$$

$T_9 = 173 \quad lb$ قوة ضغط

مثال ٢ :

الهيكل المفصلي المبين يرتكز ارتكاز بسيط في A و على مفصل ثابت B أوجد ردي فعل المرتكزين و القوى المحورية في القضبان.



الحل :.

بدراسة اتزان المجموعة ككل يتم الحصول على R ، y ، x و ذلك بأخذ العزوم حول B

$$\sum M_B = 0$$

$$Wa + 2Wa - R2a = 0$$

$$R = \frac{3}{2}W$$

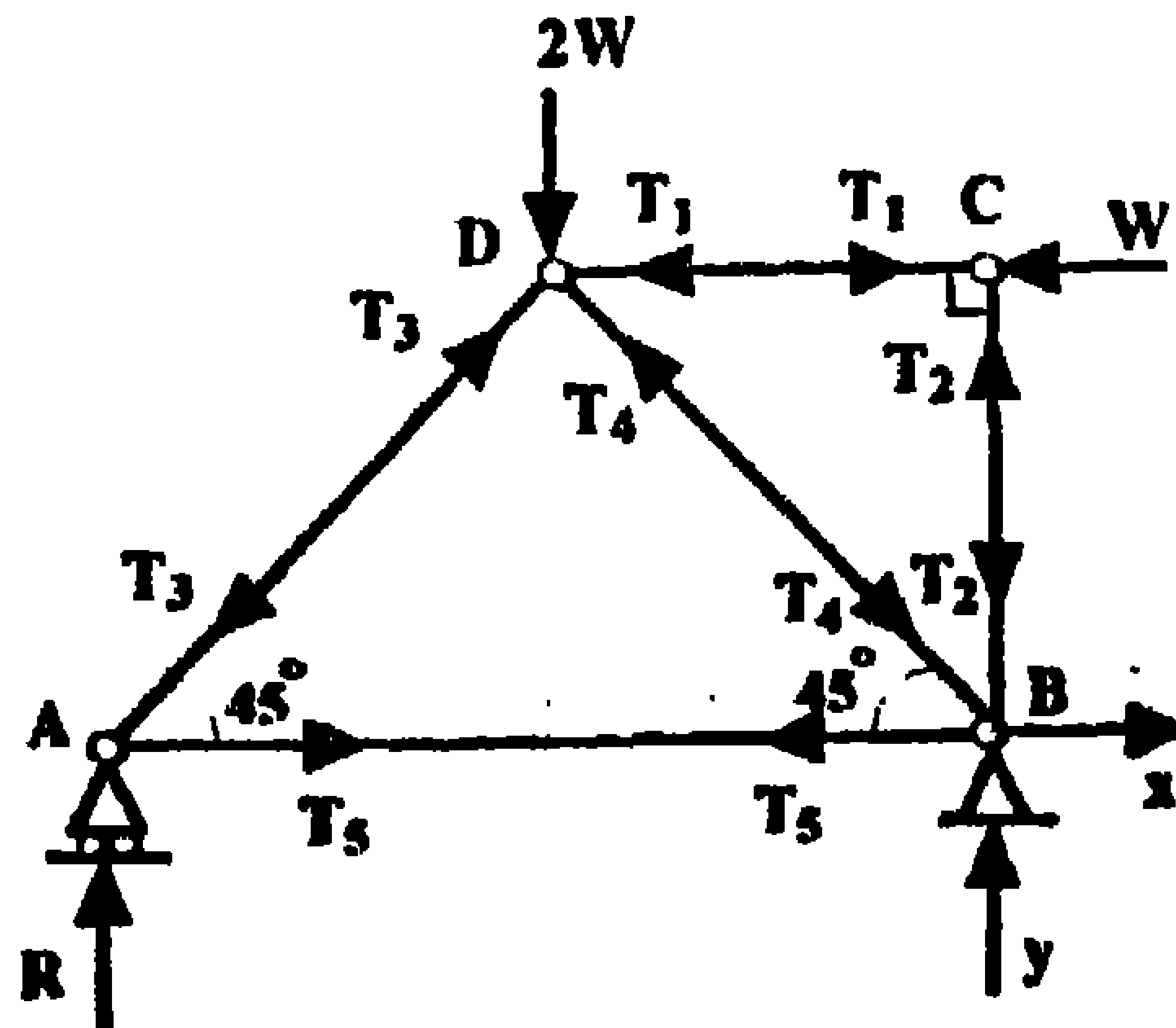
$$\sum x = 0$$

$$X = W$$

$$\sum y = 0$$

$$Y = 2W - 1.5W$$

$$= 0.5W$$



اتزان المفصل C

$$\sum x = 0$$
$$T_1 - W = 0$$
$$T_1 = W$$

$$\sum y = 0$$
$$T_2 = 0$$

اتزان المفصل D

$$\sum x = 0$$
$$T_3 \cos 45 - T_1 - T_4 \cos 45 = 0$$
$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}} = W$$

$$\sum y = 0$$
$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 2W$$

من المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$T_3 = \frac{3W}{\sqrt{2}} \quad , \quad T_4 = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

اتزان المفصل A

$$\sum x = 0$$
$$T_5 - \frac{T_3}{\sqrt{2}} = 0$$
$$T_5 = \frac{T_3}{\sqrt{2}} = \frac{3W}{2}$$

و مما سبق يمكن تلخيص خطوات الحل فيما يلي :

خطوات حل المسائل المتعلقة باتزان الجسيمات

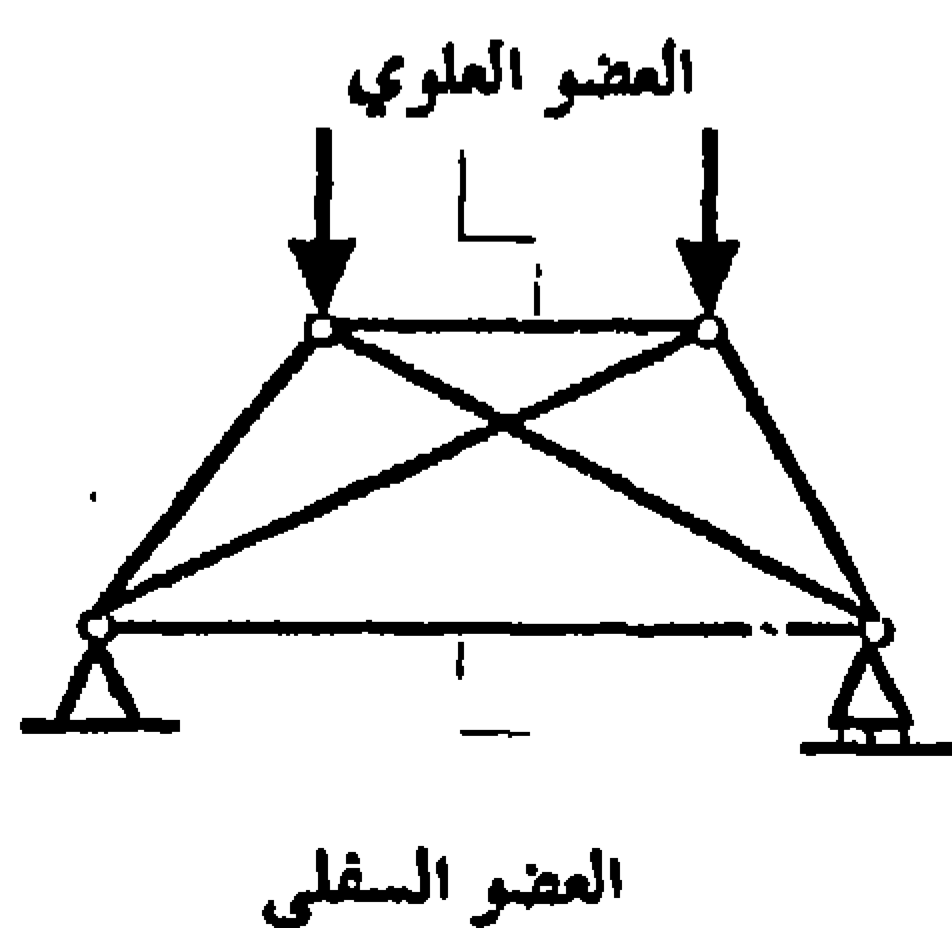
١ – يأخذ اتزان المجموعة ككل كما لو كانت جسم واحد متماسك و نعين من اتزانه ردود الأفعال الخارجية و ذلك بتطبيق " $\sum M = 0$ و $\sum F_Y = 0$ و $\sum F_X = 0$ مع ملاحظة أنه لاتظهر القوى المحورية في الهيكل "

٢ – يؤخذ اتزان عدد من الجسيمات كل منها على حده بما يعطي عدد من المعادلات مساويا لعدد المجاهيل .

أ – و يفضل أن نبدأ بجسيم يلتقي فيه مجهولان فقط أو أقل .

ب – ثم نسلسل من الجسيم الأول الى جسيم آخر لا يزيد مجاهيله عن أثنان و هكذا ...." الجسيم هو المفصل " علما بأنه في اتزان الجسيم يطبق $\sum F_Y = 0$ و $\sum F_X = 0$.

٣ – نتأكد من الحل بأن أي مفصل من المفاصل في حالة اتزان .



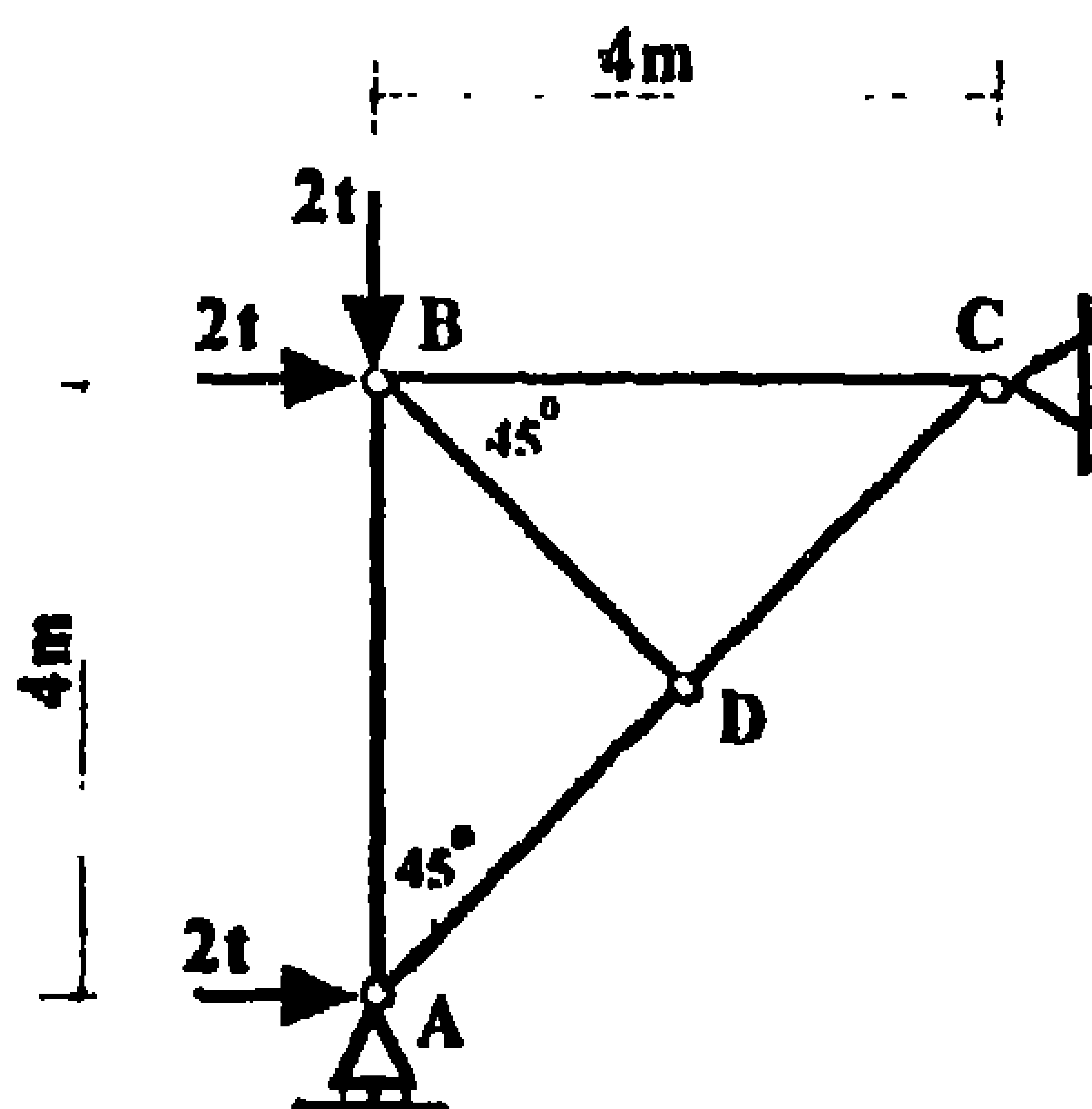
ملاحظة : يجب أن نتذكر قانون الفعل و رد الفعل عند الإنتقال من جسيم إلى جسيم آخر .

ملاحظة : غالبا في الجمالونات " Trusses "

العضو الخفيف العلوى غالبا ما يكون ضغط

العضو الخفيف السفلي غالبا ما يكون شد

مثال ٣ :



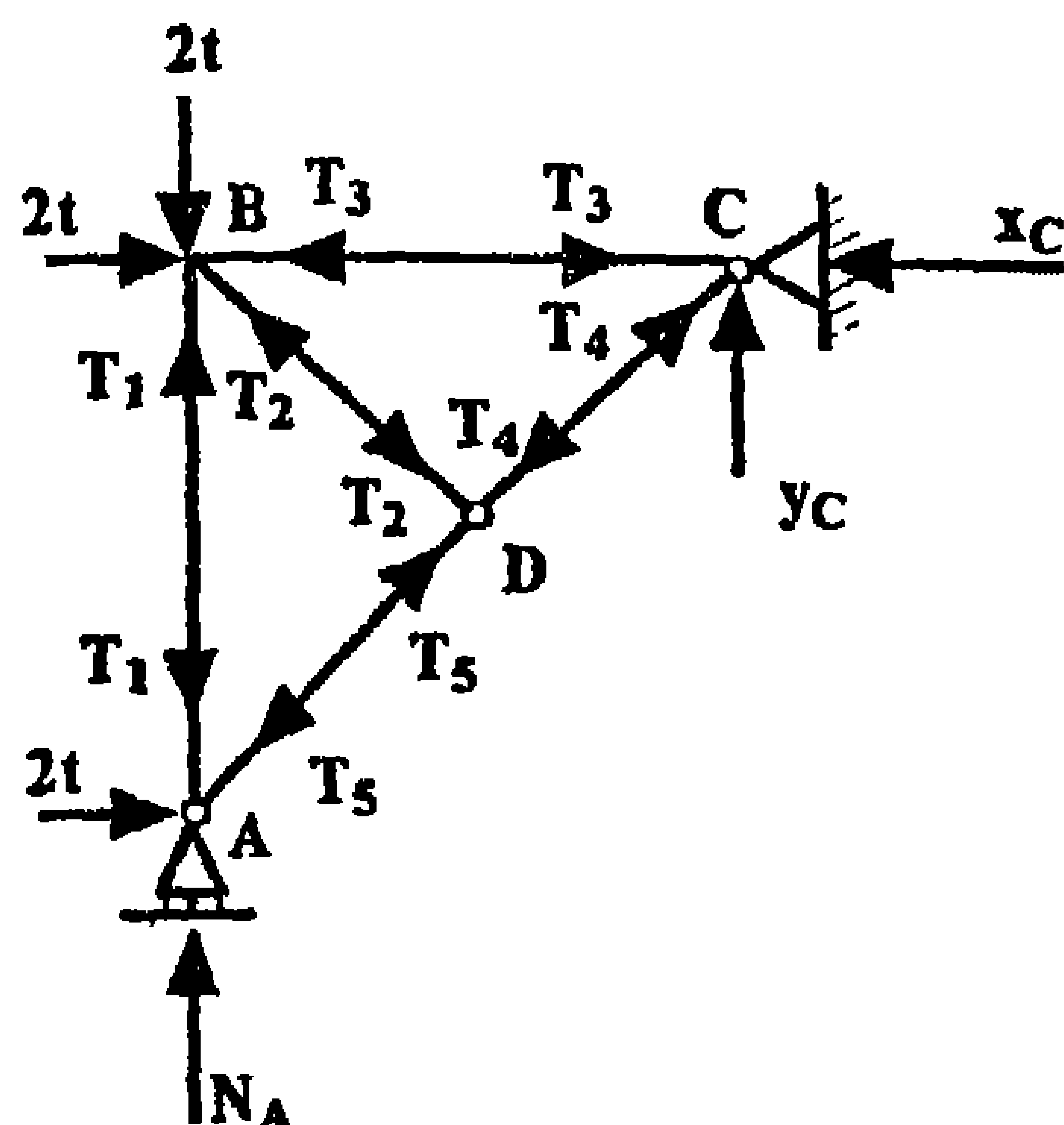
هيكل مفصلي محمل المفاصل و يرتكز على ركائز خارجيه.

١ – عين ردود فعل الإرتكاز عند A و C .

٢ – عين القوى المحورية في القضبان الخفيفة AB و AC و DC و BC .

الحل:

١ - يأخذ اتزان الهيكل ككل كأنه جسم متماسك و نعين من اتزانه ردود الأفعال الخارجية (لا تظهر القوى المحورية في الهيكل) .



$$\Sigma M_C = 0$$
$$2(4) + 2(4) - N_A(4) = 0$$
$$N_A = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_X = 0$$
$$2 - x_C + 2 = 0$$
$$x_C = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N_A - 2 + y_C = 0$$
$$y_C = -2 \text{ t}$$

٢ - للحصول على القوى المحورية للقضبان الخفيفة ، نأخذ اتزان المفصل كلّ على حده بإعتبار أن كل مفصل جسيم متزن .

المفصل A

$$\Sigma F_x = 0$$
$$2 - T_5 \sin 45 = 0$$
$$T_5 = 2\sqrt{2} \cdot t$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$N_A - T_1 - T_5 \sin 45 = 0$$
$$4 - T_1 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$T_1 = 2t$$

المفصل B

$$\sum F_y = 0$$

$$T_1 - 2 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$2 - 2 + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_2 = 0$$

المفصل C

$$\sum F_y = 0$$

$$y_C + T_4 \sin 45 = 0$$

$$-2 + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_4 = 2\sqrt{2} \ \ t$$

٣ – وللتأكد من الإجابة : نجري الإتزان على أي مفصل من المفاصل .

اتزان المفصل D :

Check :

$$\sum F_x = \frac{T_2}{\sqrt{2}} + \frac{T_5}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}}$$

$$= 0 + \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 0$$

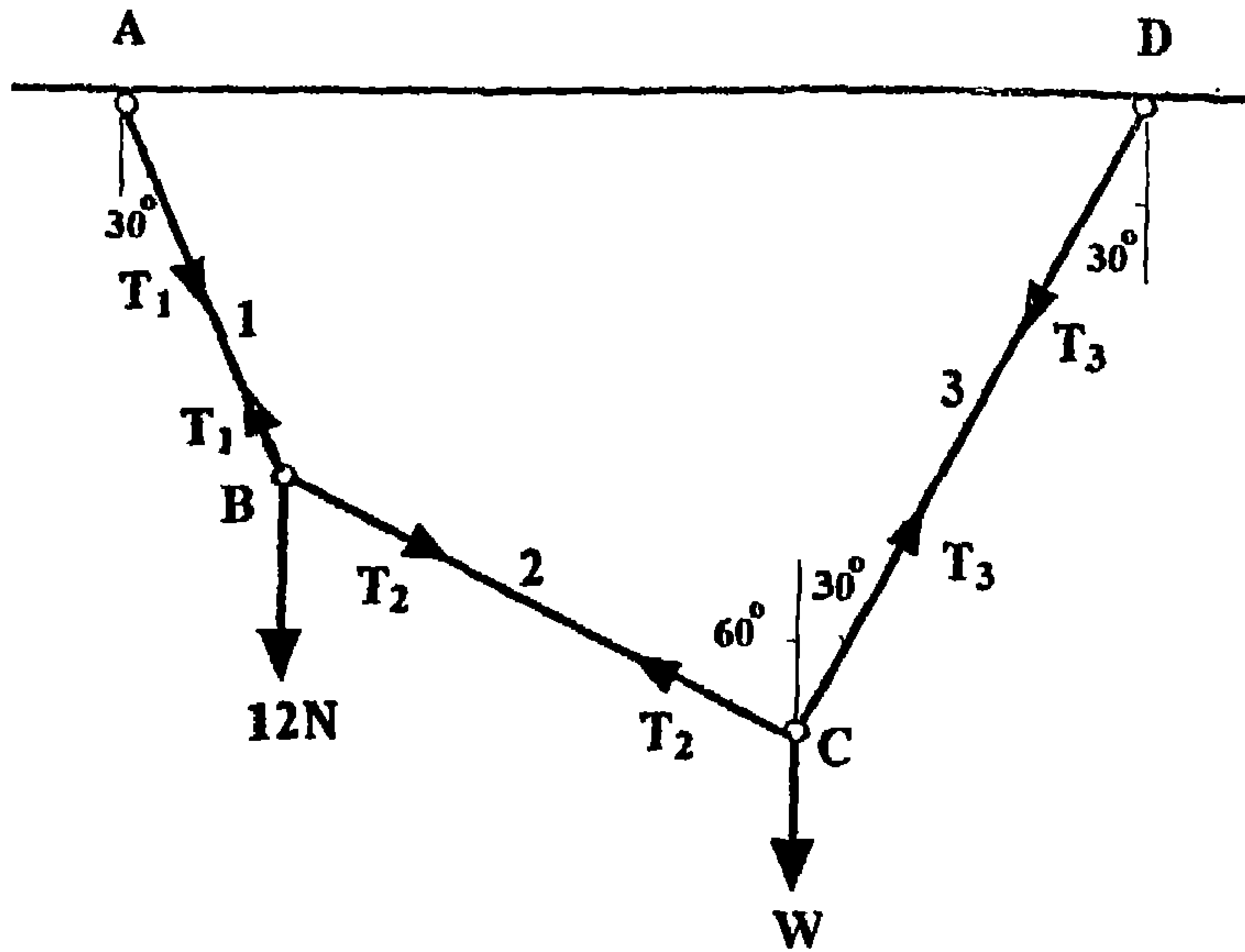
$$\sum F_y = 0$$

النواتج T_2 و T_5 و T_4 صحيحة .

مثال ٤ :

خيط خفيف ABCD يحمل ثقلين احدهما قيمته (٩٢ نيوتن) في B ، الآخر W في C ، و كانت اجزاء الخيط AB ، BC ، CD تميل على الرأسي بزاوية ٣٠°، ٦٠°، ٣٠° على الترتيب.

أوجد W و الشد في أجزاء الخيط الثلاثة .



الحل :

دراسة اتزان العقدة " B " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150}=\frac{T_1}{\sin 60}=\frac{T_2}{\sin 150}$$

$$T_1=\frac{12\sin 60}{\sin 150}=12\sqrt{3}\ \ N$$

$$T_2=\frac{12\sin 150}{\sin 150}=12\ \ N$$

دراسة اتزان العقدة " C " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150}=\frac{T_3}{\sin 120}=\frac{W}{\sin 90}$$

$$T_3=12\sqrt{3}\ \ N$$

$$W=24\ \ N$$

التماثل الإستاتيكي حول محور :

يلزم أن يتوفر فيه شرطين :

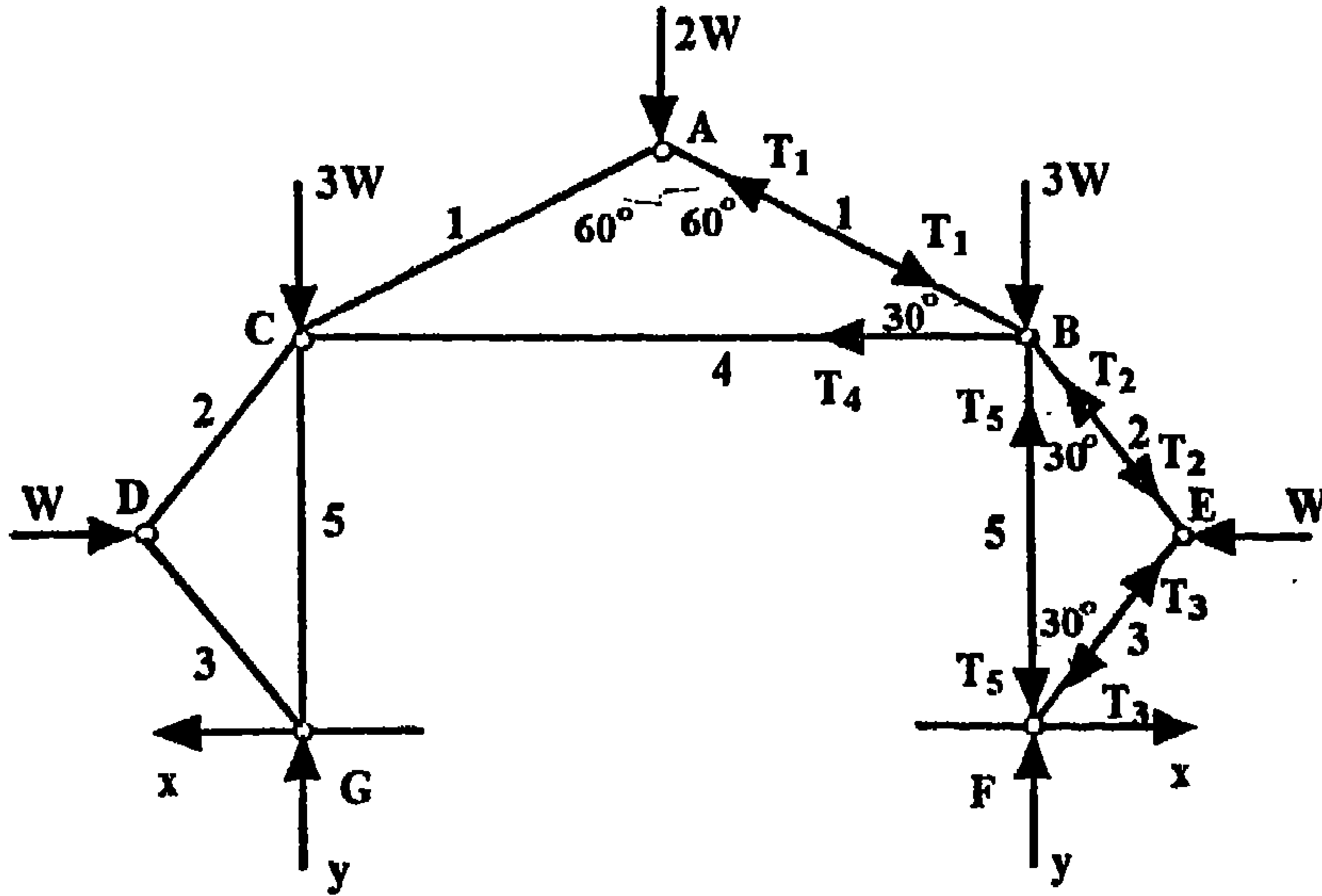
أ – تماثل هندسي (زوايا و أبعاد) .

ب – تماثل في القوى .

* في هذه الحالة يكتفي بأخذ اتزان نصف المجموعة فقط مع مراعاة أن نتيجة للتماثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال .

مثال ١ :

عين القوى المحورية و كذلك ردود فعل المفصلين F و G في الهيكل المحمل المفاصل المبين بالشكل تحليليا و بيانيا .



الحل :

أولا تحليليا :

∵ هناك تماثل هندسي ، تماثل للقوى .

∴ تتماثل القوى المحورية في الأعضاء المتناظرة على جانبي محور التماثل .

∵ أنه لم يعطى أبعاد الهيكل لانستخدم اتزان الجسم ككل أولا .

نبدأ بدراسة اتزان المفصل التي لايزيد عدد القوى المجهولة فيها عن الثان .

اتزان المفصل A .

$$\sum F_y = 0$$
$$T_1 \cos 60 + T_1 \cos 60 - 2W = 0$$
$$T_1 = 2W$$

اتزان المفصل E

$$\sum F_y = 0$$
$$T_3 \cos 30 - T_2 \cos 30 = 0$$
$$T_3 = T_2$$

$$\sum X = 0$$
$$T_2 \cos 60 + T_3 \cos 60 - W = 0$$
$$\frac{T_2}{2} + \frac{T_3}{2} - W = 0$$
$$T_2 = T_3 = W$$

اتزان المفصل B

$$\sum F_x = 0$$
$$\therefore T_1 \cos 30 - T_2 \sin 30 - T_4 = 0$$
$$T_4 = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) W$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_5 + T_2 \cos 30 - T_1 \sin 30 - 3W = 0$$

$$T_5 = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) W$$

اتزان المفصل F

$$\sum F_x = 0$$

$$X - T_3 \sin 30 = 0$$

$$X = \frac{W}{2}$$

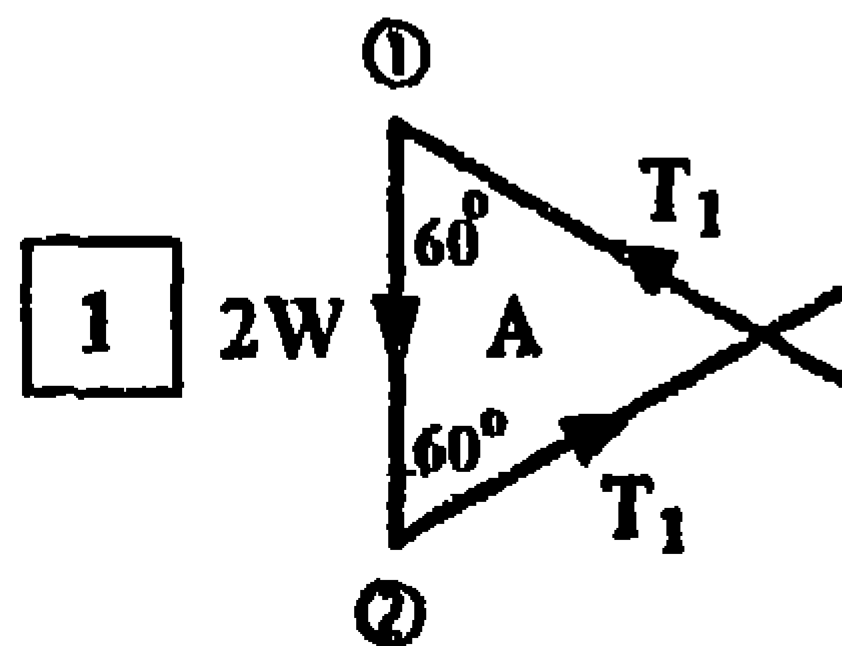
$$\sum F_y = 0$$

$$Y - T_5 - T_3 \cos 30 = 0$$

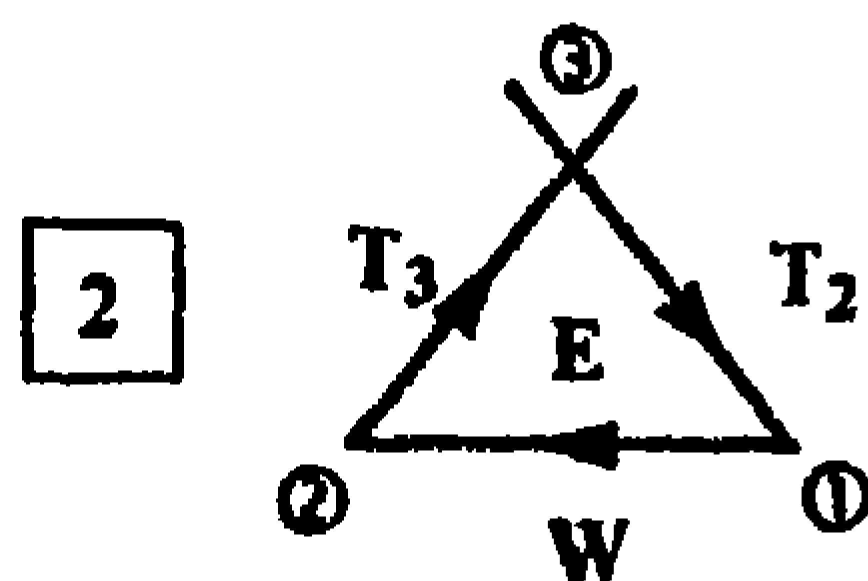
$$Y = 4W$$

ثانياً بيانياً :

برسم مقياس رسم القوى $1\,cm = W$

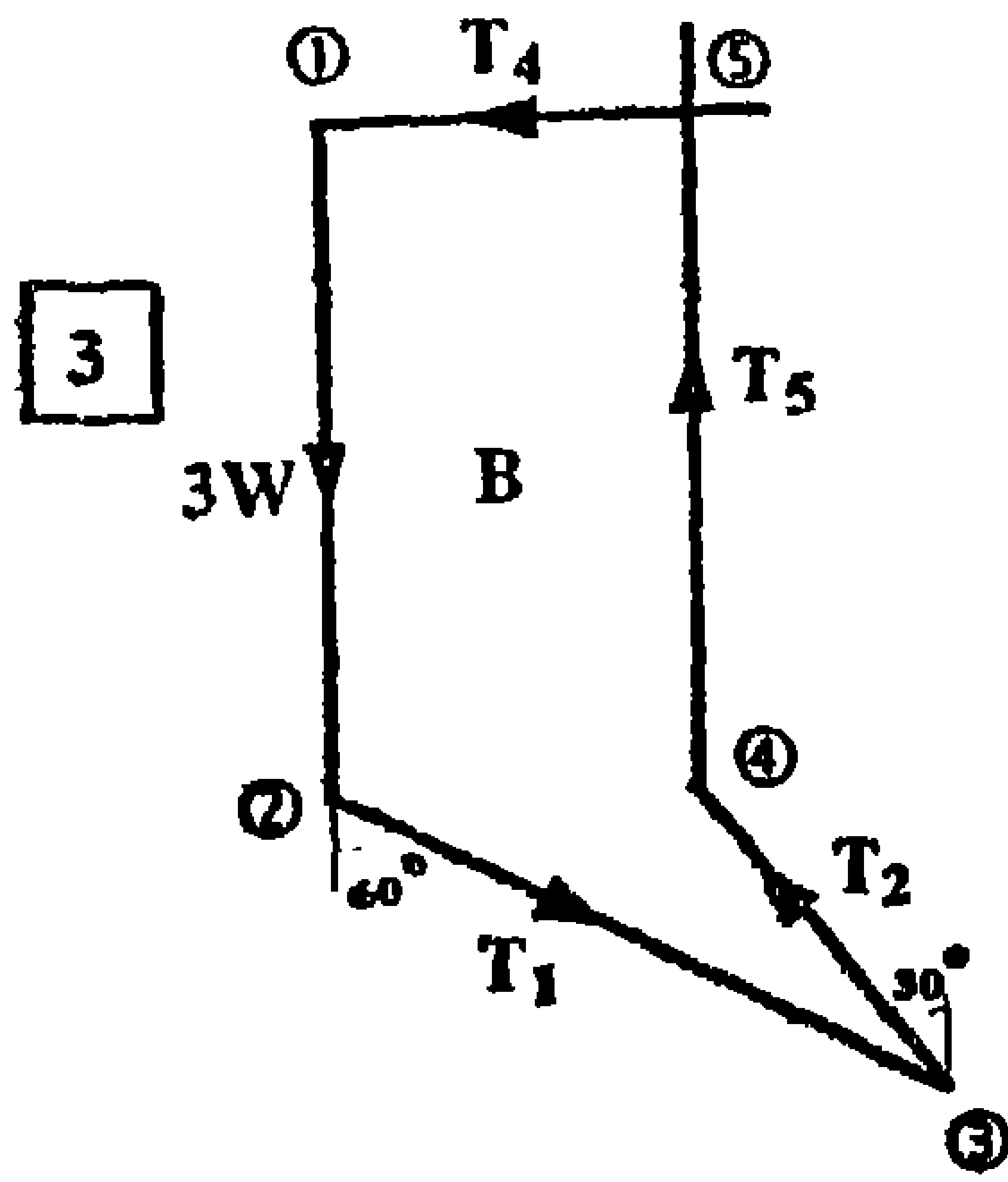


$$T_1 = 2cm \times \frac{W}{1cm} = 2W$$



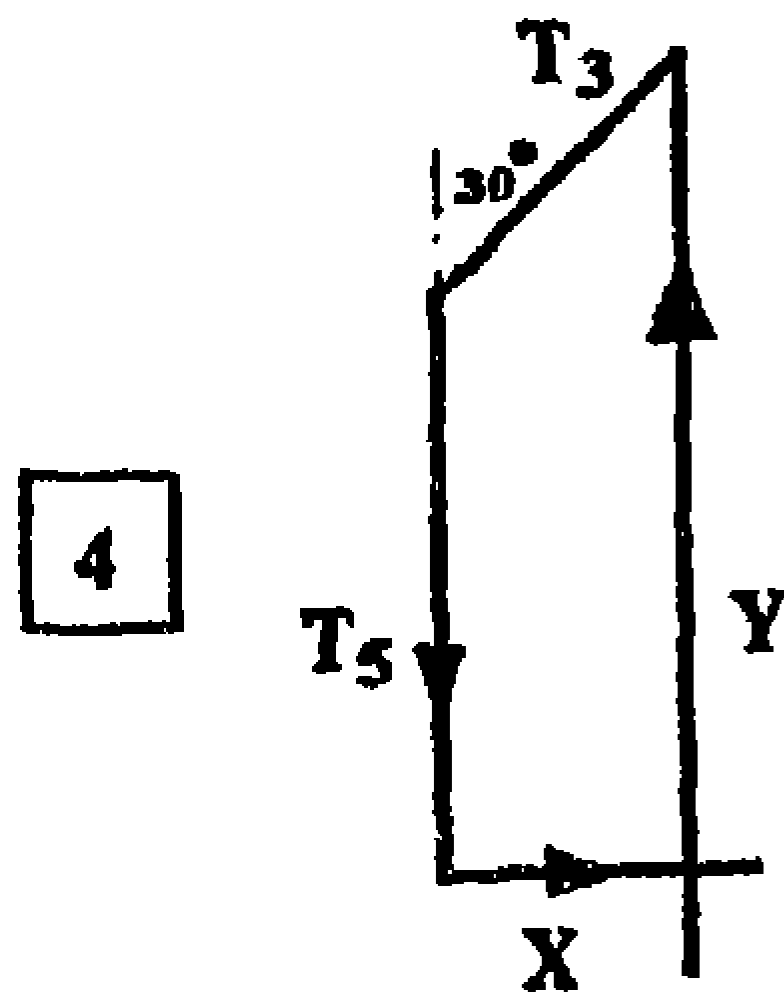
$$T_3 = 1cm \times \frac{W}{1cm} = W$$

$$T_2 = 1cm \times \frac{W}{1cm} = W$$



$$T_5 = 3.15cm \times \frac{W}{1cm} = 3.15W$$

$$T_4 = 1.2cm \times \frac{W}{1cm} = 1.2W$$

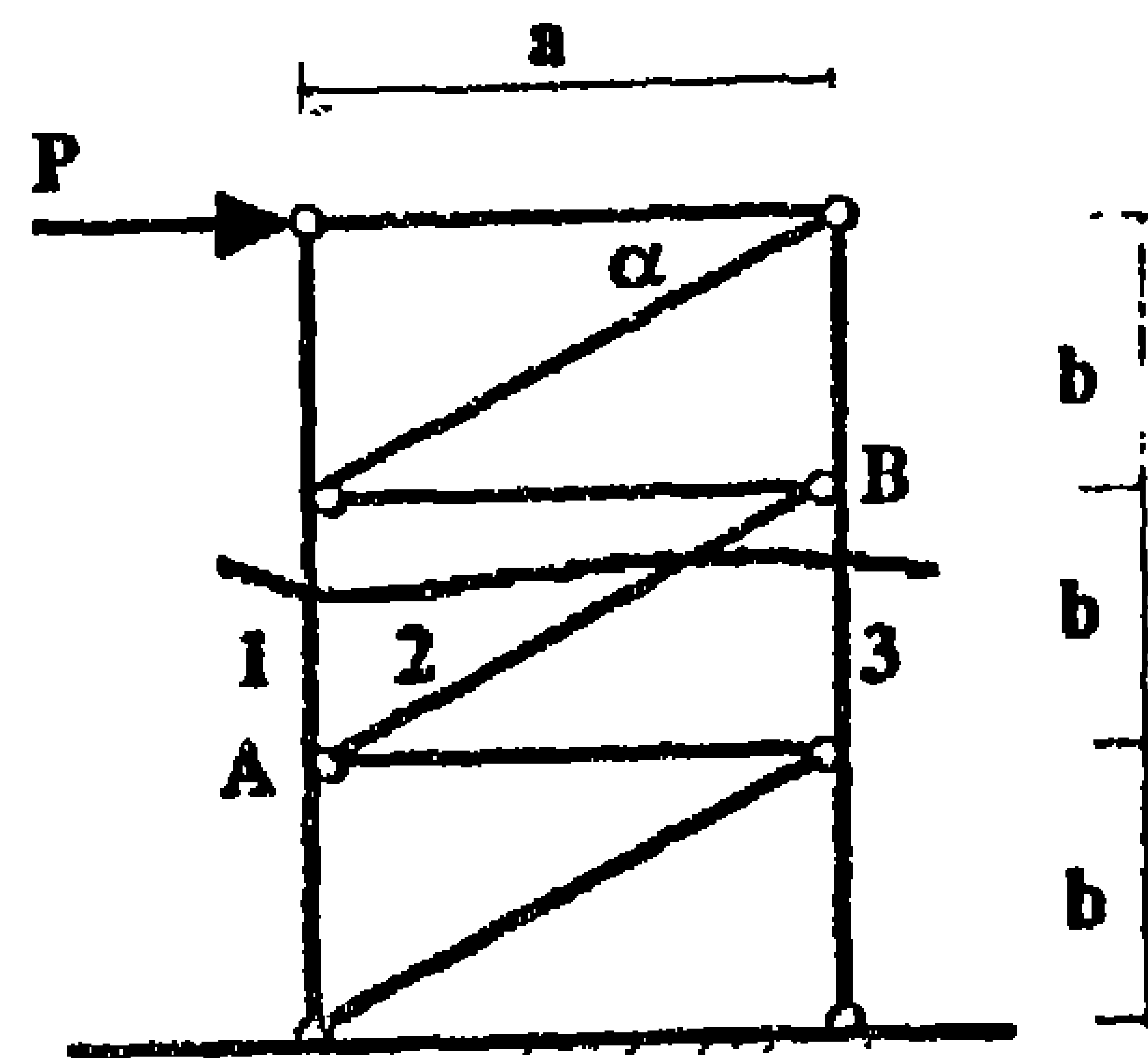


$$X = 0.5cm \times \frac{W}{1cm} = 0.5W$$

$$Y = 4cm \times \frac{W}{1cm} = 4W$$

مثال ٢ :

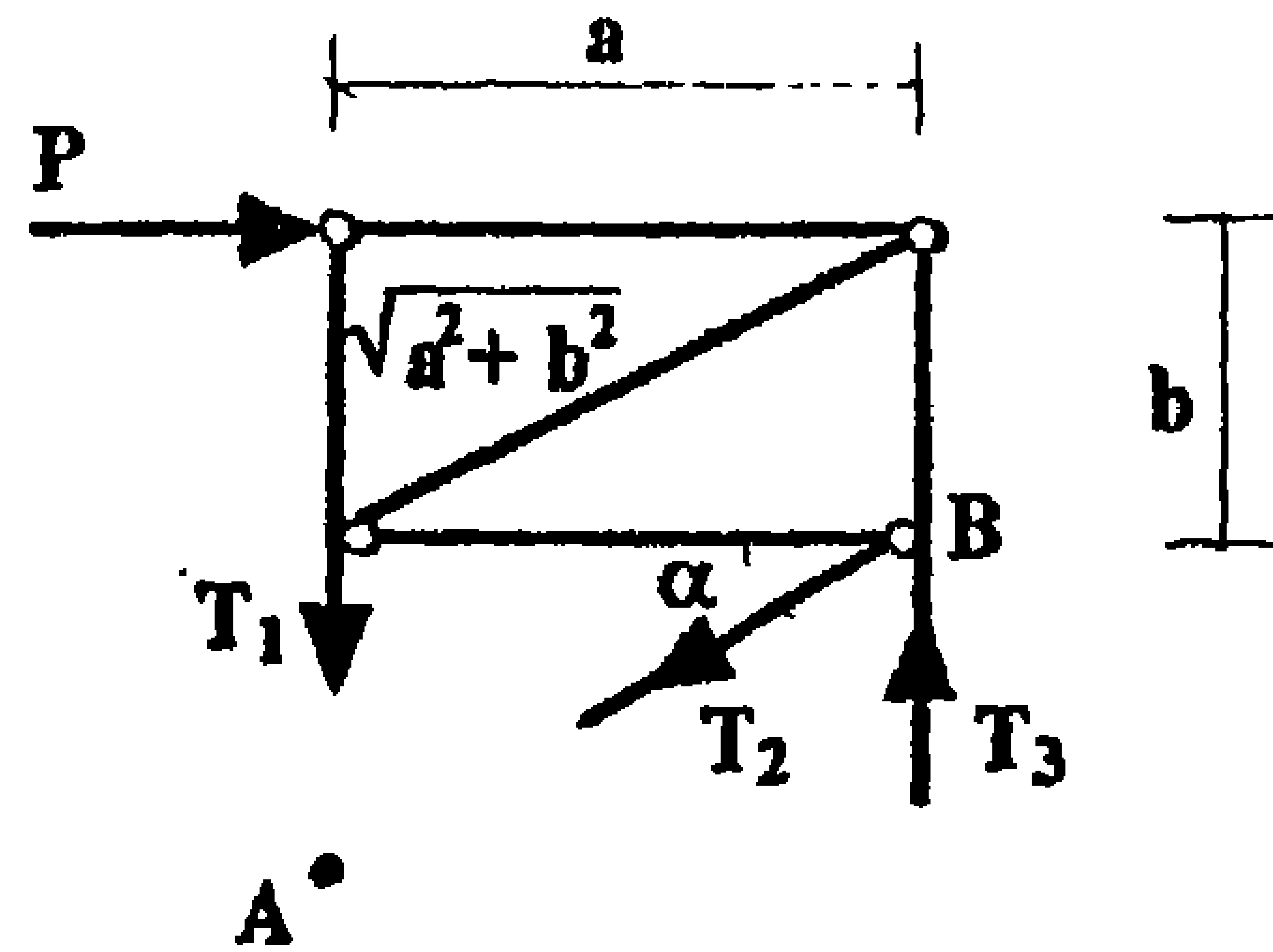
عين القوى المحورية في الأعضاء ١ ، ٢ ، ٣ .



الحل :

لتعيين القوى المحورية المطلوبة نتخيل مستوى قاطع للقضبان الثلاثة .

دراسة اتزان المستطيل العلوى



$$\sum M_B = 0$$

$$T_1(a) - P(b) = 0$$

$$T_1 = \frac{b}{a} P$$

$$\sum M_A = 0$$

$$T_3(a) - P(2b) = 0$$

$$T_3 = \frac{2b}{a} P$$

$$\sum F_x = 0$$

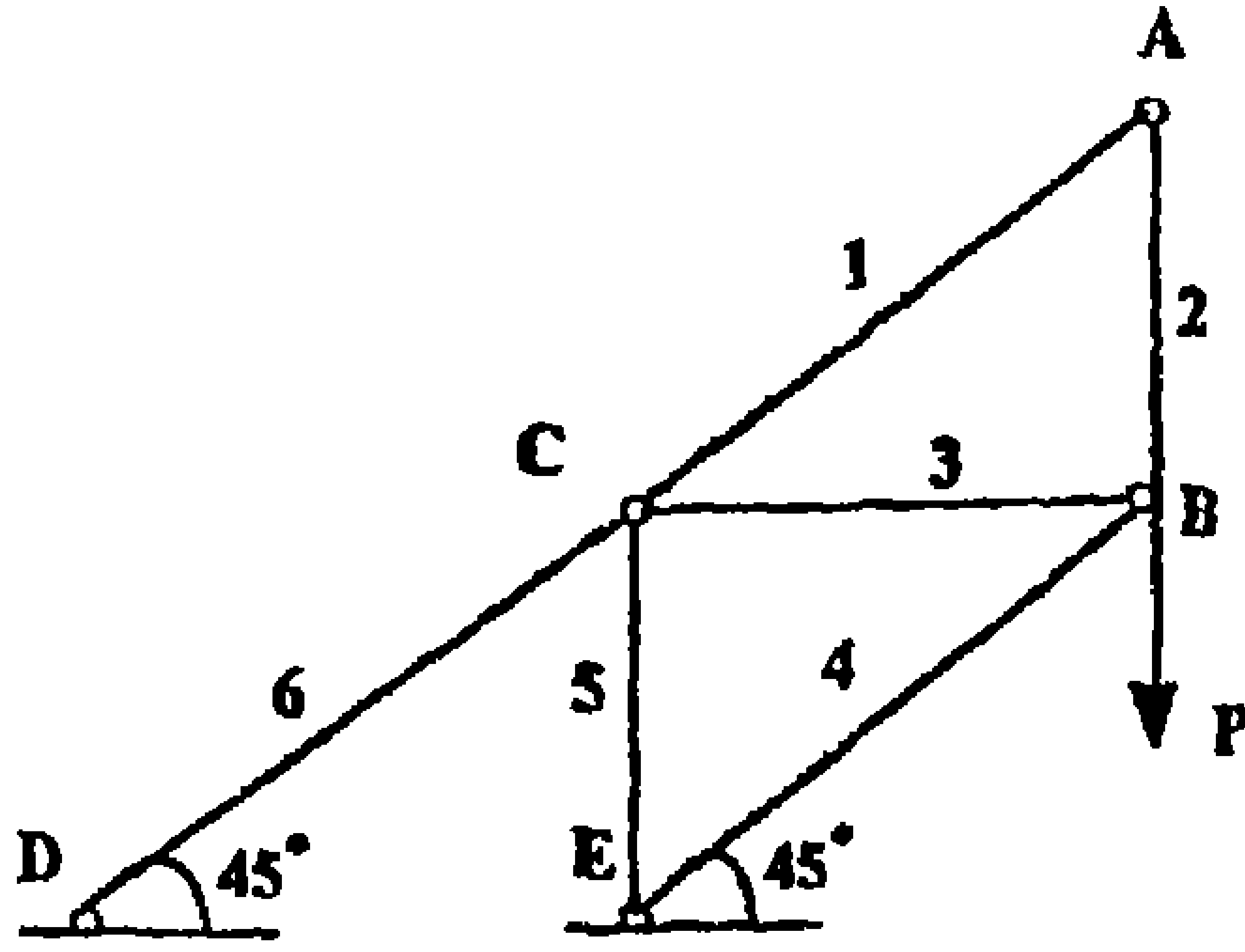
$$-T_2 \cos\alpha + P = 0$$

$$-T_2\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + P = 0$$

$$T_2 = P\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

أمثلة محلولة

مثال ١:

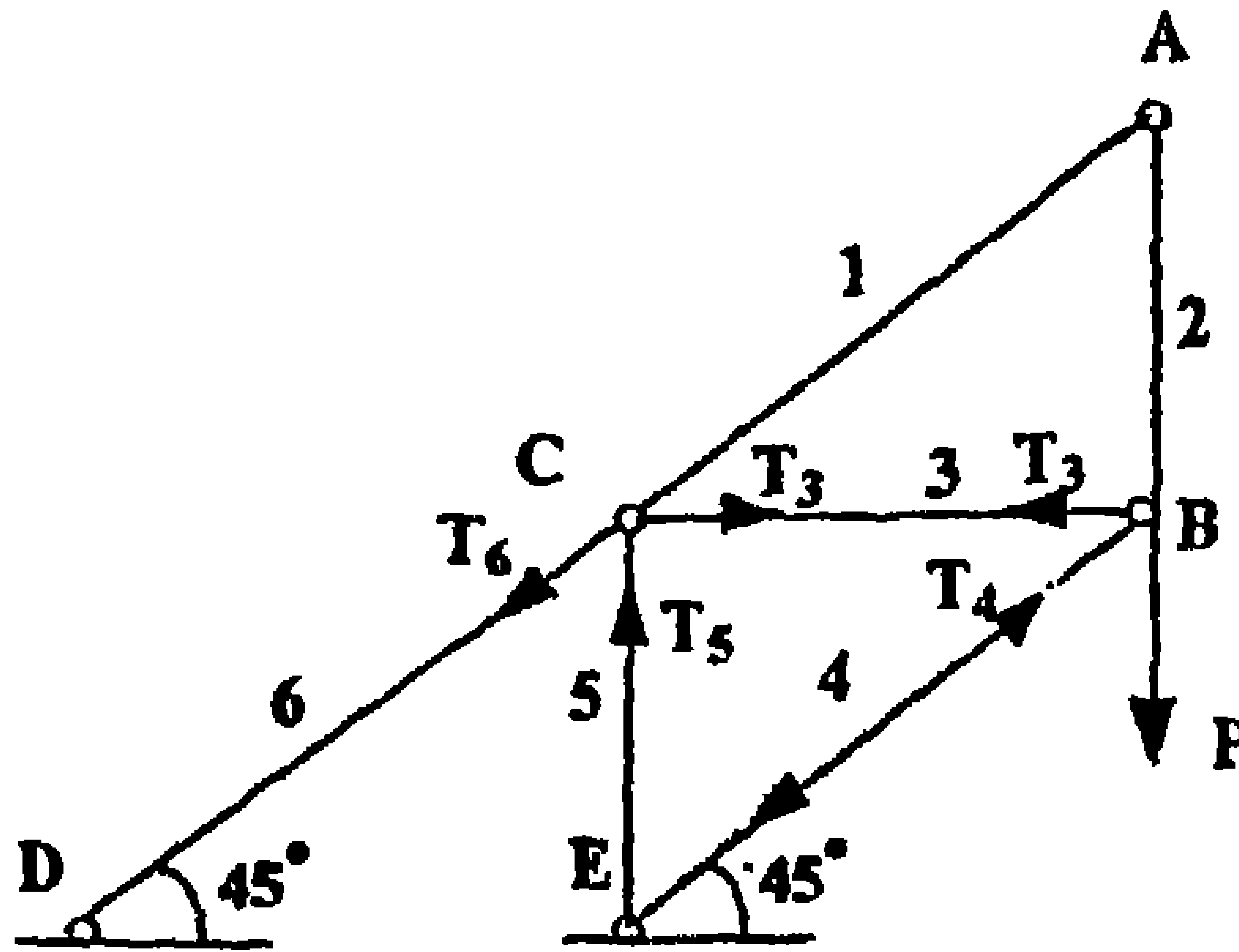


عين تحليلياً القوى المحورية في أعضاء الهيكل المفصلي المرتكز والمحمل كما في الشكل.

اتزان المفصل A:

هذا المفصل متزن تحت تأثير قوتين محوريتين في العضوين الملتقين فيه وحيث أن هاتين القوتين ليستا على استقامة واحدة إذن فالإتزان غير ممكن إلا اذا تلاشت القوتان معاً.

اتزان المفصل B:



القوى المؤثرة هي T_3 ، P ، T_4 بالتحليل أفقياً ورأسياً:

$$T_4 \cos 45^\circ = T_3$$

$$T_4 \sin 45^\circ = P$$

ومنهما $T_3 = P \quad , \quad T_4 = P\sqrt{2}$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي T_3، T_5 ، T_6 بالتحليل أفقياً ورأسياً:

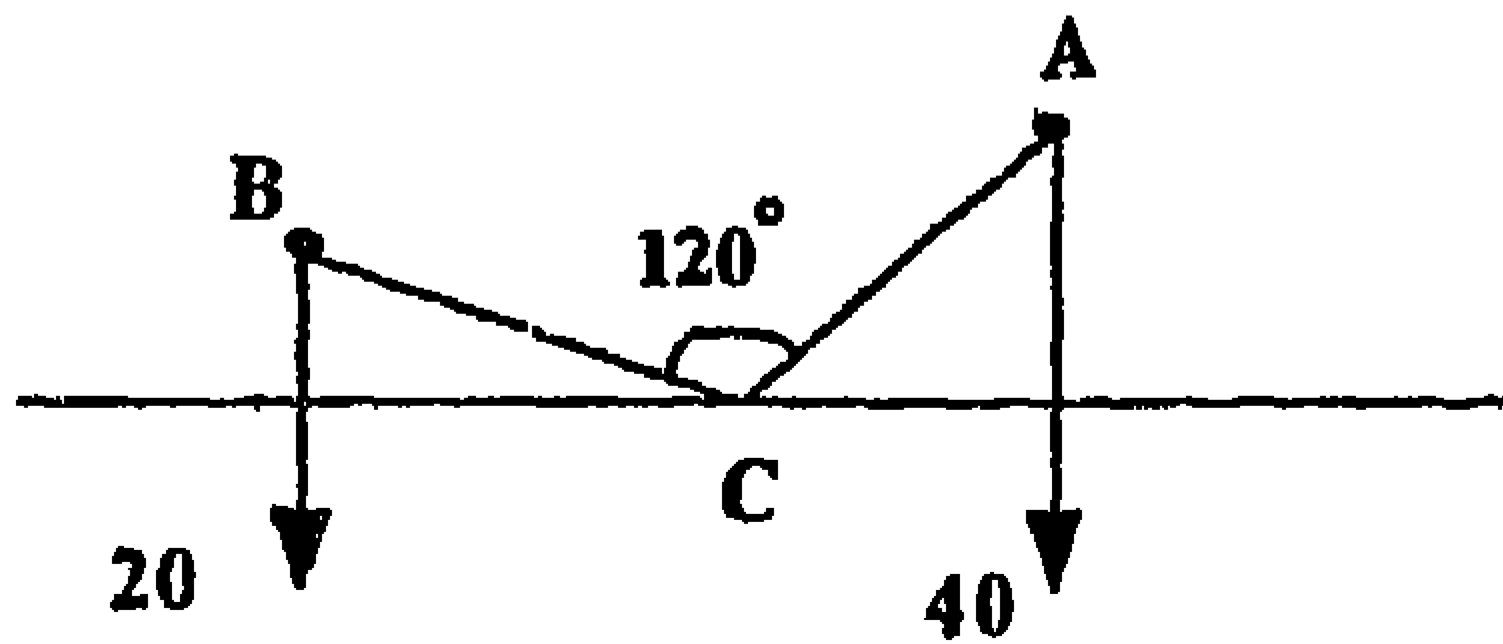
$T_6 \cos 45° = T_3$

$T_6 \sin 45° = T_5$

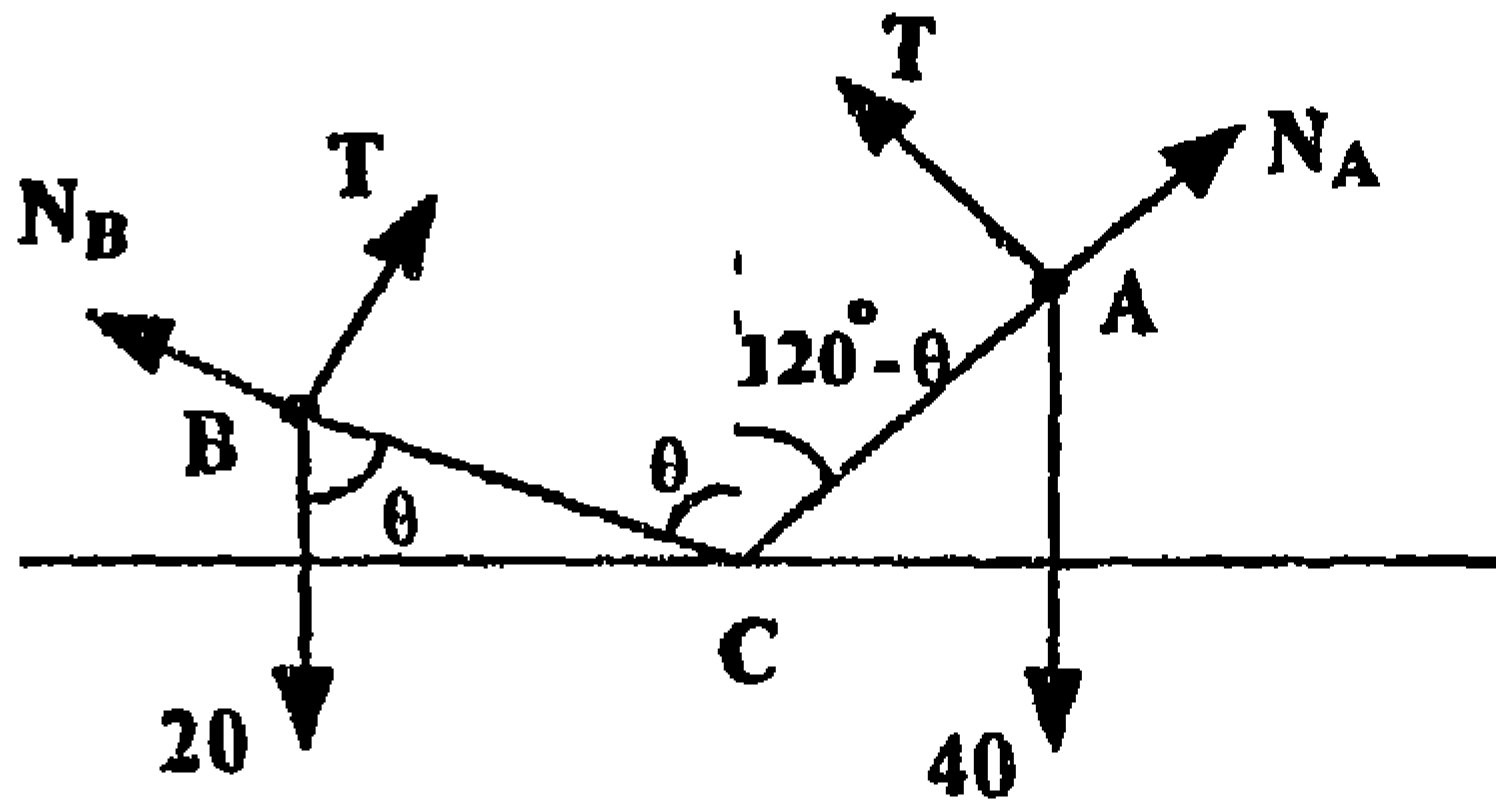
ومنهما $T_5 = P$, $T_6 = P\sqrt{2}$

مثال ٢ :

جسيمان A , B وزن كل منهما 40 N , 20 N يربطهما خيط خفيف يمر فوق أسطوانة أفقية ملساء ويقابل زاوية مركزية مقدارها 120° كما في الشكل، أوجد موضع الاتزان والشد في الخيط ورد فعل الأسطوانة.



الحل:



الشكل المقابل يمثل خطوط العمل في وضع عام.

اتزان الجسيم A

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على

$$\frac{40}{\sin 90} = \frac{T}{\sin(60+\theta)} = \frac{N_A}{\sin(210-\theta)} \qquad (1)$$

اتزان الجسيم B:

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على:

$$\frac{20}{\sin 90}=\frac{T}{\sin(180-\theta)}=\frac{N_B}{\sin(90+\theta)} \qquad (2)$$

من (١) و (٢) بالقسمة نحصل على :

$$\frac{40}{20}=\frac{\sin(180-\theta)}{\sin(60+\theta)}$$

$$\sin\theta = 2(\sin 60\cos\theta + \cos 60\sin\theta)$$

$$\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$$

$$\therefore \cos\theta = 0$$

$$\theta = 90°$$

ثم بالتعويض في (١)

$$T = 20\ N$$

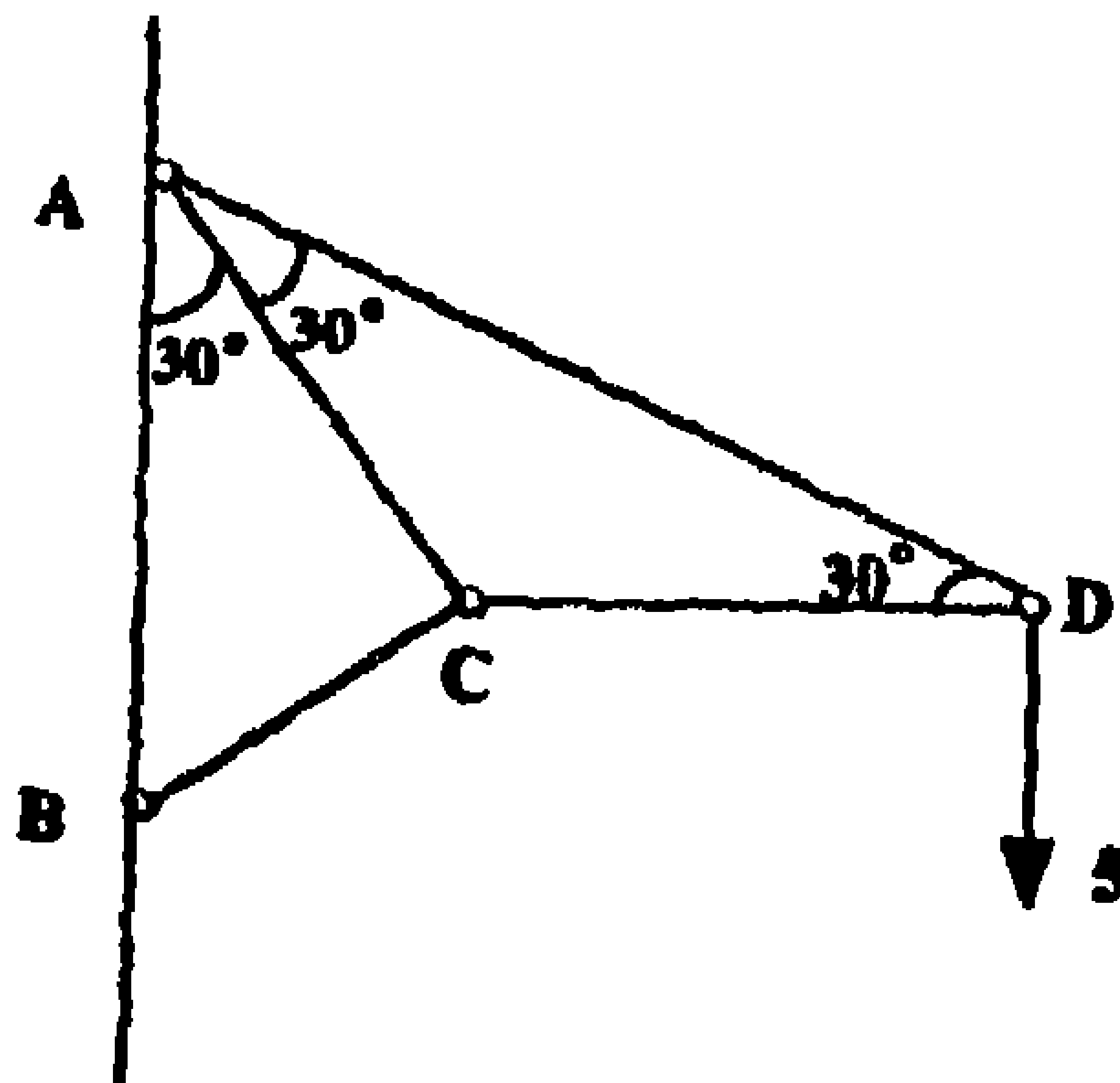
$$N_A = 20\sqrt{3}\ N$$

وبالتعويض في (٢)

$$N_B = 0$$

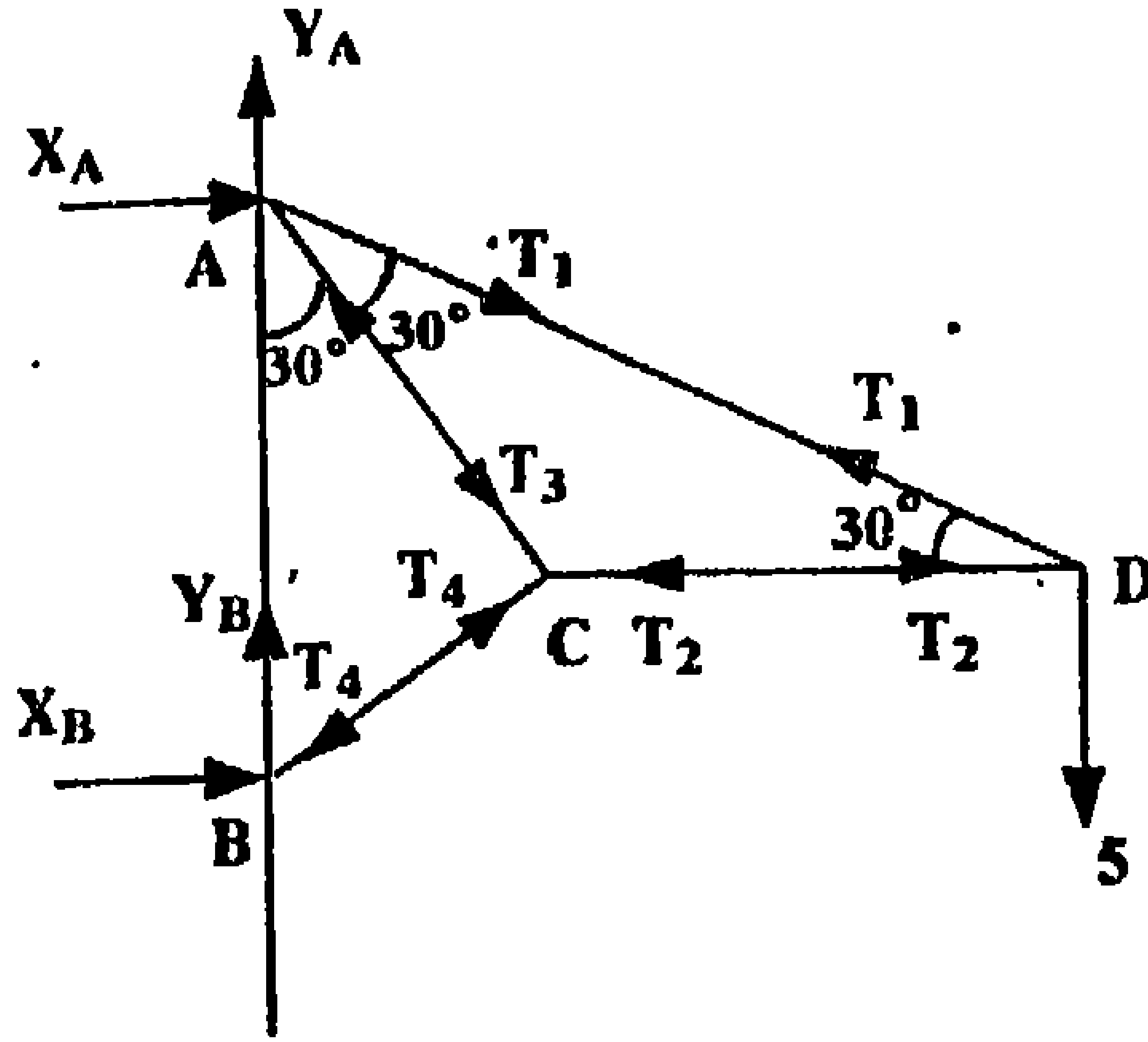
مثال ٣:

الهيكل المفصلي المبين بالشكل مثبت مفصلياً في حائط رأسي عند B و A وعلق من المفصل D ثقل قدره 5 kN . أوجد القوى المحورية وردود الفعل عند A, B . حل تحليلياً وبيانياً



الحل التحليلي:

شكل (أ) يمثل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل المفصلي (القوى وردود الأفعال).



شكل (ا)

اتزان المفصل D

القوى المؤثرة هي 5 ، T_1 ، T_2 بالتحليل أفقياً وراسيا نحصل على:

$$\sum Y = 0$$

$$T_1 \sin 30 - 5 = 0$$

$$\therefore T_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$-T_1 \cos 30 + T_2 = 0$$

$$\therefore T_2 = 5\sqrt{3} \text{ kN}$$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي T_2، T_3 ، T_4 بالتحليل أفقياً وراسيا نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$T_4 - T_3 \cos 30 = 0$$

$$T_4 = 705 \text{ kN}$$

$\sum Y = 0$

$T_3 + T_2 \sin 30 = 0$

$T_3 = 2.5\sqrt{3}$ kN

اتزان المفصل B:

القوى المؤثرة هي T_4، X_B ، Y_B بالتحليل افقياً وراسيا نحصل على:

$\sum X = 0$

$X_B - T_4 \cos 30 = 0$

$X_B = 3.75\sqrt{3}$ kN

$\sum Y = 0$

$Y_B - T_4 \cos 60 = 0$

$Y_B =$ [illegible] kN

اتزان المفصل A:

القوى المؤثرة هي T_1، T_3 ، X_A ، Y_A بالتحليل افقياً وراسيا نحصل على:

$\sum X = 0$

$X_A + T_1 \cos 30 - T_3 \cos 60 = 0$

$X_A = 3.75\sqrt{3}$ kN

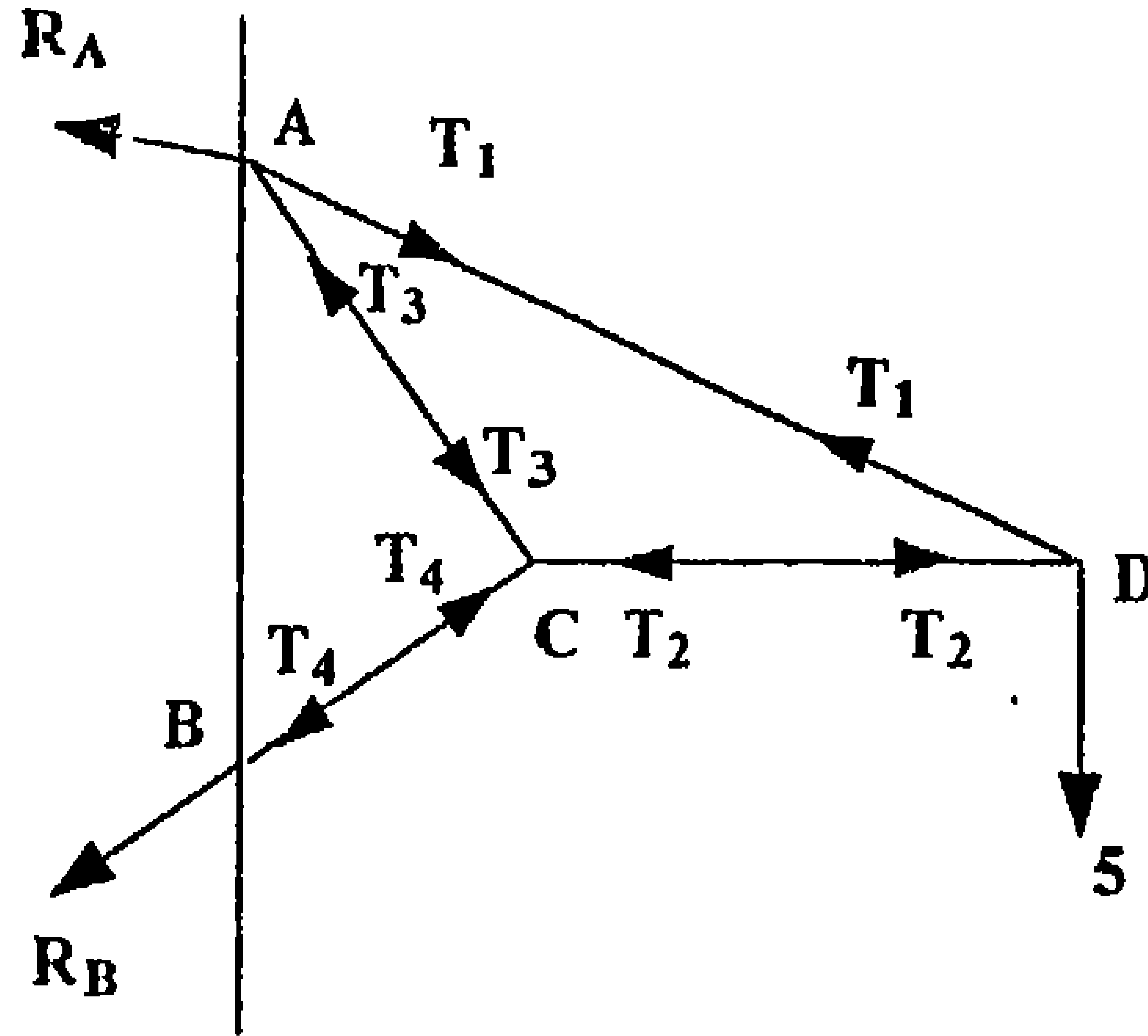
$\sum Y = 0$

$Y_A + T_3 \cos 30 - T \cos$ [illegible] $= 0$

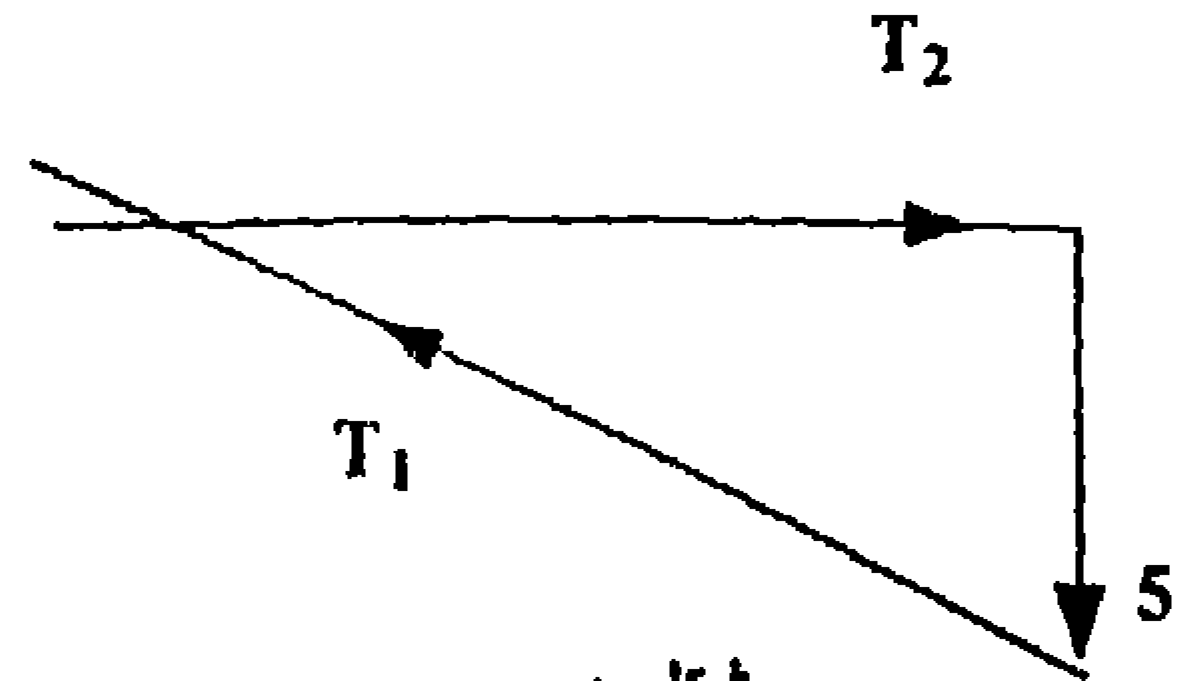
$Y_A = 3.25$ kN

الحل البياني:

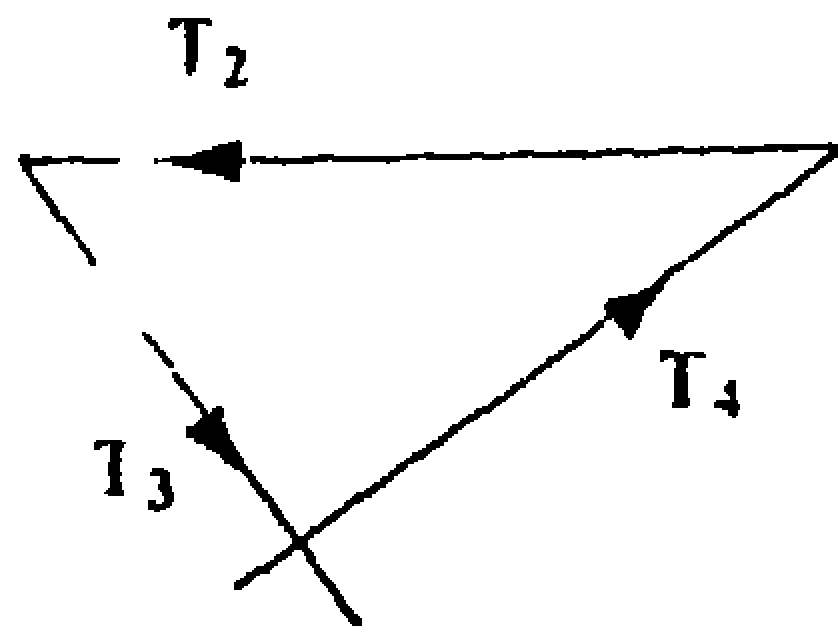
مقياس رسم القوى 1 cm = 2 kN



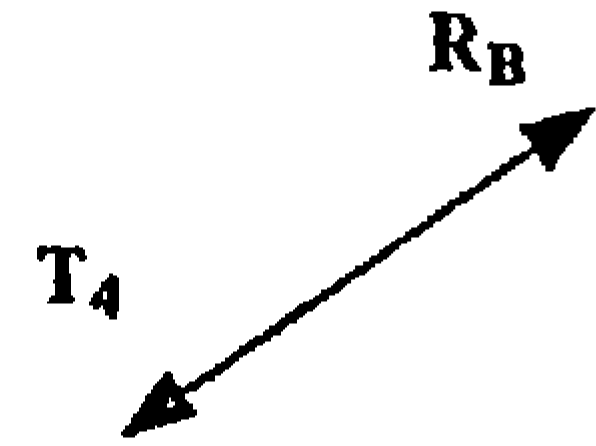
شكل (ب) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل المفصلي. يمكن الحل بيانياً وذلك برسم مثلثات قوى للمفاصل D كما في شكل (جـ) ، C كما في شكل (د) ، A كما في شكل (و) ومضلع قوى المفصل B كما في شكل (هـ). وفي كل منها نبدأ بتمثيل القوى المعلومة عند المفصل ويغلق المثلث أو المضلع باتجاهات القوى المجهولة في المقدار.



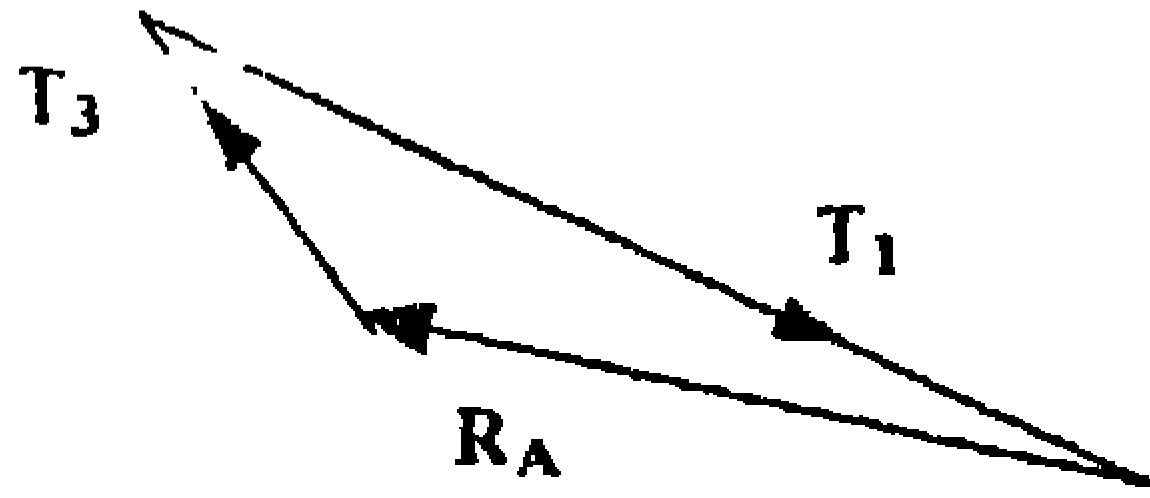
شكل جـ



شكل د



شكل هـ



شكل و

النتائج من الرسم بالقياس:

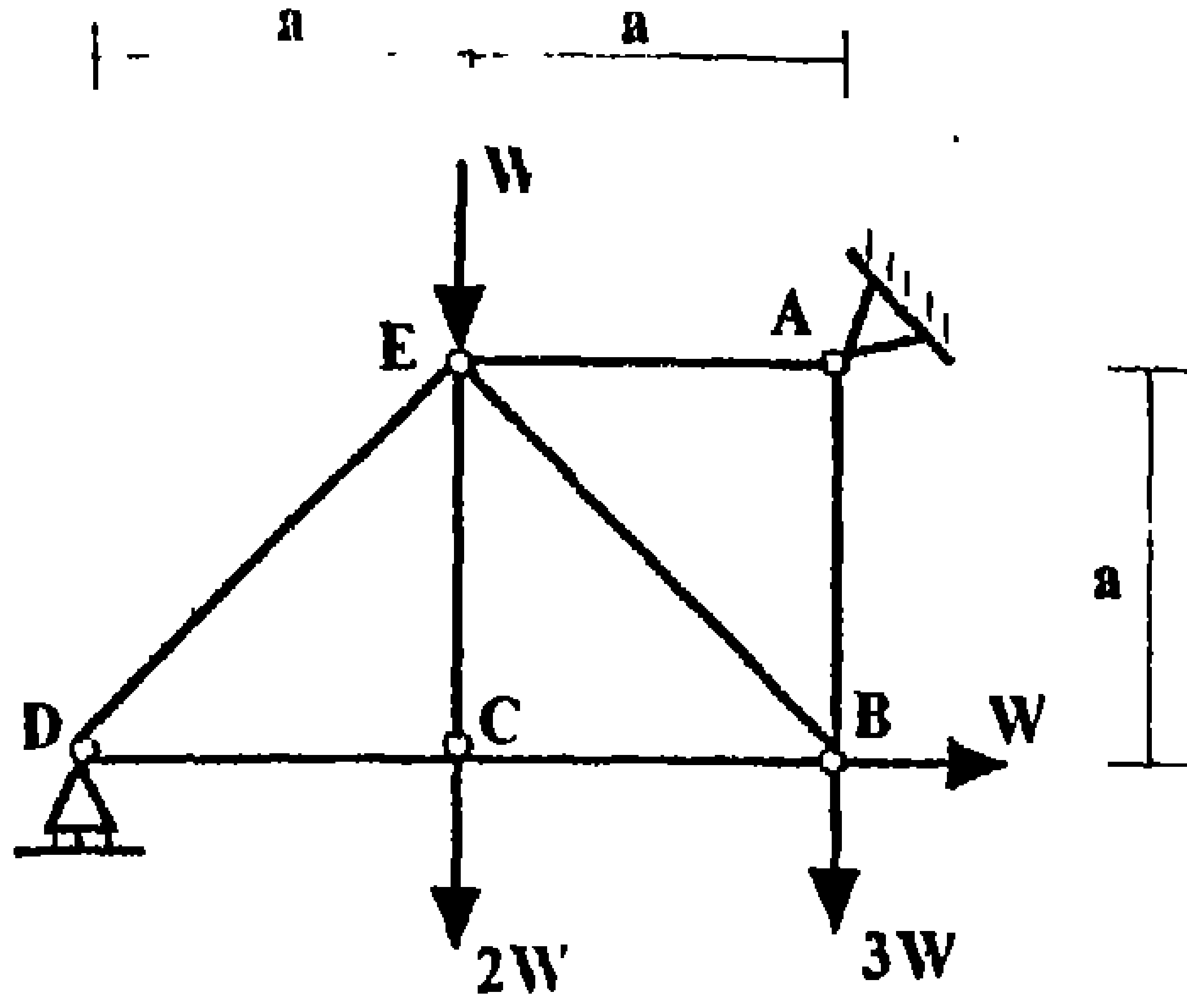
$T_1 = 10$ kN , $T_2 = 8.6$ kN

$T_3 = 4.5$ kN , $T_4 = 7.5$ kN

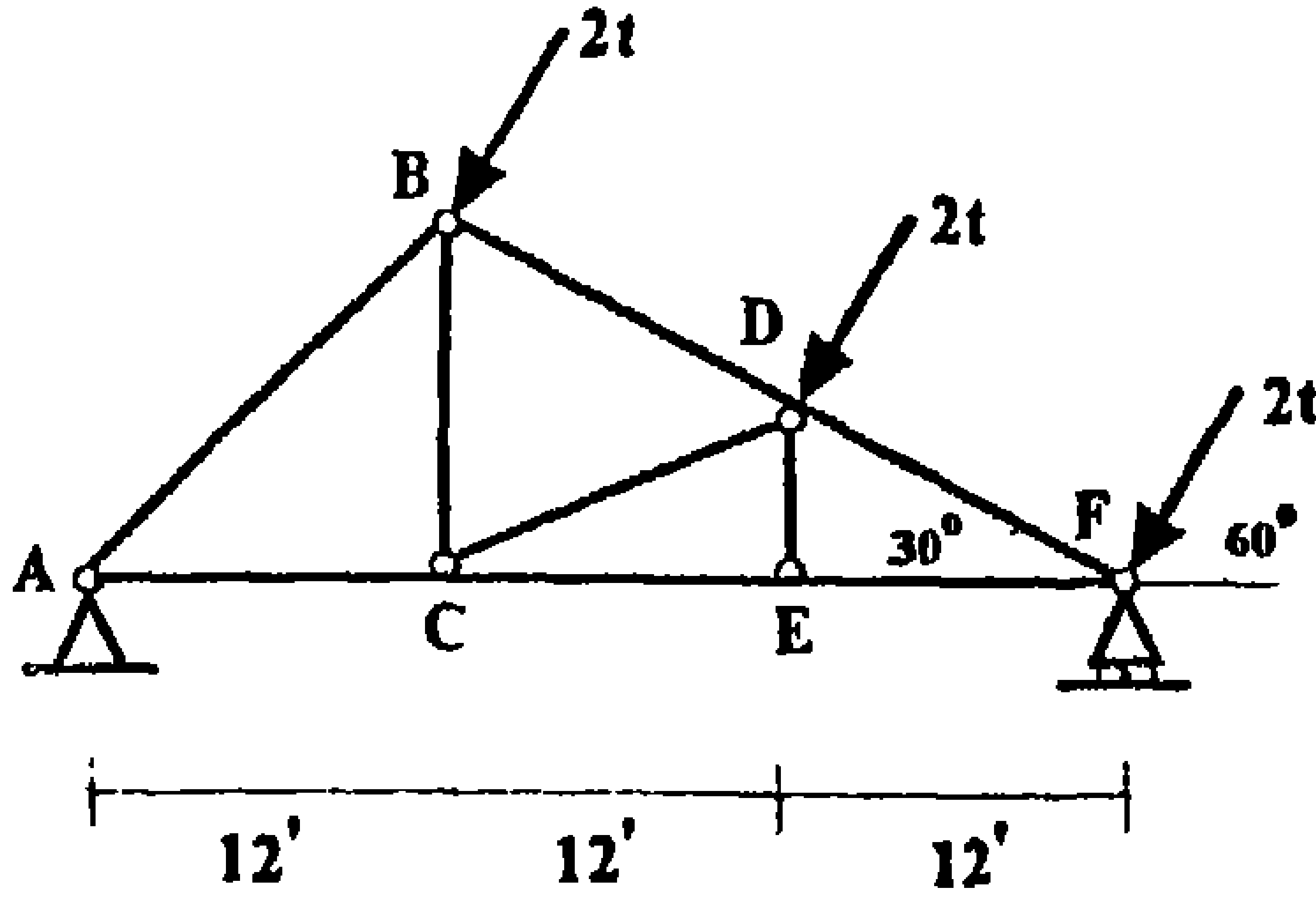
$R_A = 4.5$ kN , $R_B = 7.5$ kN

تمارين

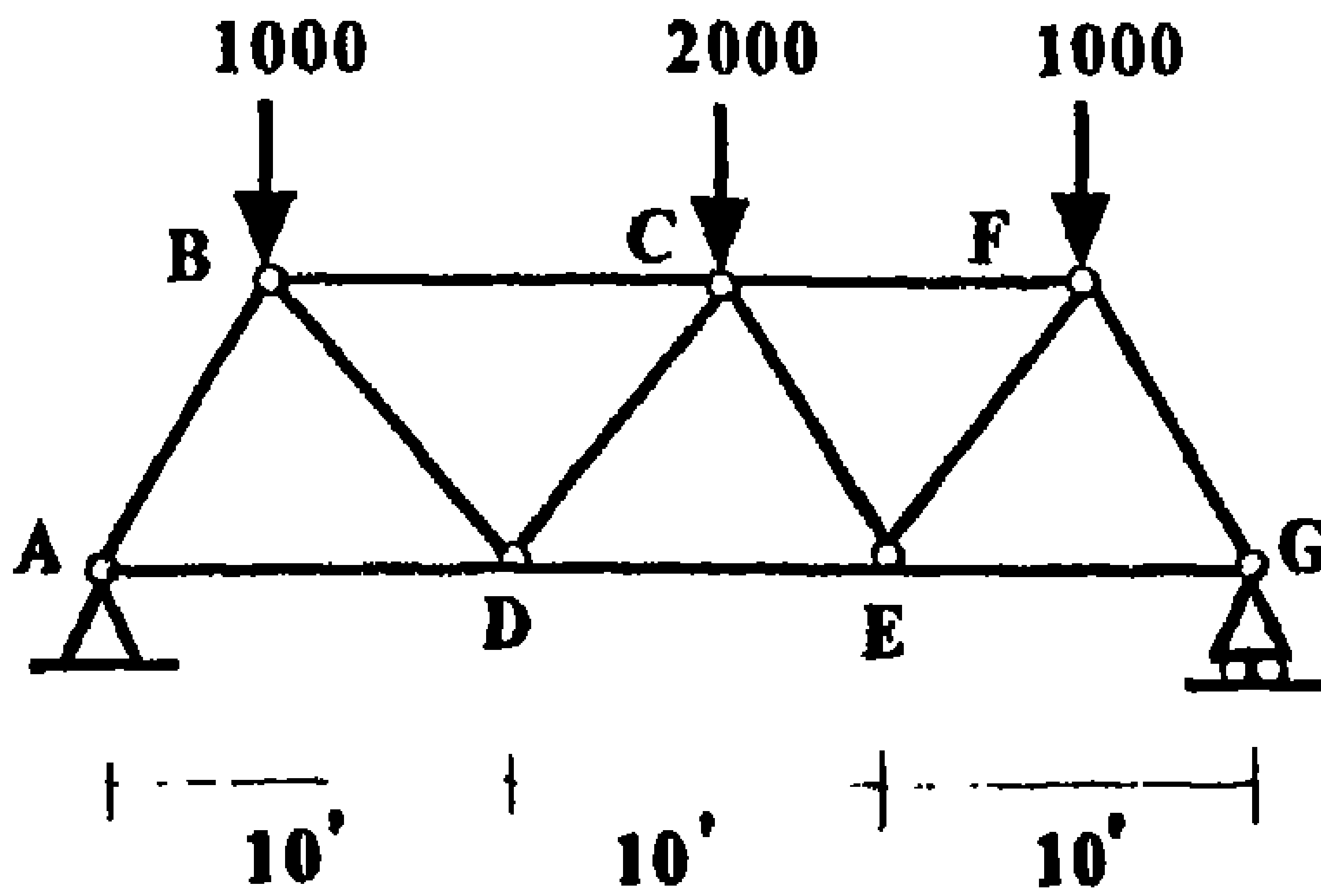
١ – للهيكل المحمل المفاصل المبين بالشكل عين القوى المحوريه في أعضاء الهيكل و كذلك ردود فعل الإرتكاز الحر D و المفصل A .



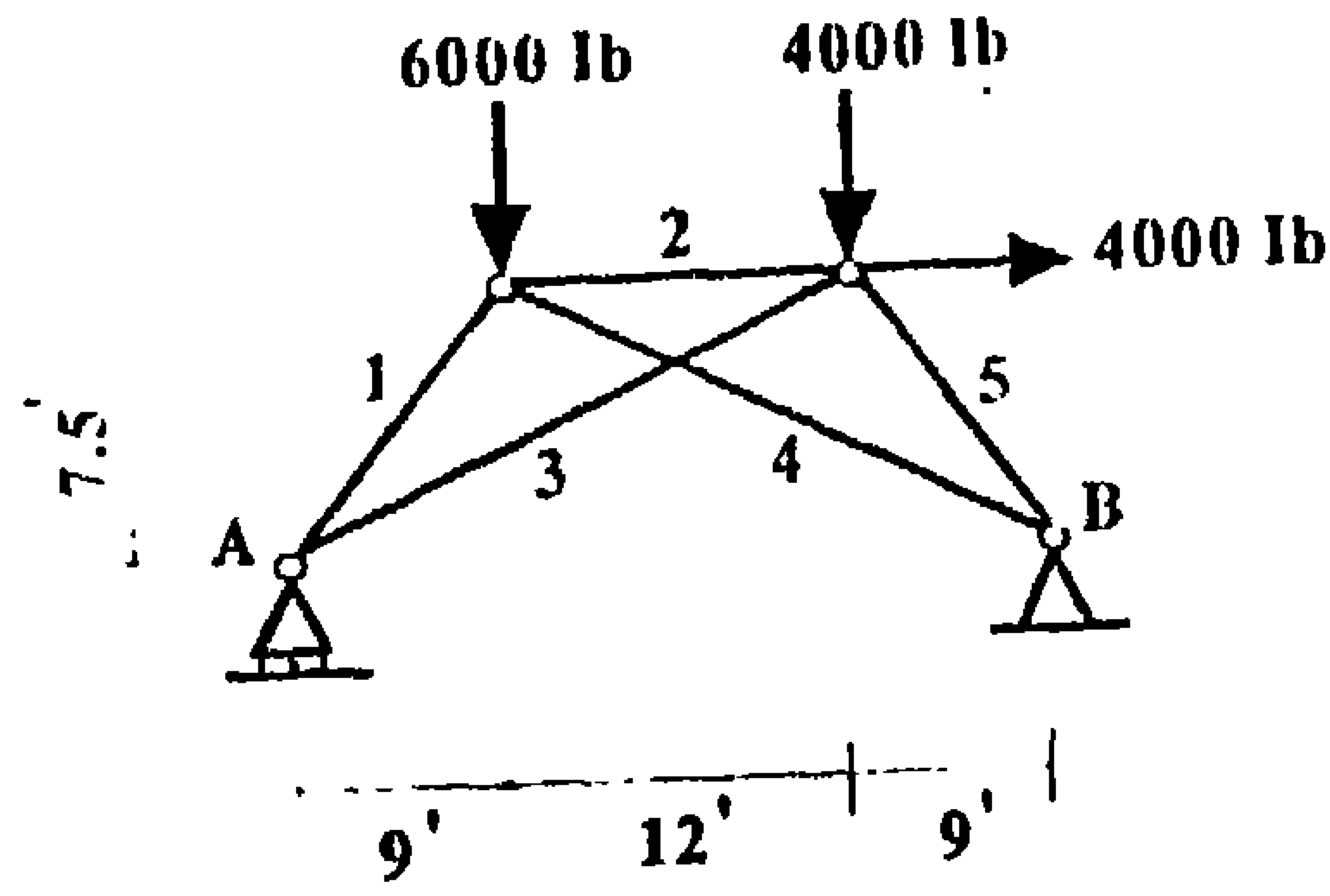
٢ – عين قوى الضغط أو الشد في العضوين AB ، CB .



٣ – عين الشد أو الضغط في كل من أعضاء الهيكل المفصلي المبين بالشكل (القوى بالرطل " الباوند " و الأبعاد بالقدم و جميع المثلثات متساوية الأضلاع) .



٤ – للهيكل المفصلي المحمل كما في الشكل أوجد ردود فعل المرتكزات و القوى المحوريه في جميع الأعضاء ، علما بأن العضوين 4 ، 3 غير مرتبطين في نقطة التقاطع .





إتزان مجموعة الأجسام المتماسكة

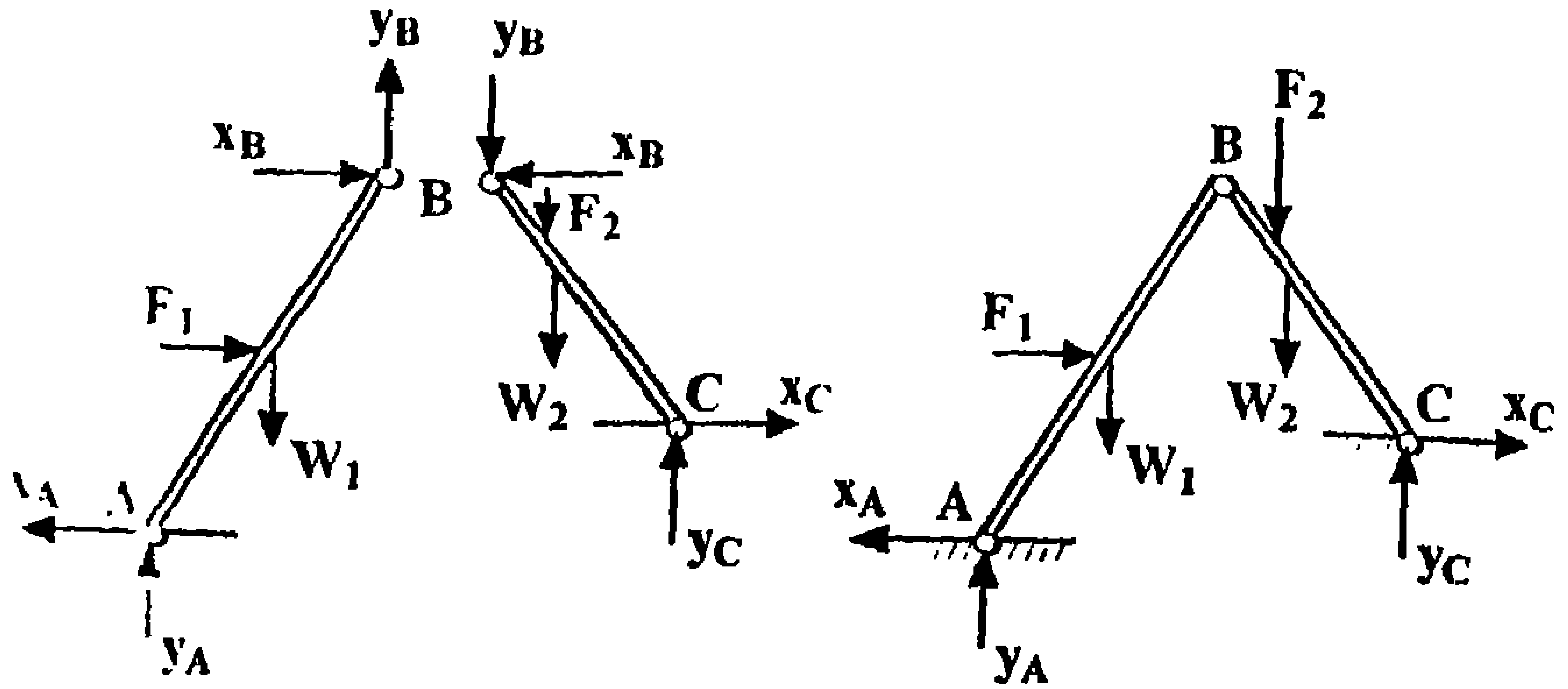
اذا اتصلت مجموعة أجسام متماسكة عن طريق مفاصل أو نقط ارتكاز على بعضها و كانت في وضع متزن فإنه يمكن اعتبار أن المجموعة كلها عبارة عن جسم واحد و يكتب لها ثلاث معادلات اتزان كما في حالة الجسم المتماسك .

كما انه يجب دراسة كل جسم على حدى و يكون له ثلاث معادلات اتزان لذا فان عدد المعادلات للاتزان هي مساوية لعدد الأجسام المتماسكة × ٣ .

و هناك نوعين من الإرتكاز :

أ – الارتكاز الداخلي :وهو يحدث بين جسمين أو أكثر من مجموعة الأجسام و لا يكون متصلا بأي جسم آخر خارجي .

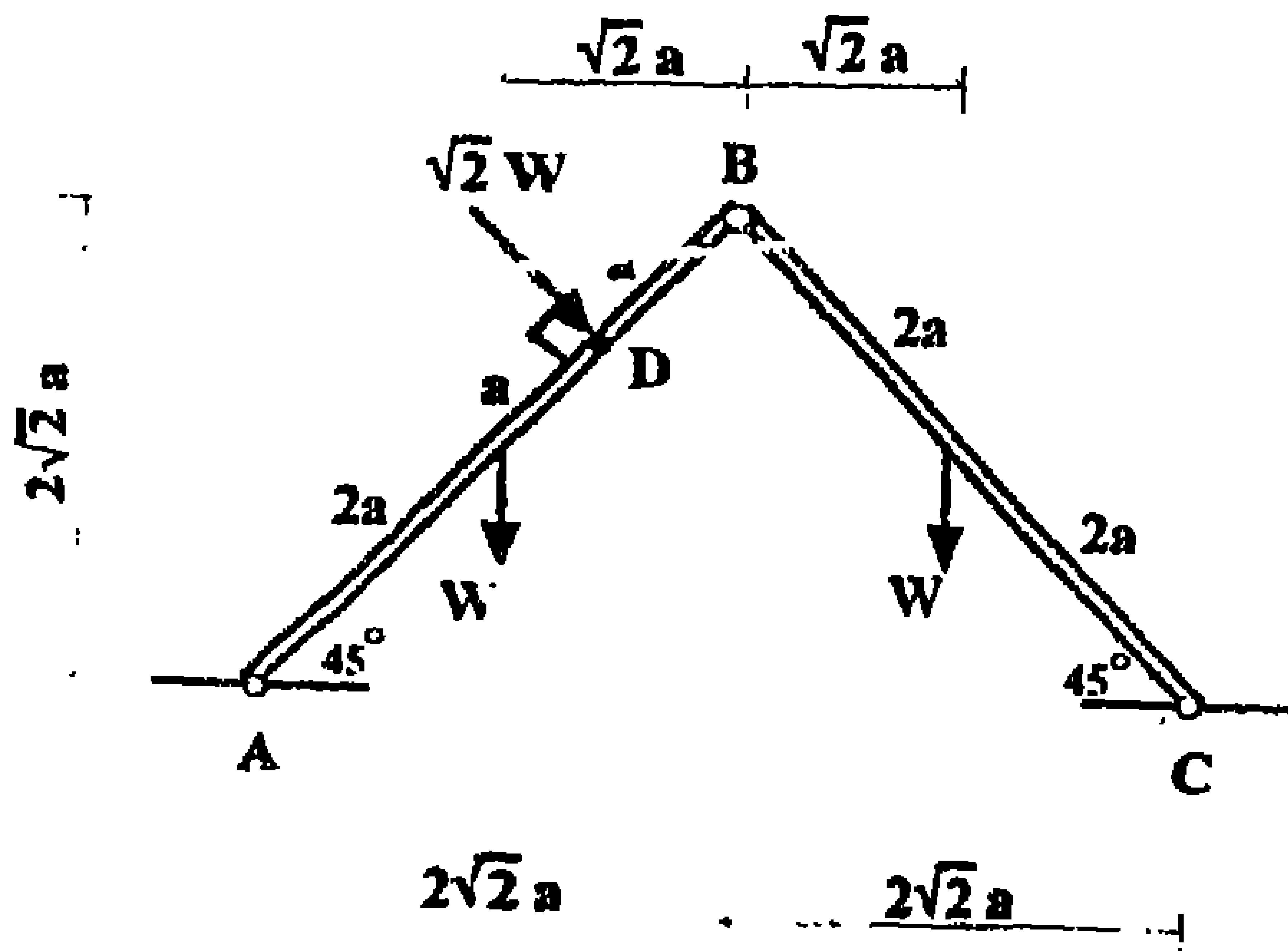
ب – الارتكاز الخارجي : و هو الذي يربط اي جسم في المجموعة بالخارج مثل الأرض أو الحائط أو أي جسم آخر خارجي لا ندرس اتزانه .



الجسم المبين في الشكل مكون من جسم AB مرتبط مع BC جسم آخر و الجسيمين مرتبطين مفصليا مع الأرض في A ، C و لذا يعتبران مفصلان خارجيان و المفصل B داخلي و الفرق بين المفصل الداخلي و الخارجي هو أنه لا تظهر ردود أفعال عند المفاصل الداخلية و تظهر عند المفاصل الخارجية و السبب في ذلك هو أنه هناك رد فعل في B ناتج من الجسم AB الاول مع الجسم BC الثاني و كذلك هناك رد فعل في B من الجسم الثاني على الجسم الاول مساو له في المقدار و مضاد له في الإتجاه ، لذا يتلاشى عند التصاقهما ويظهرا عند فصلهما و الشكل الموضح له ثلاث معادلات اتزان كمجموعة و ٦ معادلات اتزان لو تم الفصل لتعيين الست مجاهيل X_C ، Y_C ، X_A ، Y_A ، X_B ، Y_B .

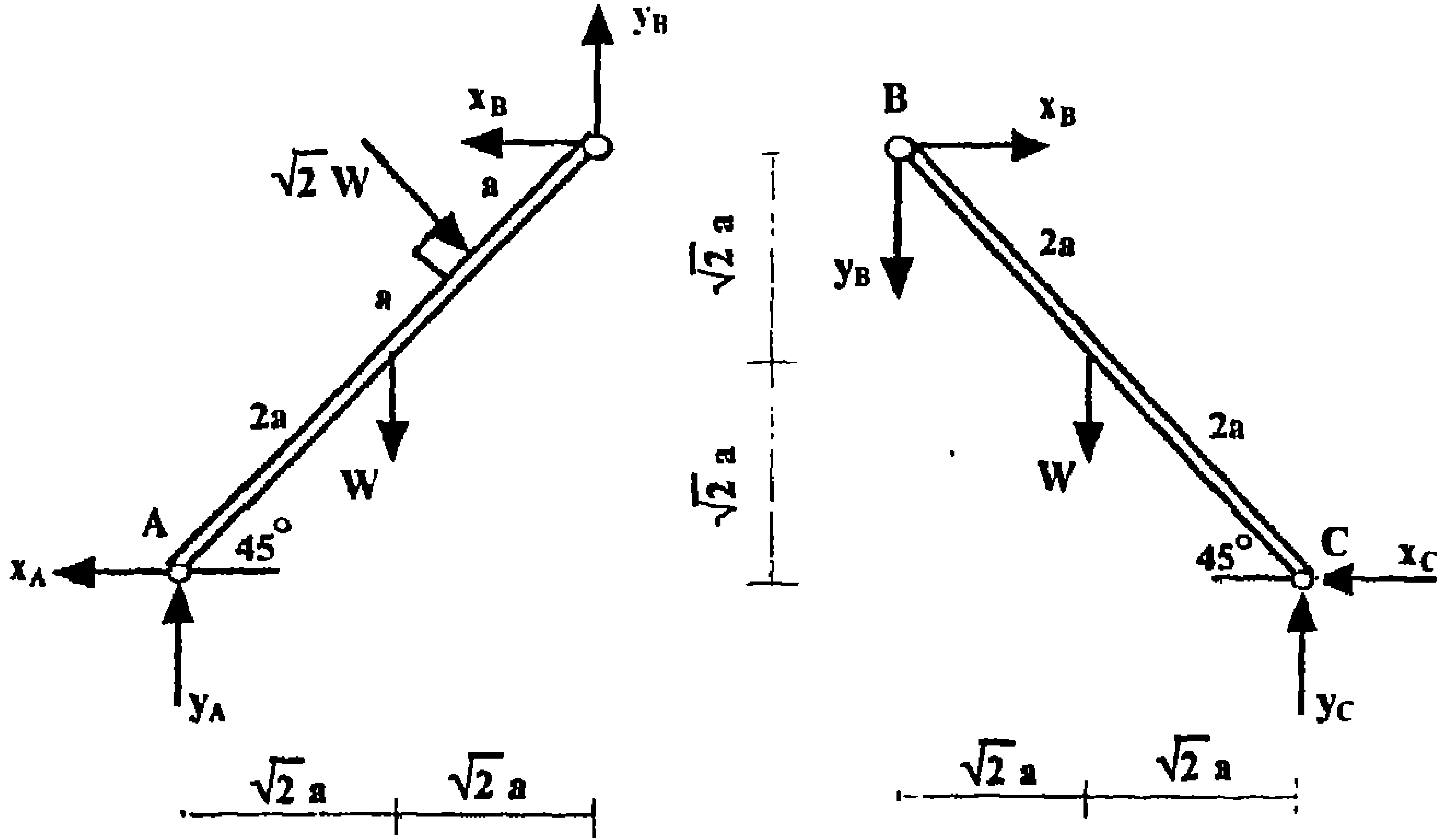
مثال ١ :

قضيبان متشابهان منتظمان AB ، BC وزن الواحد W و طوله 4a مرتبطان مفصليا في B و يربطهما الى الأرض المفصلات A , C كما في الشكل ، يؤثر حمل $\sqrt{2}W$ عموديا على AB عند نقطة D حيث AD = 3a .عين ردود الفصل في



المفاصل الثلاثة A , B , C.

الحل :



عدد المجاهيل $x_C , y_C , X_B , y_B , x_A , y_A$

عدد المعادلات = عدد الأجسام × ٣

بدراسة اتزان المجموعة ككل و بأخذ العزوم حول نقطة A

$$\sum M_A = 0$$

$$y_C + 4\sqrt{2}a - W \times 3\sqrt{2}a - W \times \sqrt{2}a - \sqrt{2}W \times 3a = 0$$

$$4y_C = 3W + W + 3W$$

$$y_C = \frac{7}{4}W \quad \text{..........} \quad (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_C + y_A = W + W + W \times \text{COS}45 \times \sqrt{2}$$

$$y_C + y_A = 2W + \frac{1}{\sqrt{2}}W \times \sqrt{2}$$

$$y_A = 3W - \frac{7}{4}W$$

$$y_A = \frac{12W - 7W}{4} = \frac{5}{4}W$$

$$y_A = \frac{5}{4}W \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

ننتقل بعد ذلك لدراسة AB و يوجد به ٣ مجاهيل هي x_A ، y_B ، x_B .

$$\sum M_B = 0$$

$$\sqrt{2}W \cdot a + W \cdot a\sqrt{2} = x_A \times 2a\sqrt{2} + y_A \times 2a\sqrt{2}$$

$$2W = 2x_A + 2y_A$$

$$x_A = W - \frac{5}{4}W = -\frac{1}{4}W \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

أي أن مقدارها 1/4 و اتجاها عكس الإتجاه المفروض.

$$\sum X = 0$$

$$\sqrt{2}W \sin 45 = x_A + x_B$$

$$W = -\frac{1}{4}W + x_B$$

$$x_B = \frac{5}{4}W \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_A + y_B = W + \sqrt{2}W \cos 45$$

$$y_B = 2W - \frac{5}{4}W$$

$$y_B = \frac{8-5}{4}W$$

$$y_B = \frac{3}{4}W \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

يبقى من المجاهيل x_C من اتزان الجسم BC .

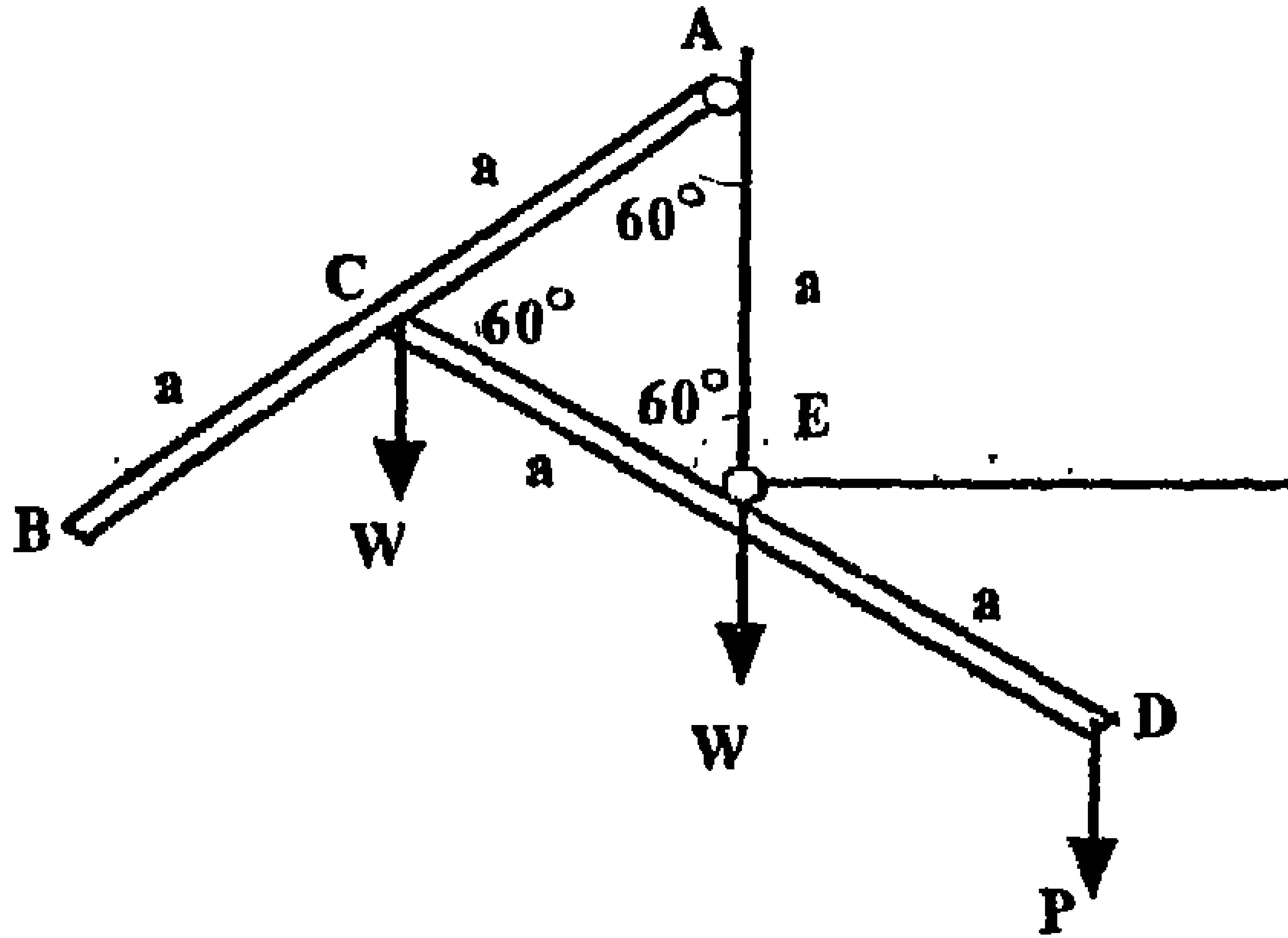
$$\sum X = 0$$

$$x_B = x_C$$

$$x_C = \frac{5}{4} W \qquad \dots\dots\dots\dots (6)$$

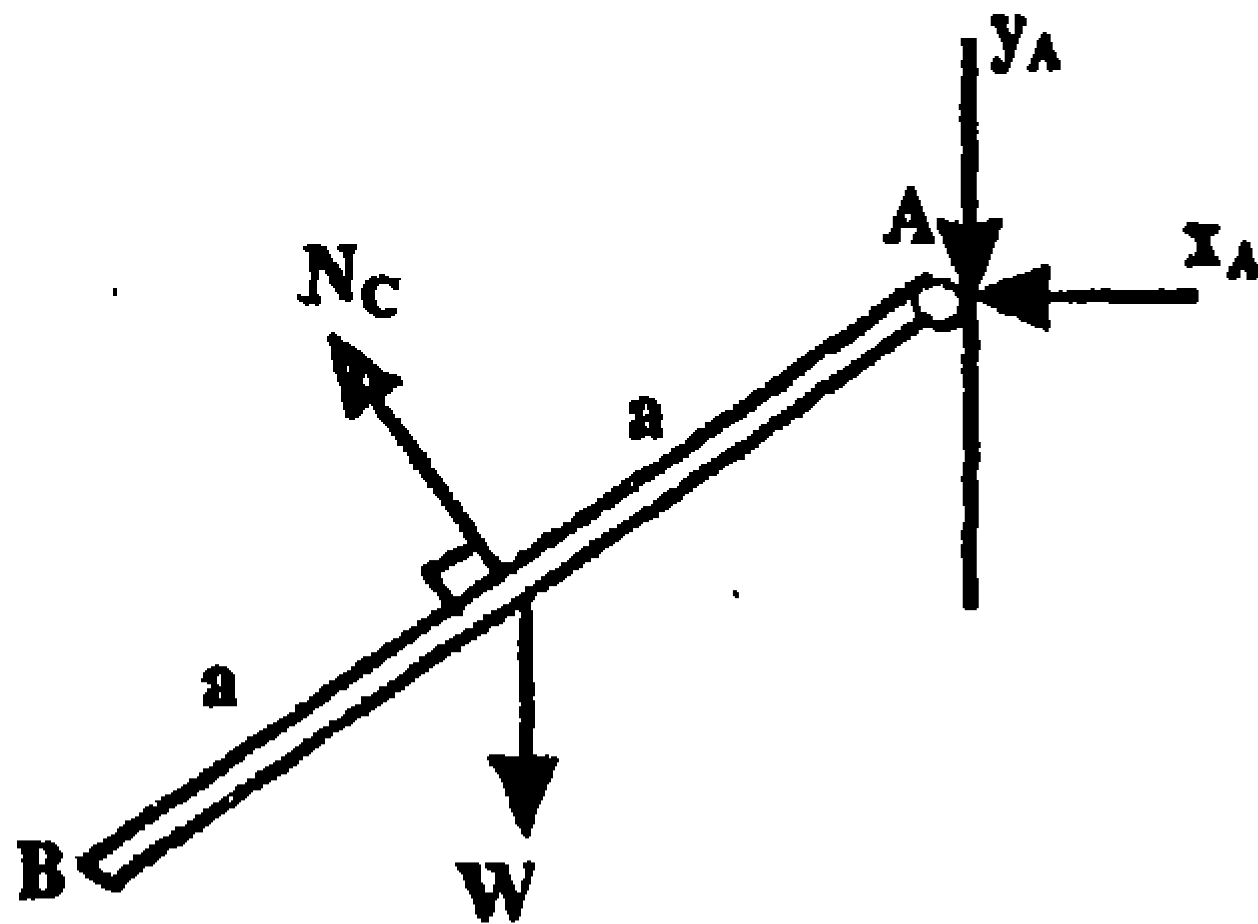
مثال ٢ :

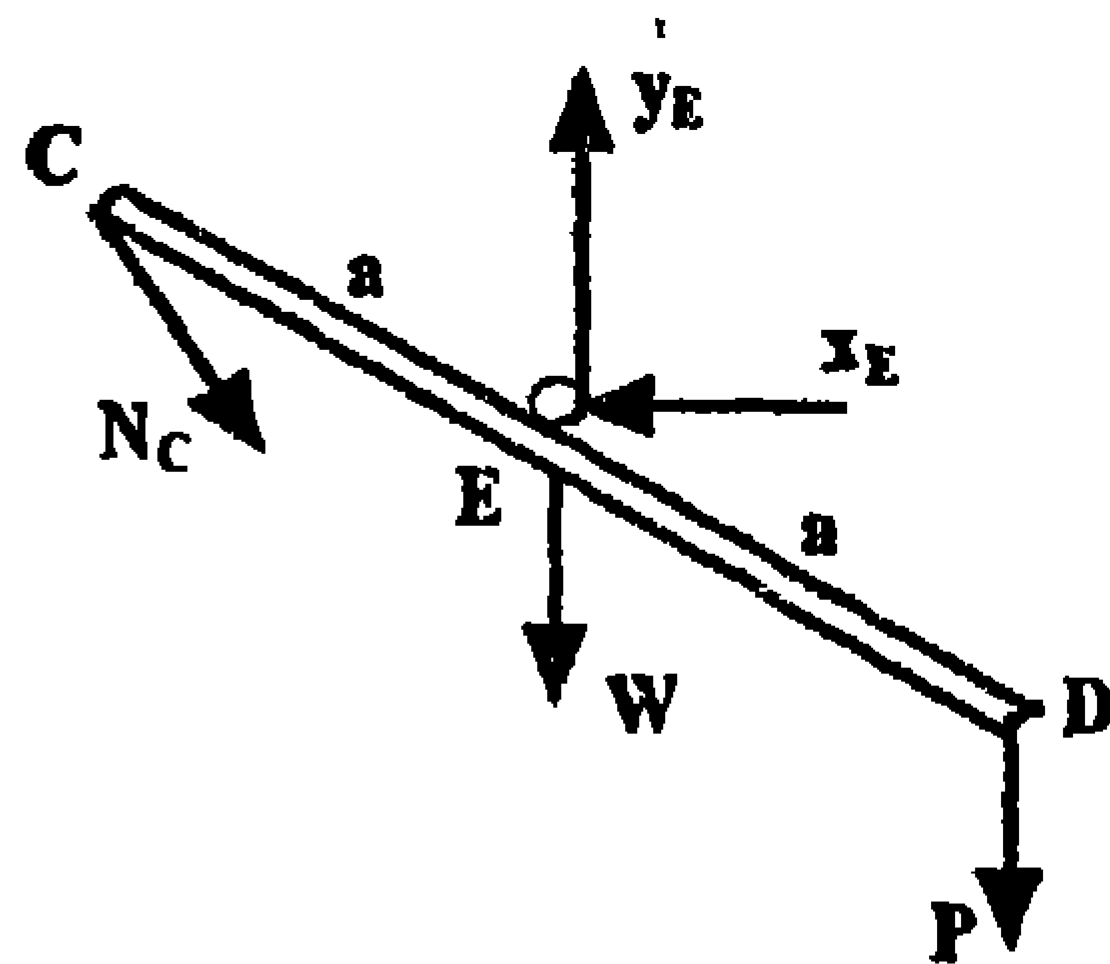
قضيبـان متسـاويان AB ، DC كل منهما وزنه W وطوله 2a يتصلان بحائط بمفصلين ثابتين A ، E و يتلامسان في C دون احتكاك عين القوة P اللازمة لإتزان القضيبين في الوضع المبين بالشكل و عين ردود الأفعال في المفاصل .



الحل :

نلاحظ أن AB به ثلاث مجاهيل فقط و هي x_A ، y_A ، N_C و ان CD به ٤ مجاهيل P ، x_E ، y_E ، N_C و المجموعة بها ٥ مجاهيل و هي P ، x_A ، y_A ، y_E ، x_E .





نبدأ بدراسة AB .

$$\sum M_A = 0$$

$$N_C \cdot a = W \cdot a \sin 60$$

$$N_C = \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad \text{..........} \quad (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$y_A = W - N_C \cos 30$$

$$y_A = \frac{1}{4} W \quad \text{..........} \quad (2)$$

$$\sum x = 0$$

$$x_A + N_C \sin 30 = 0$$

$$x_A = -\frac{\sqrt{3}}{4} W \quad \text{..........} \quad (3)$$

بدارسة المجموعة

$$\sum M_L = 0$$

$$P \cdot a \cos 30 = x_A \cdot a + W \cdot a \sin 60$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P = -\frac{\sqrt{3}}{2} W + \frac{\sqrt{3}}{2} W$$

$$P = \frac{1}{2} W \quad \text{..........} \quad (4)$$

$$\sum X = 0$$

$$x_E + x_A = 0$$

$$x_E = \frac{\sqrt{3}}{4} W$$

$$\sum y = 0$$

$$y_E + y_A = P + W + W$$

$$y_E = \frac{9}{4} W \quad \text{..........} \quad (5)$$

و مما سبق يلاحظ أن بعد رسم الأشكال يجب التأكد من أن عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات المتاحه للإتزان . و لذا فإن أفضل طريقة لحل مسائل المجموعات المفصلية هو اتباع الخطوات الأتية بالترتيب الوارد :

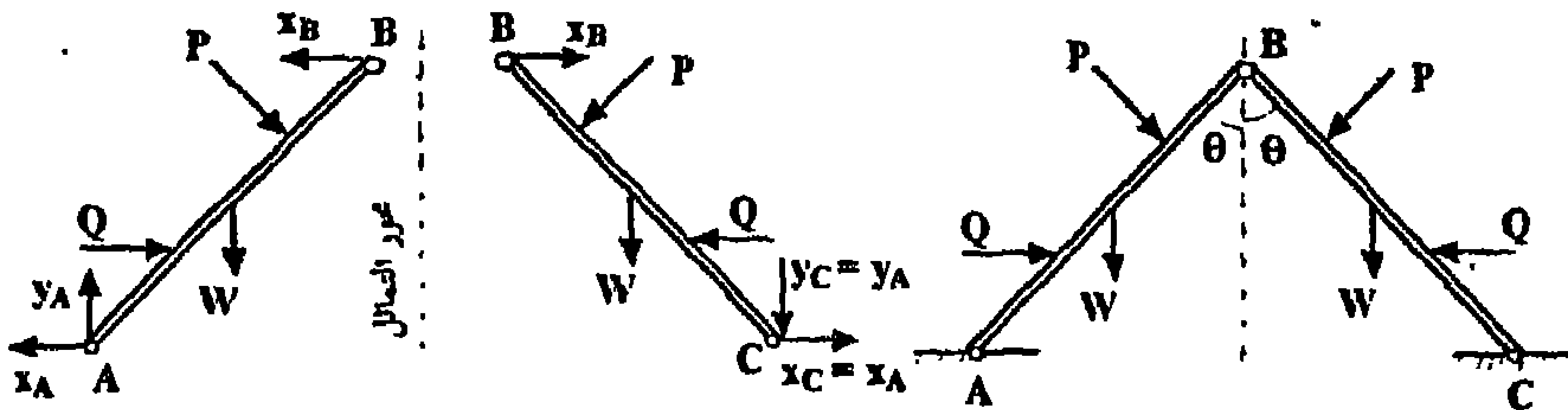
١ – البحث في الأشكال المرسومه عن أحداها و الذى يحتوي على ٣ مجاهيل علـى الأكـثر . فـإذا وجـد فنعتبره جسما واحدا متزنا و بكتابة ٣ معادلات اتزان له يمكن ايجاد هذه المجاهيل الثلاثه ثم ننتقـل الى جسم آخر .

٢ – اذا لم نجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسـة اتـزان المجموعـه المفصليـة كلهـا ايجـاد مجهول أو مجهولين على الأكثر ثم ننتقل إلى أحد الأجسام الأخرى .

٣ – اذا لم نتمكن من ايجاد أي مجهول من دراسة اتزان المجموعة نحاول ايجاد معادلتين في مجهولين و عادة ما يكون هذان المجهولين هما مركبتي الفعل في المفصل الداخلي .

١ – التماثل Symmetry :

يقال للجسم المتزن أنه تحت تأثير مجموعة من القوى أنه في حالة تماثل استاتيكي اذا توافر له التماثل الهندسي و التماثل في القوى الخارجية المؤثرة كما في الشكل .



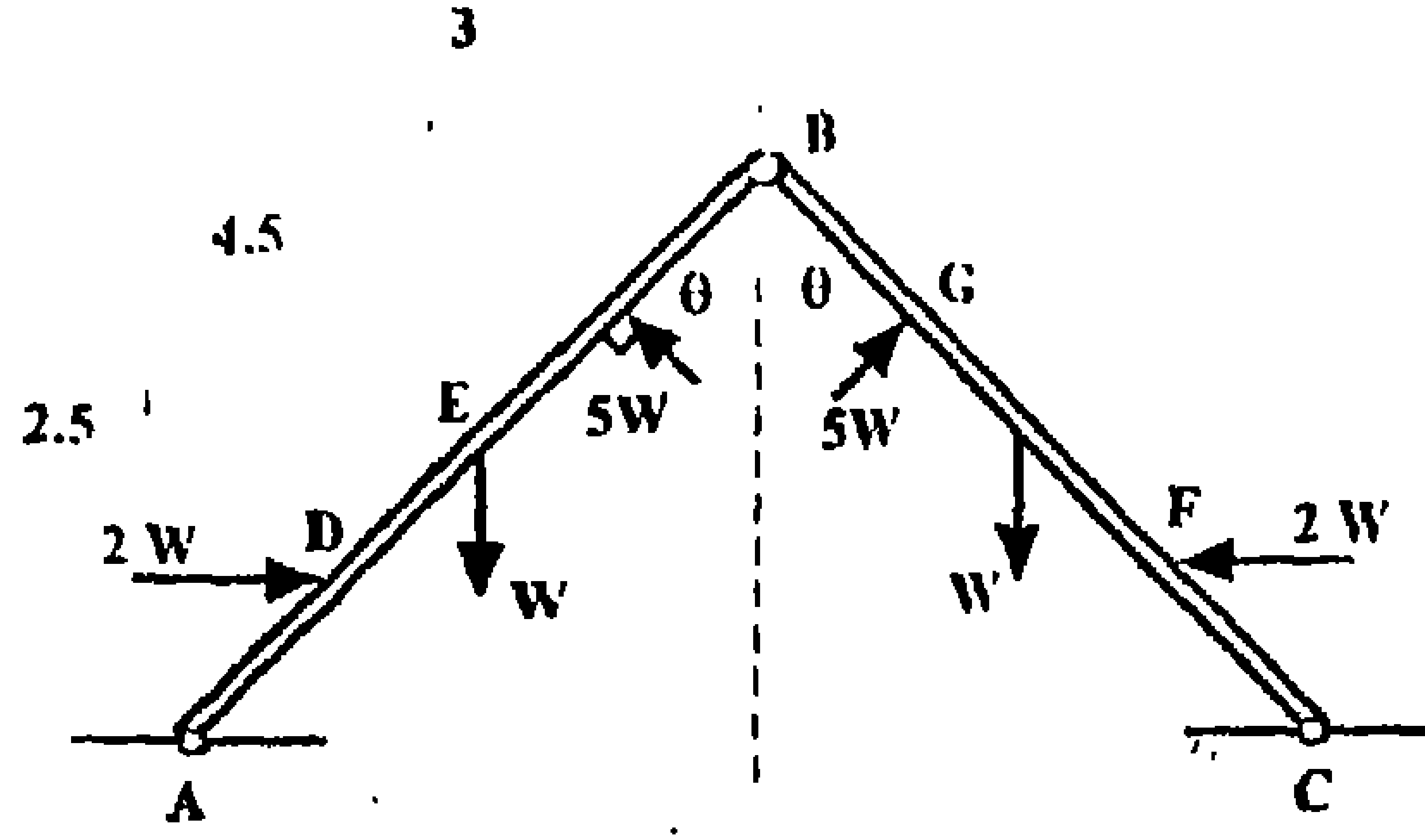
الجسمان متماثلان حول محور الخط الرأسي و يمكن الإستفادة من وجود التماثل كما يأتي :

١ – ردود الأفعال التي تنشأ في الإرتكازات المتماثلة هندسيا تكون متماثلة مقدارا و اتجاهاً .

٢ – يكفي معالجة نصف واحد من المجموعة بحيث يكون نصفا متماثلاً .

٣ – رد الفعل في المفصل الداخلي الواقع على خط التماثل يكون عموديا عليـه أي تنعـدم مركبتـه المنطبقة على خط التماثل .

مثال ١ :



المجموعـة المكونـة مـن الجسمين AB و BC متزنـة تحت تأثير القوى الموضحـة في الشكل ، عـين ردود الأفعال في المفاصل A , B , C اذا كان

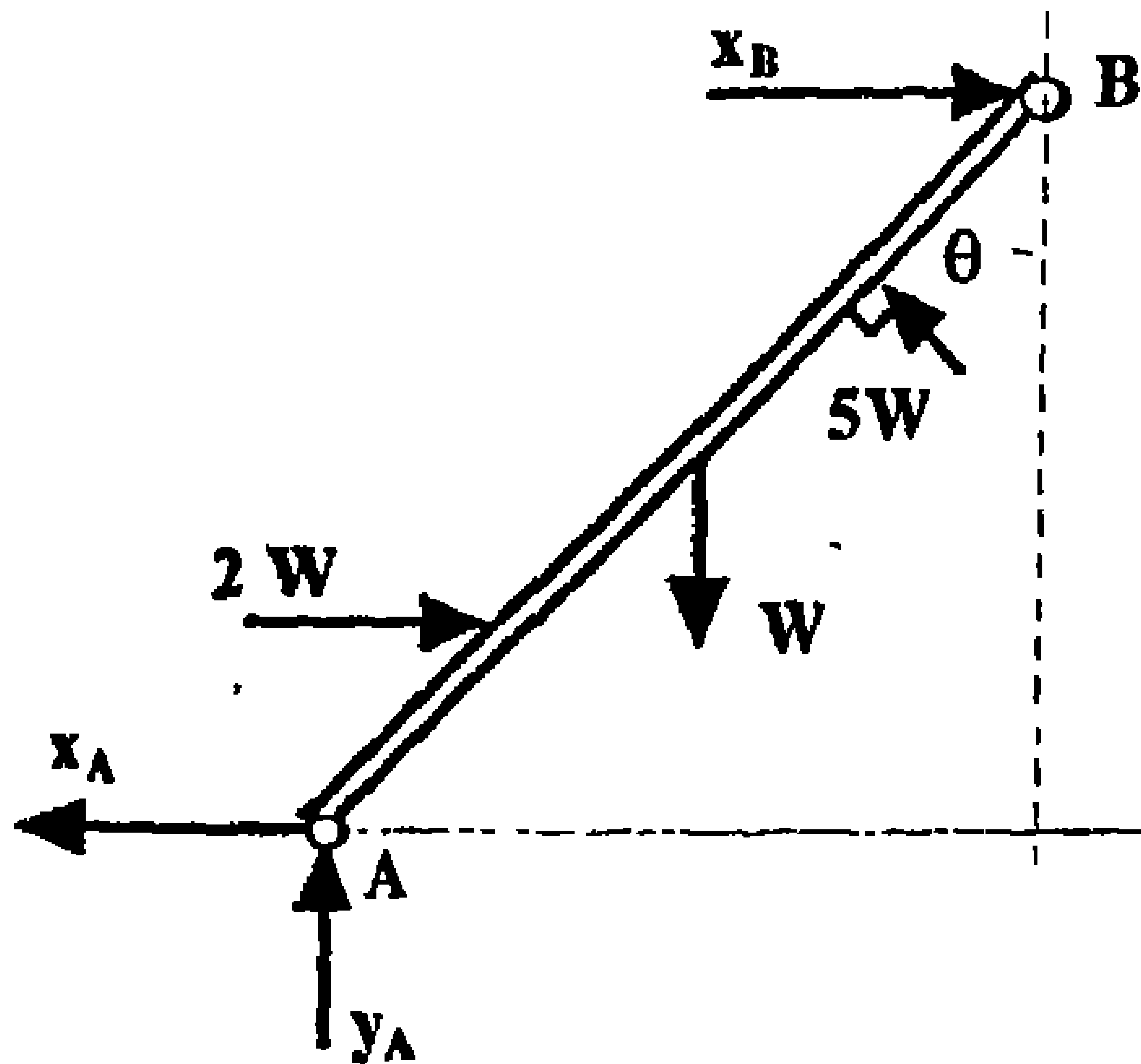
AB= BC = 10 ft

tan θ =3/4

AD = CF = 2.5 ft

EB = GB = 3 ft

الحل :



اجـراء الحـل علـى نصـف المجموعة بدراسة اتزان AB ، الجسم AB يحتوي على ثلاثة مجاهيل فقط و هي x_B ، y_A ، x_A .

$$\sum M_A = 0$$

$$8x_B + 3W + 2W \times 2 = 5W \times 7$$

$$x_B = 7/2W$$

$\sum x = 0$

$$x_B + 2W = x_A + 5W\cos\theta$$

$$x_A = \frac{3}{2}W$$

$\sum y = 0$

$$y_A + 5W\sin\theta = W$$

$$y_A = -2W$$

أي أن y_A عكس الإتجاه المفروض و يكون بعد ذلك رد الفعل المفصل C متماثل .

٢ – المفاصل المحملة :

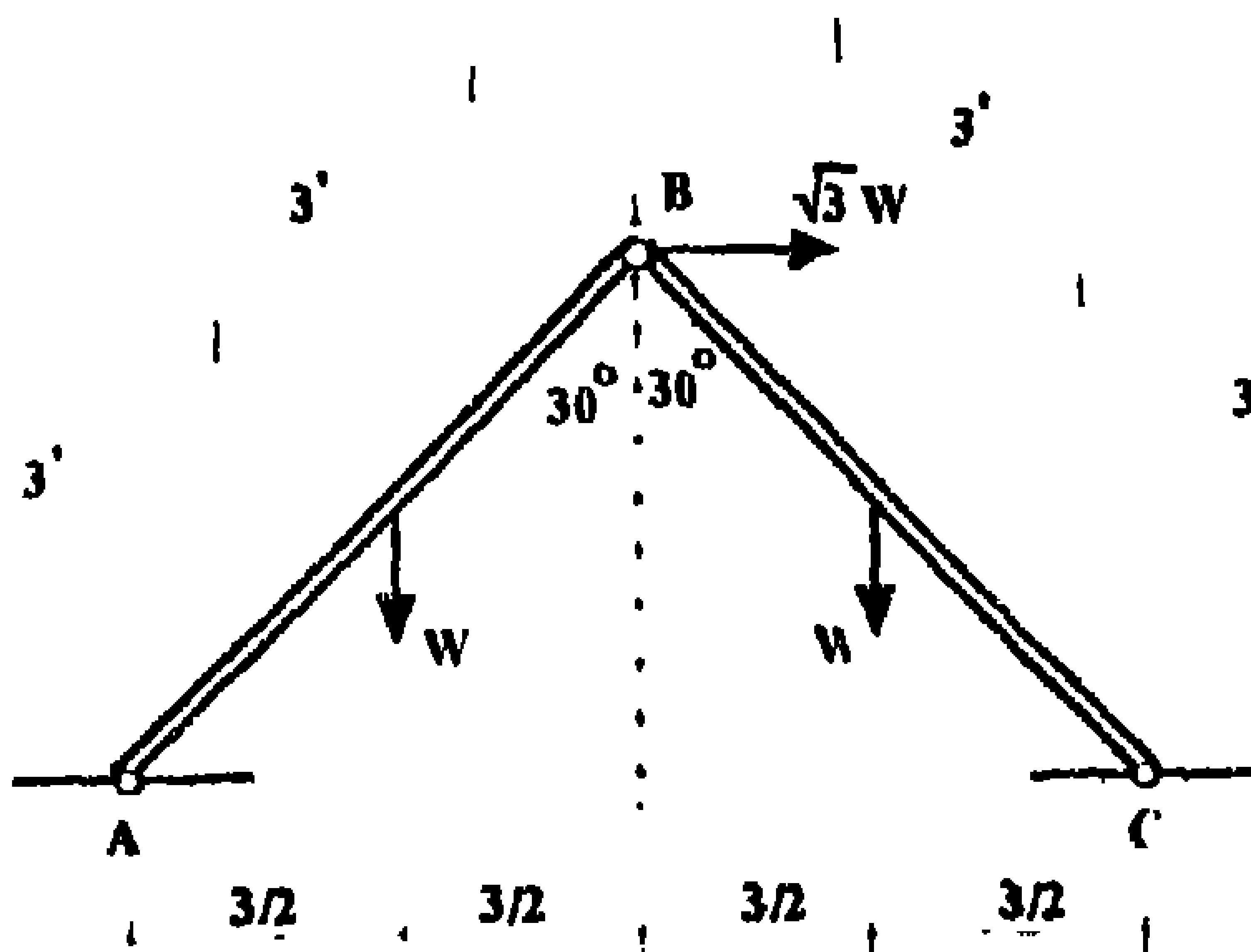
اذا اثرت قوة على مفصل يحمل عضوين محملين فإنها تعالج بإحدى الطريقتين :

١ – اذا كانت القوة منطبقة على محور تماثل نعتبر نصفها مؤثرا على أحد الجسمين و النصف الآخر على الجسم الآخر .

٢ – اذا كانت القوة ليست في وضع متماثل نعتبرها كلها مؤثرة على أحد الجسمين.

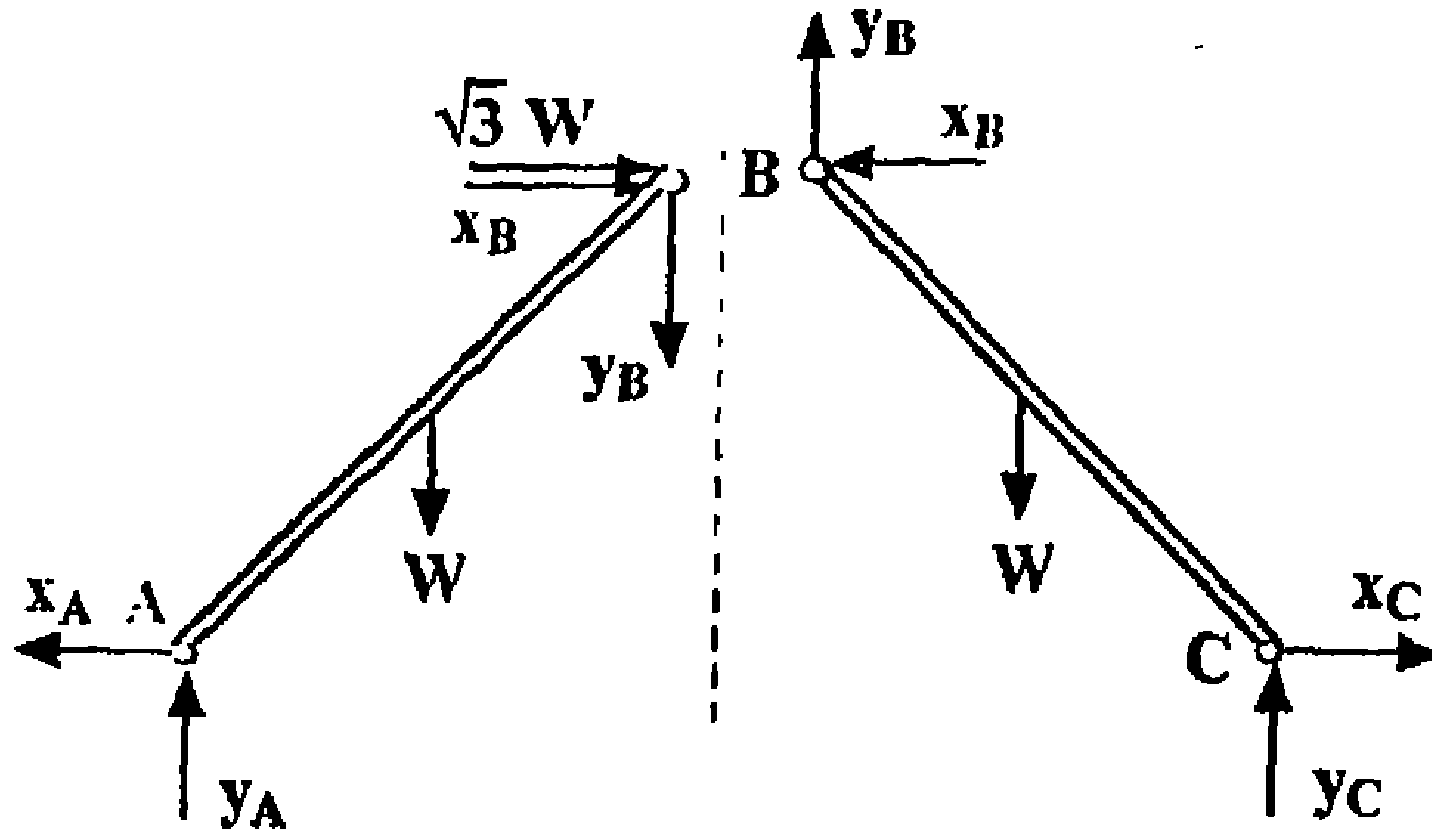
مثال ٢ :

عين ردود الأفعال في المفاصل الثلاثة A , B , C للهيكل المفصلي الموضح في الشكل .



الحل :

نعتبر القوة الأفقية $\sqrt{3}\,W$ المؤثرة على المفصل B واقعة على الجسم AB مثلا ثم نكمل حل المسألة عاديا كما يأتي:



أولا بدراسة اتزان المجموعة.

$$\sum M_C = 0$$

$$\sqrt{3}W \cdot 3\sqrt{3} + 6y_A = 1.5W + 4.5W$$

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

أي عكس الإتجاه المفروض.

$$\sum y = 0$$

$$y_A + y_C = W$$

$$y_C = 5/2W$$

بدراسة اتزان BC

$$\sum M_B = 0$$

$$3y_C + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$3\left(\frac{5}{2}W\right) + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\ W$$

أي عكس الإتجاه المفروض.

$$\sum X = 0$$

$$X_B = X_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\ W$$

$$\sum y = 0$$

$$y_B + y_C = W$$

$$y_B = \frac{3}{2}W$$

من اتزان AB

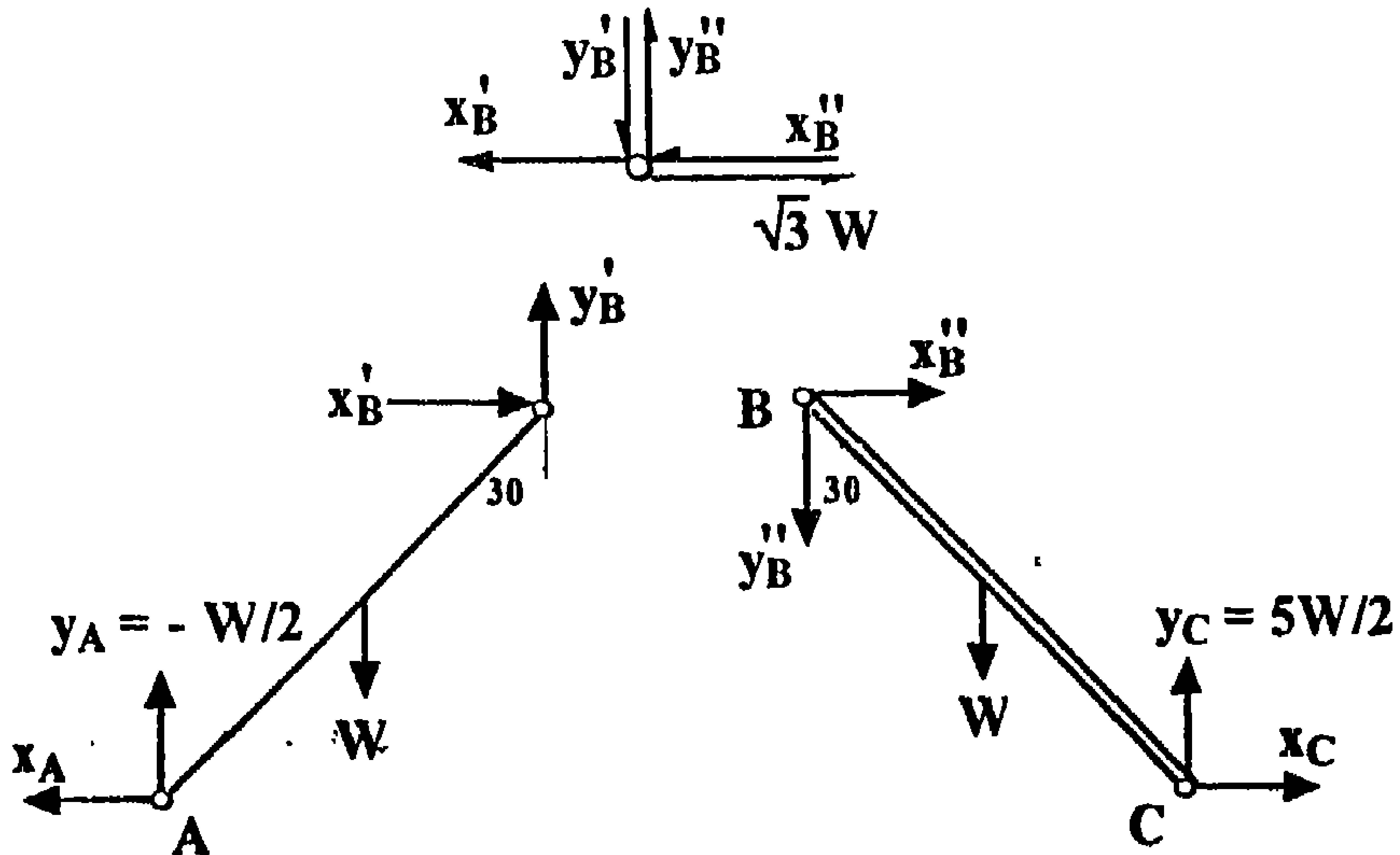
$$\sum x = 0$$

$$x_A = x_B + \sqrt{3}W$$

$$x_A = \frac{1}{3}\sqrt{3}W$$

حل آخر أدق :

في الحل السابق اعتبرنا الحمل $\sqrt{3}W$ واقع على الجسم AB بينما هو في الحقيقة يقع على المسمار B الذي يصل الجسمين AB و BC و لذلك سنأخذ في هذا الحل اتزان المسمار B على حده تحت تأثير الحمل $\sqrt{3}W$ و ردود أفعال كل من AB و BC عليه ($x'_B , y'_B , x''_B , y''_B$) ثم نأخذ اتزان كل من الجسيمينBC و AB كل على حده و بالطبع لن تتغيرمعدلات اتزان المجموعة .



من اتزان المجموعة:

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

$$y_C = \frac{5}{2}W$$

من اتزان AB' :

$$\sum y = 0$$

$$y'_B + y_A - W = 0$$

$$y'_B = \frac{3}{2}W$$

$$\sum M'_B = 0$$

$$W \times \frac{3}{2} - Y_A(3) - X_A\left(3\sqrt{3}\right) = 0$$

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

$$\sum x = 0$$

$$x'_B - x_A = 0$$

$$x'_B = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

من اتزان CB'' :

$$\sum y = 0$$

$$y_C - W - y''_B = 0$$

$$y''_B = \frac{3}{2}W$$

$$\sum M_{B''} = 0$$

$$y_C(3) + x_C\left(3\sqrt{3}\right) - W(3/2) = 0$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

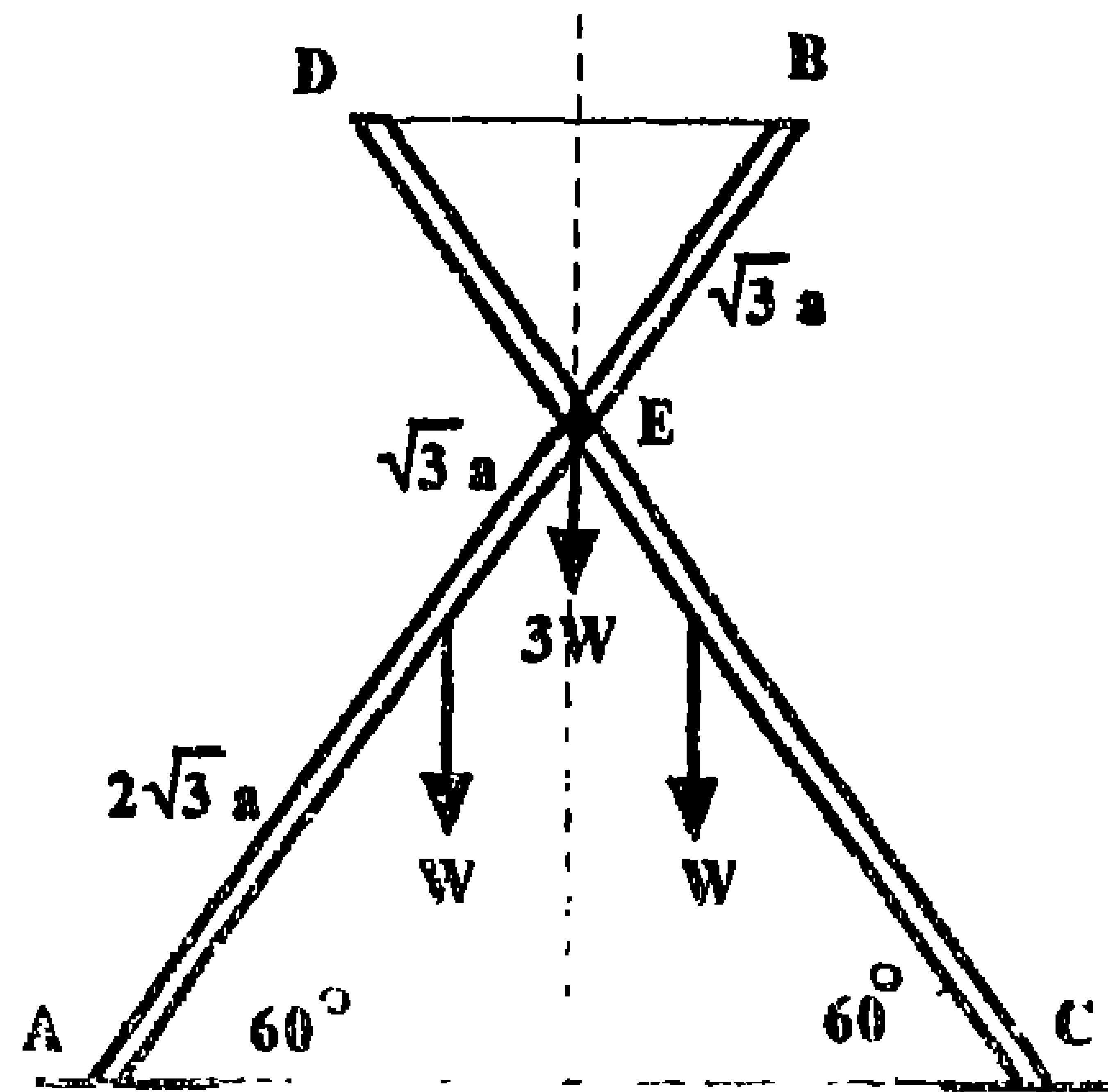
$\sum x = 0$

$$x_C + x''_B = 0$$

$$x_B = \frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

و يتضح للطالب أن نتائج هذا الحل تتفق و الحل السابق في الإرتكازات الخارجيه (C ، A ، y_C ، x_C ، y_A ، x_A) بينما تتباين عند المفصل B و يمكن تفسير ذلك بأنه في هذا الحل قد حللنا الحمل $\sqrt{3}W$ المؤثر عند المسمار B في المجموعة الى حملين أحدهما (محصلة x'_B ، y'_B) على الجسم AB و الآخر (محصلة x''_B ، y''_B) على الجسم BC عند دراسة اتزان كل من الجسيمين على حده .

مثال ٣ :

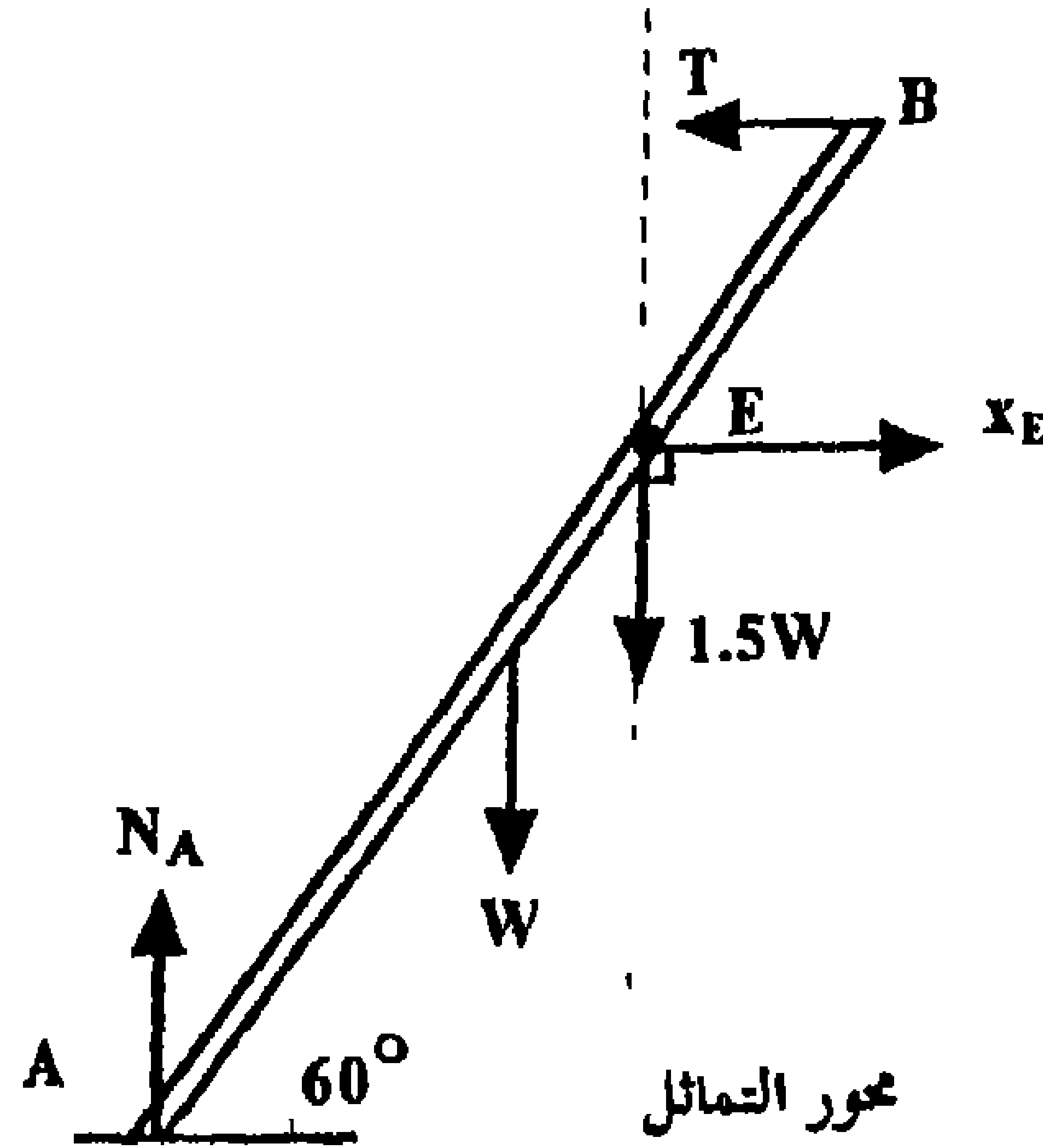


يرتكز اللوحان AB و CD على ارض افقية ملساء و يتصلان مفصليا في E . يحفظ اتزان اللوحين خيط افقي BD و يؤثر حمل راسي $3W$ على المفصل كما في الشكل ، طول كل من اللوحين $4\sqrt{3}a$ ووزنه W .

عين رد فعل الأرض عند كل من A ، C و كذلك الشد في الخيط ورد فعل المفصل E .

الحل :

اللوحان متماثلان حول الخط الراسي المار بالمفصل الداخلي E و القوة 3W تؤثر على المفصل في E و منطبقة على خط التماثل . نحل المسألة على نصف متماثل فقط كما يأتي :



بدراسة اتزان AB

$$\sum Y = 0$$

$$N_A = W + 1.5W$$

$$N_A = 2.5W \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sum M_E = 0$$

$$N_A \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{2} = W\frac{\sqrt{3}a}{2} + T\frac{3a}{2}$$

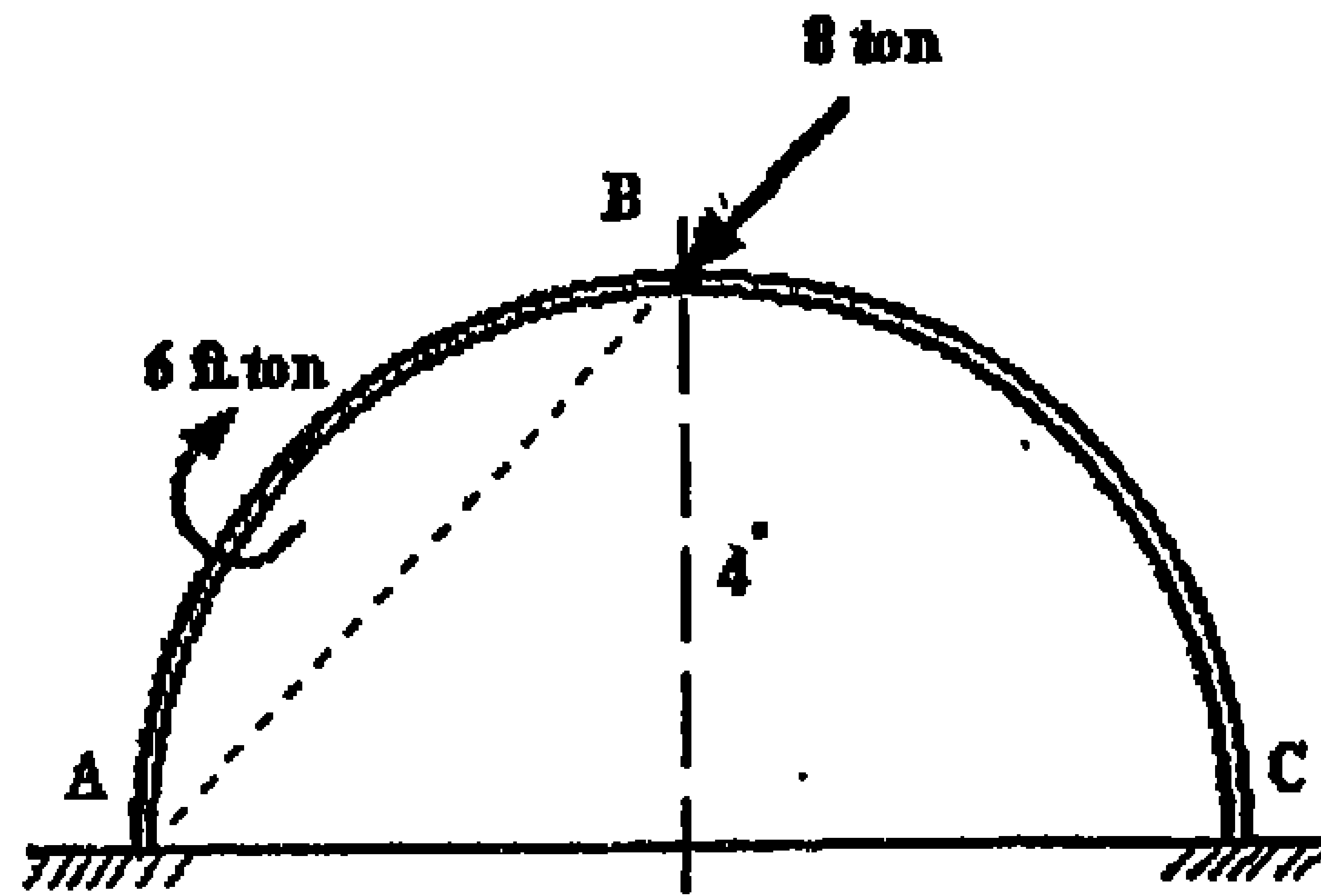
$$T = \frac{6.5}{3}\sqrt{3}W \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\sum X = 0$$

$$X_E = T = \frac{6.5}{3}\sqrt{3}W \quad \cdots\cdots (3)$$

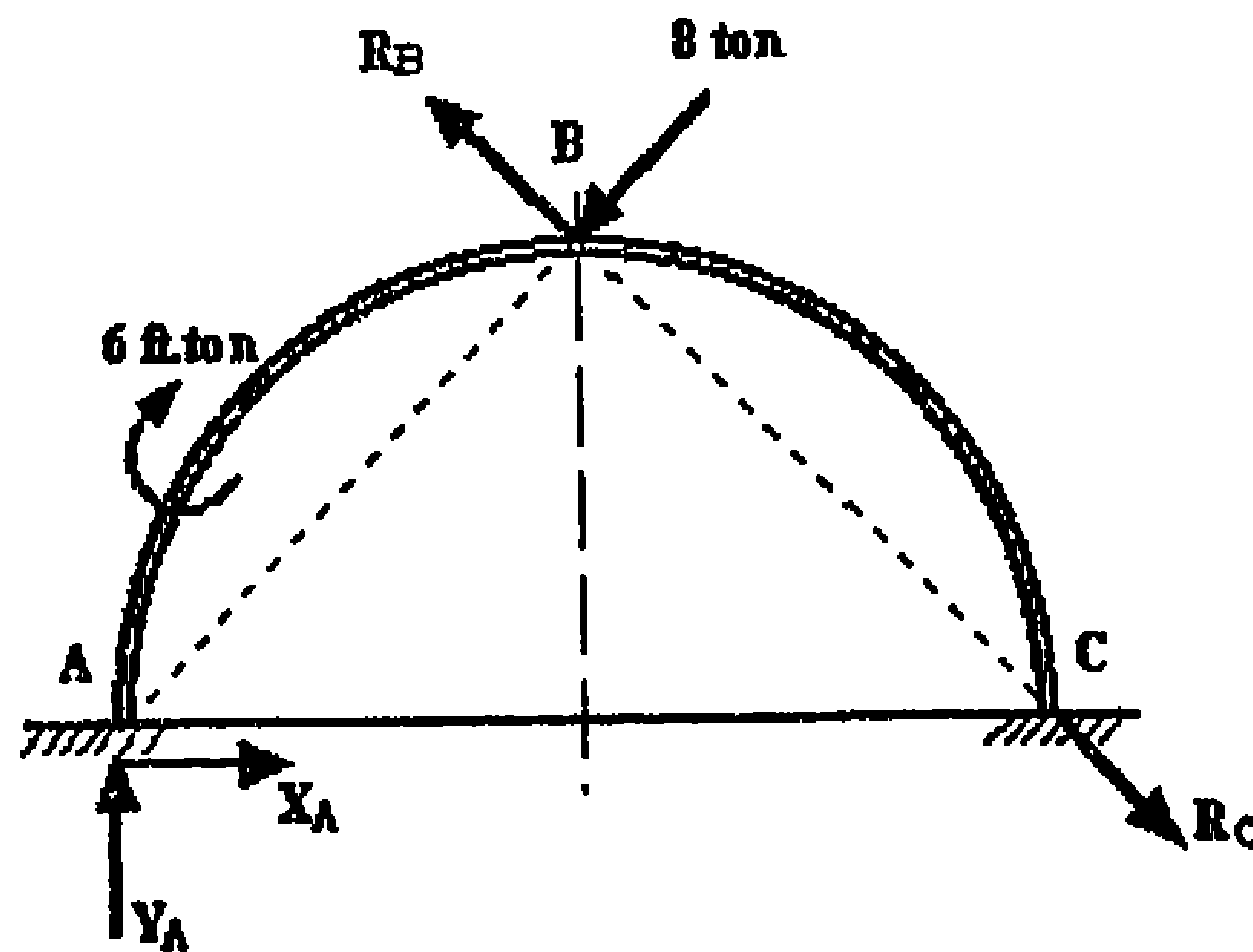
مثال ٤ :

عقد ثلاثي المفاصل ABC يؤثر عليه عزم ازدواج مقداره ٦ قدم طن و قوة ٨ طن كما في الشكل. عين ردود فعل المفاصل الثلاثة A و B و C.



الحل :

القوة ٨ طن المؤثرة على المفصل B يمكن اعتبارها واقعة على AB و بذلك يصبح BC وصلة خفيفة و ينشا عند B رد فعل RB و كذلك عند C رد فعل RC = - RB .



بدراسة اتزان AB :

$$\sum M_A = 0$$

$$6 = 4\sqrt{2}R_B$$

$$R_B = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$X_A = 8\cos 45 + R_B \cos 45$$

$$X_A = \left(\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\right) \quad \text{ton}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_A = 8\sin 45 - R_B \sin 45$$

$$= \left(\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\right) \quad \text{ton}$$

$$R_C = \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \text{ton}$$

ملاحظات عامة:

١ – عند الإنتقال من جسم إلى جسم يراعى سريان قانون الفعل ورد الفعل على ما بين الجسمين من ردود أفعال (لكل فعل رد فعل مساو في المقدار ومضاد في الإتجاه).

٢ – اذا أثرت قوة على مفصل داخلي – عند الفصل تعتبر القوة واقعة على أحد الأجسام المتصلة بالمفصل المحمل.

٣ – التماثل الاستاتيكي في أنظمة مجموعة الأجسام حول محورها. يلزم أن يتوفر فيه شرطين هما:

أ – تماثل هندسي (زوايا + أبعاد)

ب – تماثل في القوى الخارجة المؤثرة.

في هذه الحالة يكتفى بدراسة نصف أجسام المجموعة فقط مع مراعاة عدم قطع أجسام (يمكن قطع الخيط الخفيف أو القضيب الخفيف أو الركيزة البندولية) ويلاحظ أنه نتيجة للتماثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال.

٤ – المفصل الواقع على محور التماثل Symmetry axis يسمى مفصل تماثل. رد فعل مفصل التماثل يكون عمودي على محور التماثل أي تنعدم مركبته المنطبقة على محور التماثل.

٥ – اذا كان مفصل التماثل محملي – فعند الفصل نأخذ نصف الحمل فقط.

٦ – لحل مسائل المجموعات المفصلية نتبع الخطوات الآتية:

أ – نبحث عن شكل به ثلاث مجاهيل على الأكثر. فاذا وجدنا مثل هذا الشكل نعتبره جسما واحداً متزنا بكتابة ثلاث معادلات اتزان له يمكن ايجاد هذه المجاهيل الثلاثة ثم ننتقل إلى جسم آخر.

ب – اذا لم نجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسة اتزان المجموعة المفصلية كلها ايجاد مجهول أو مجهولين ثم ننتقل إلى أحد الأجسام الأخرى.

جـ – اذا لم نتمكن من ايجاد أي مجهول من دراسة اتزان المجموعة نحاول ايجاد معادلتين في مجهولين.

د – اذا نتجت قيمة أي من المجاهيل بالسالب فمعنى ذلك أن الاتجاه الصحيح هو عكس ما فرضناه ولا يلزم اعادة الحل بل يكتفى باشارة المجهول التي تدل على اتجاهه الصحيح.

مثال ٥ :

أربعة قضبان متساوية ثقيلة طول كل منها a ووزنه W ترتبط مفصلياً لتؤلف هيكلاً مربعاً ABCD يحفظ شكل المربع قضيب خفيف BD. علق الهيكل من A كما في الشكل أوجد ردود فعل المفاصل والضغط في القضيب الخفيف BD. حل تحليلياً وبيانياً

الحل التحليلي:

دراسة اتزان المجموعة كلها (مجموعة متماثلة)

$$\sum Y = 0$$

$$P - W - W - W - W = 0$$

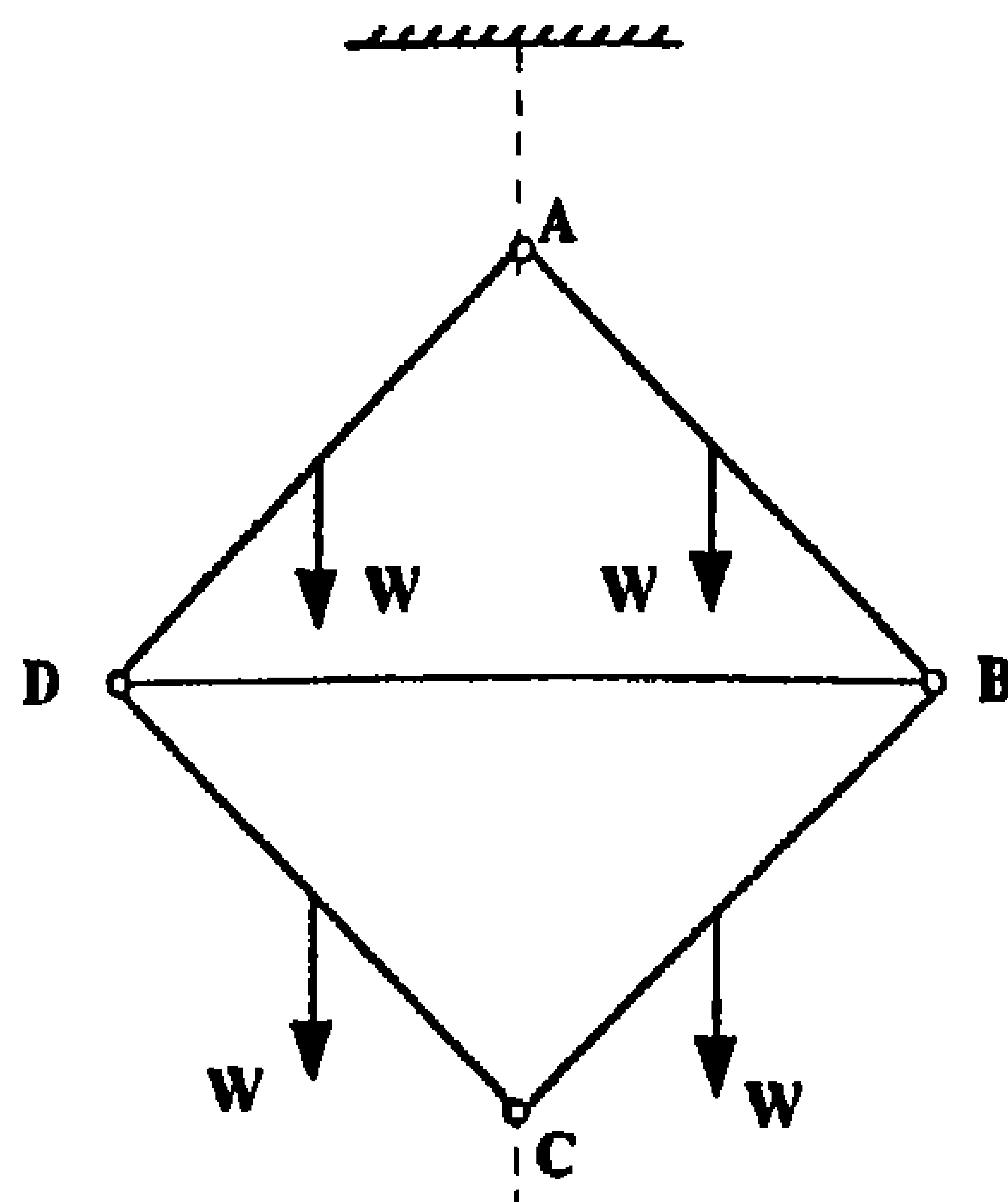
$$\therefore P = 4W$$

اتزان العضو BC

$$\sum M_B = 0$$

$$X_C\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + W\left(\frac{A}{2\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore X_C = -\frac{W}{2}$$



$$\sum X = 0$$

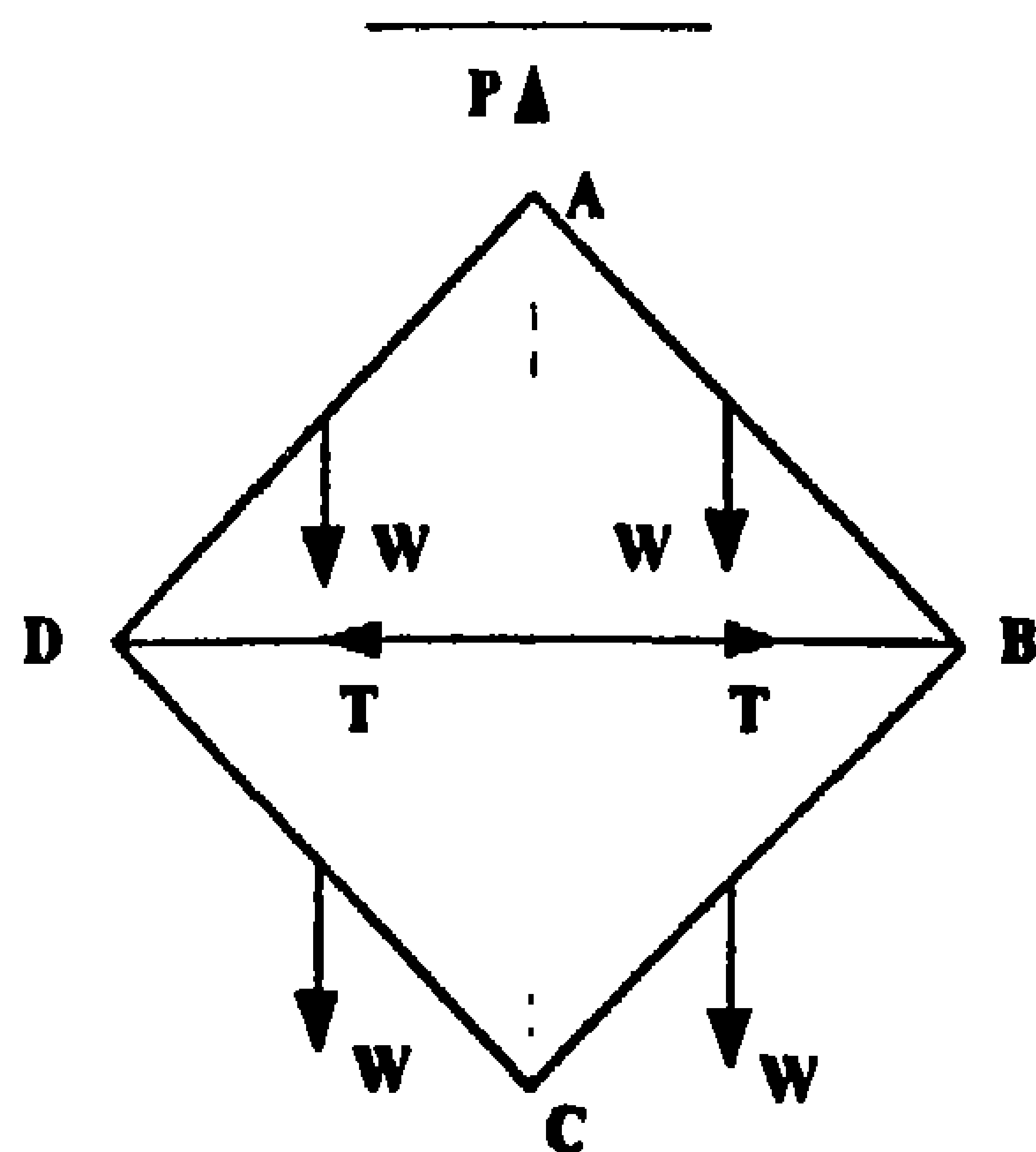
$$X_C - X_B = 0$$

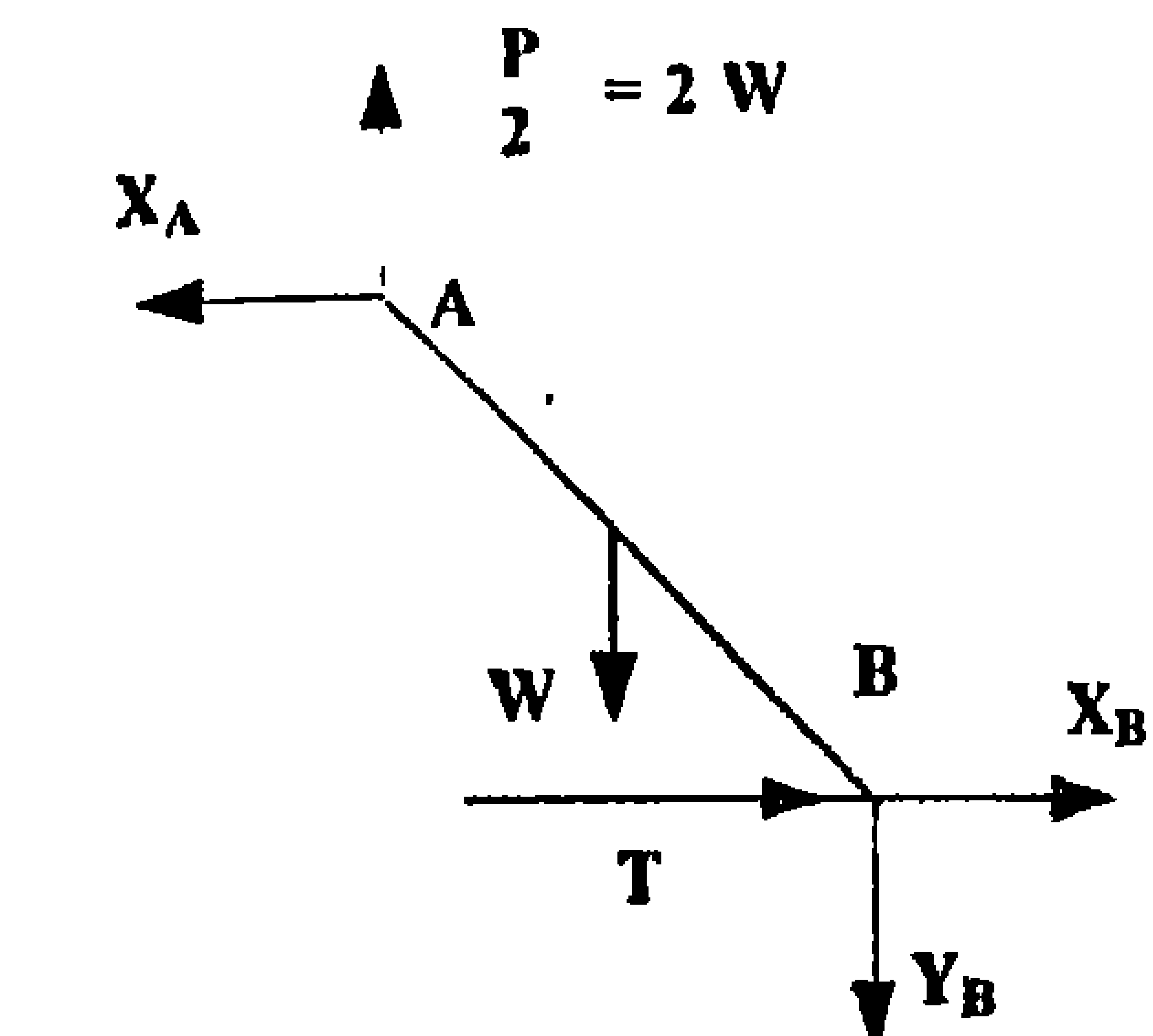
$$\therefore X_B = -\frac{W}{2}$$

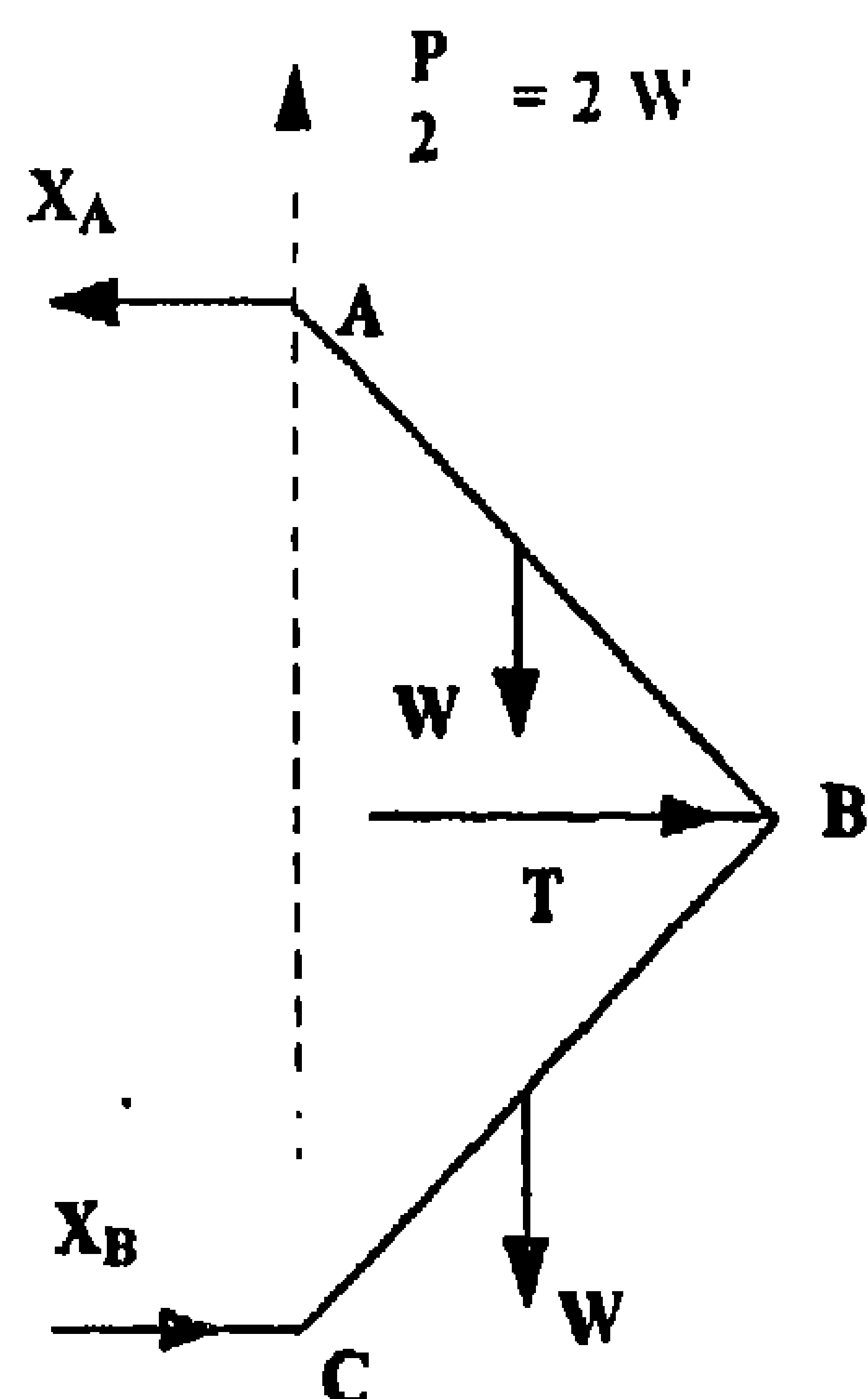
$$\sum Y = 0$$

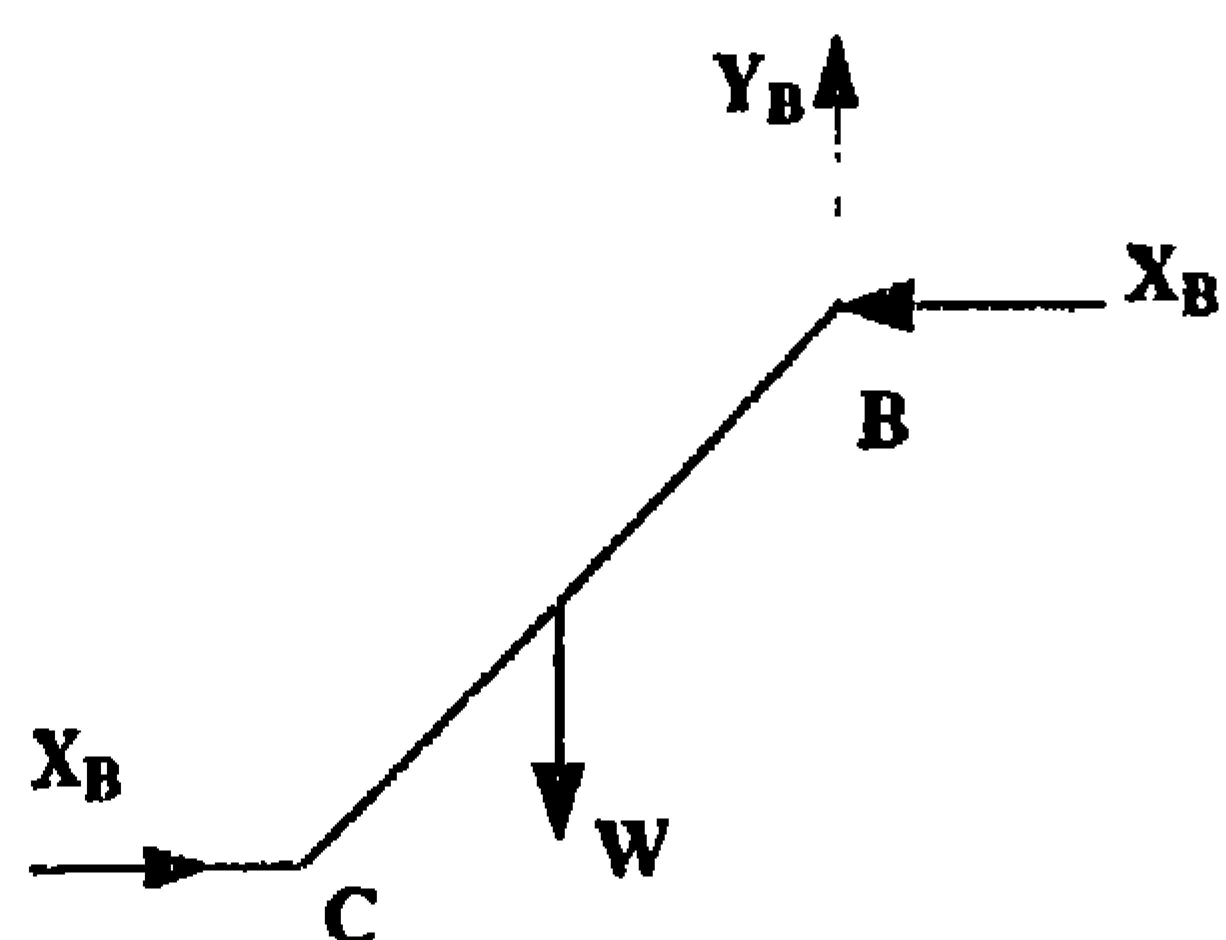
$$Y_B - W = 0$$

$$Y_B = W$$









اتزان العضو AB

$$\sum M_A = 0$$

$$-W\left(\frac{A}{2\sqrt{2}}\right) + T\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) + X_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) - Y_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore T = 2\,W$$

$$\sum X = 0$$

$$-X_A + T + X_B = 0$$

$$X_A = 1.5\,W$$

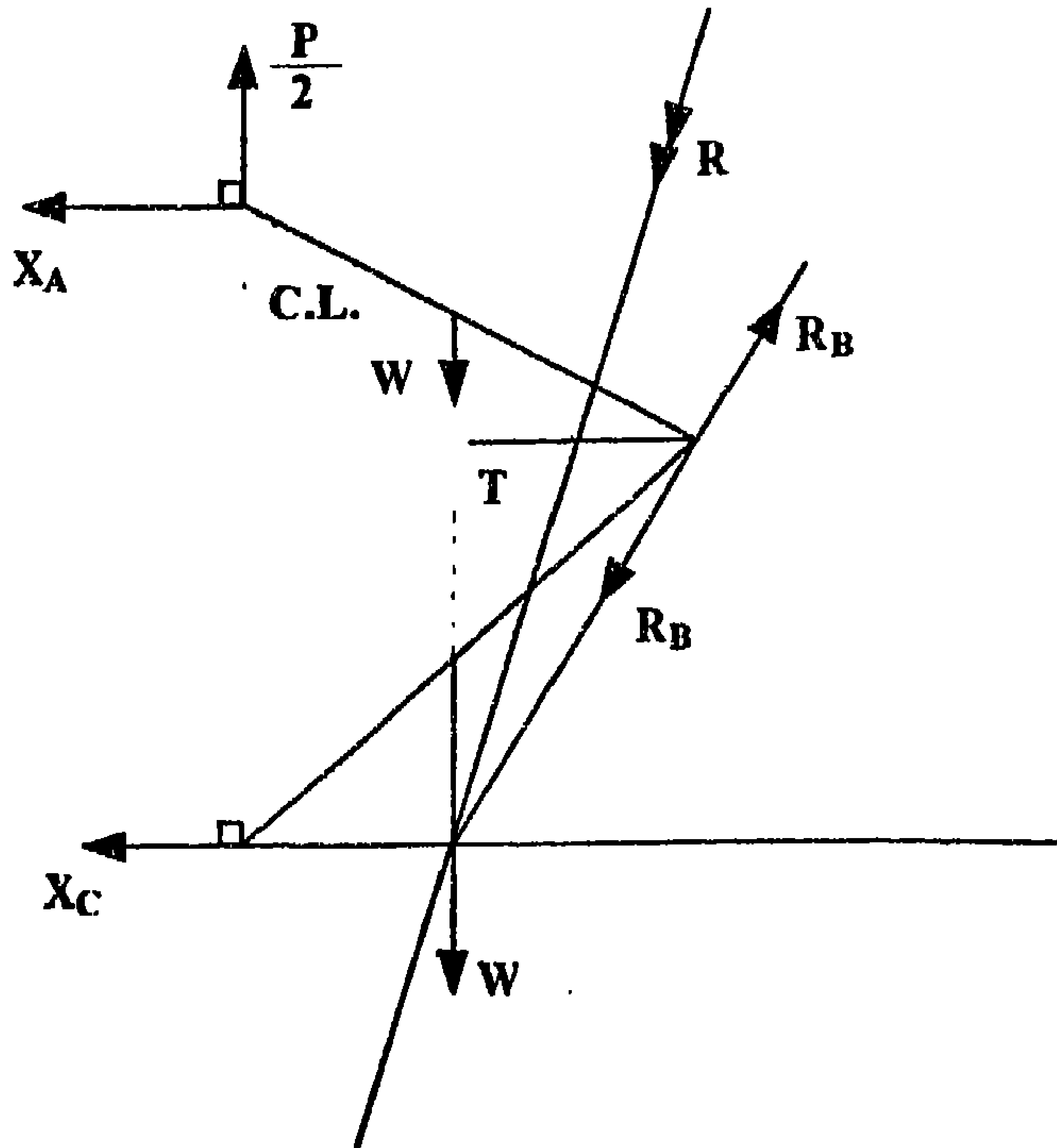
ملخص الأجوبة:

A	B	C	
$X_A = 1.5W$	$X_B = -\frac{W}{2}$	$X_C = -\frac{W}{2}$	$T = 2W$
$Y_A = 4W$	$Y_B = W$	$Y_C = 0$	ساند

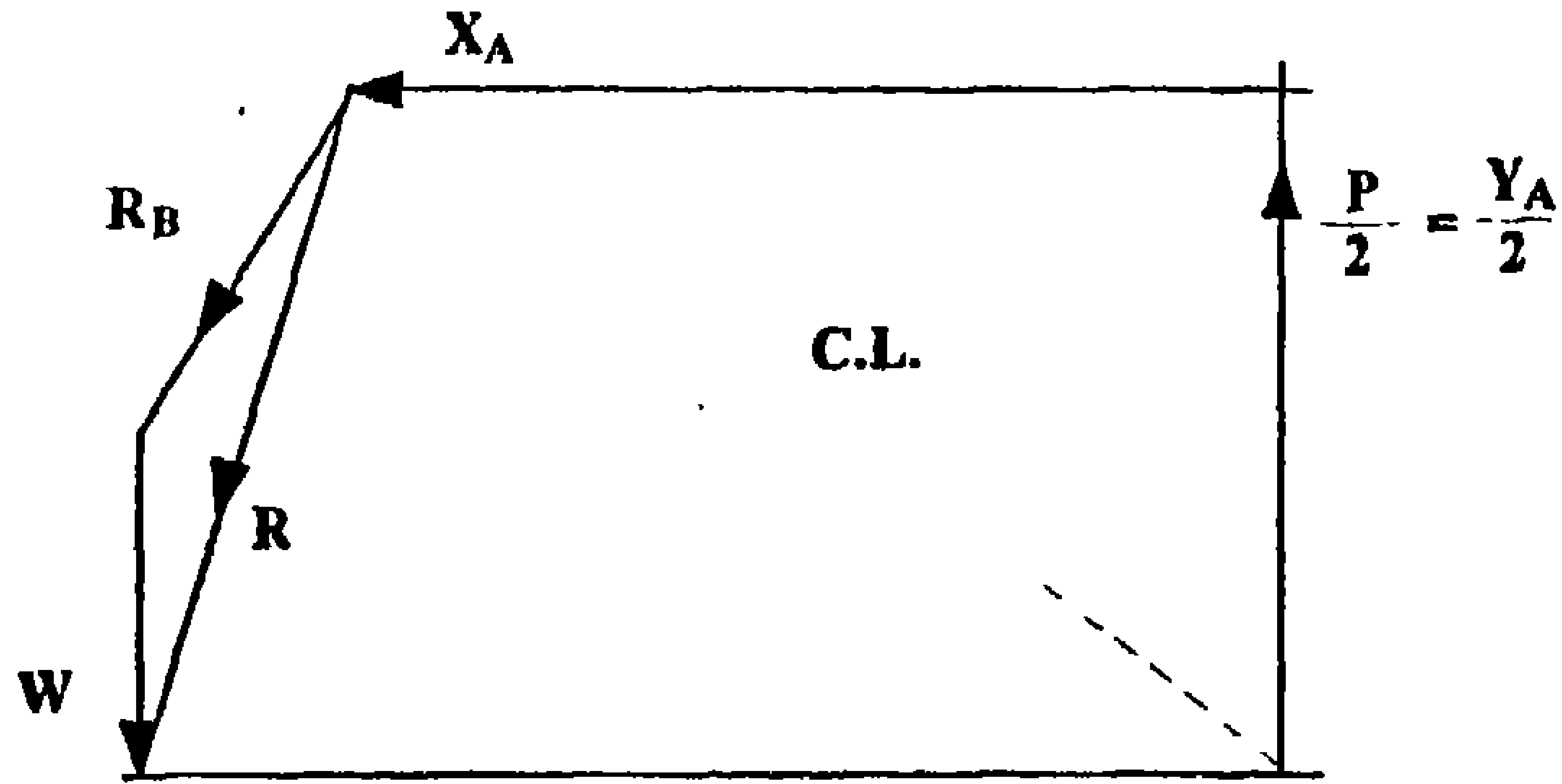
الحل البياني:

مقياس رسم المسافات: a = 6 cm ومنها $1\,cm = \frac{a}{6}$

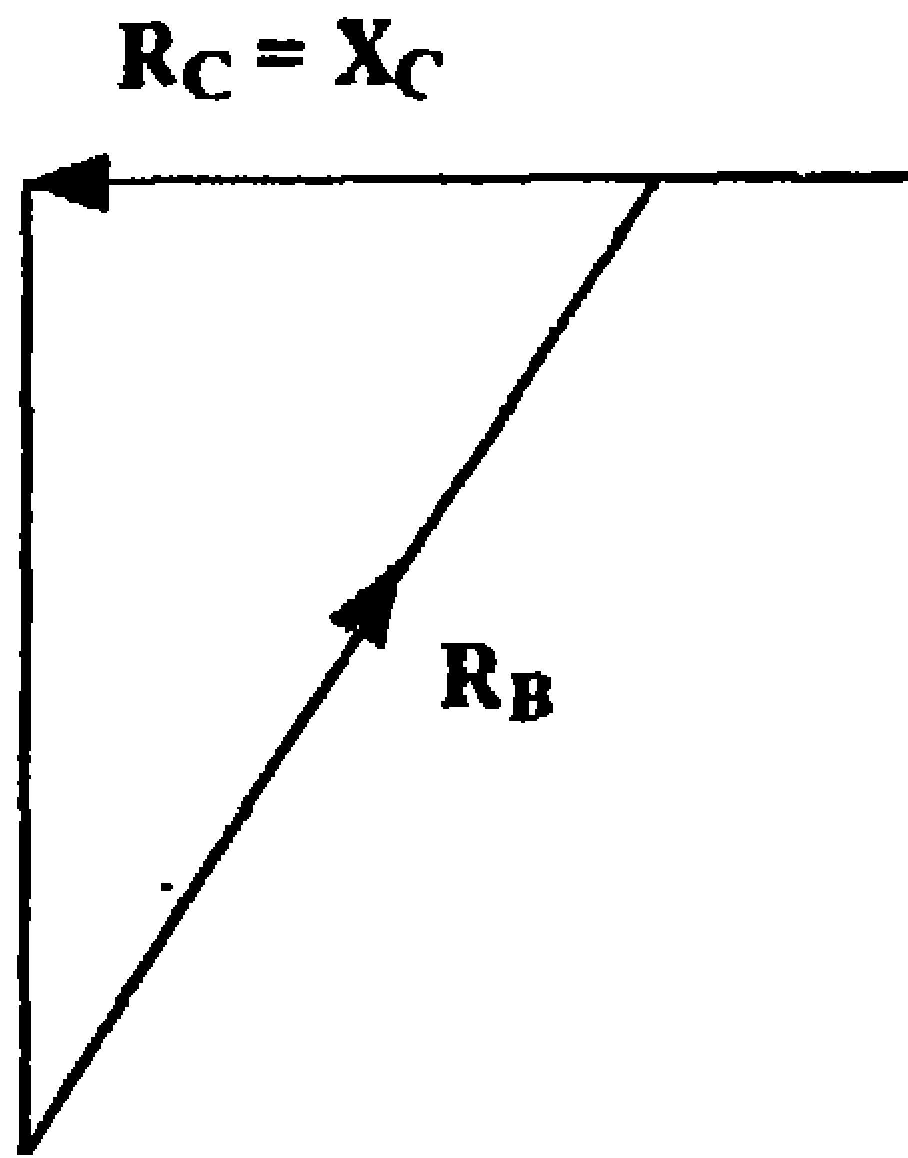
مقياس رسم القوى W = ٤ mc ومنها $1\,cm = \frac{W}{6}$



شكل (أ)



شكل (جـ)



شكل (ب)

شكل (أ) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل كله وعلى كل قضيب على حده. شكل (ب) يمثل مثلث القوى لاتزان القضيب BC، شكل (جـ) يمثل مضلع القوى لاتزان القضيب AB

النتائج: من الرسم وبالقياس.

$R_B = 1.2\ W$ $\qquad$ $R_C = 0.5\ W$

$X_A = 1.5\ W$ $\qquad$ $T = 2\ W$

$P = 4\ W$ $\qquad$ $Y_A = 4\ W$

مثال ٦ :

الهيكل المفصلي يتألف من أربع قضبان خفيفة AB ، BC ، AD ، DE ومؤثر عليه بقوة أفقية P عند المفصل A كما في الشكل (أ)، عين ردود فعل المفاصل. حل تحليليا وبيانياً

الحل التحليلي: شكل (ب)

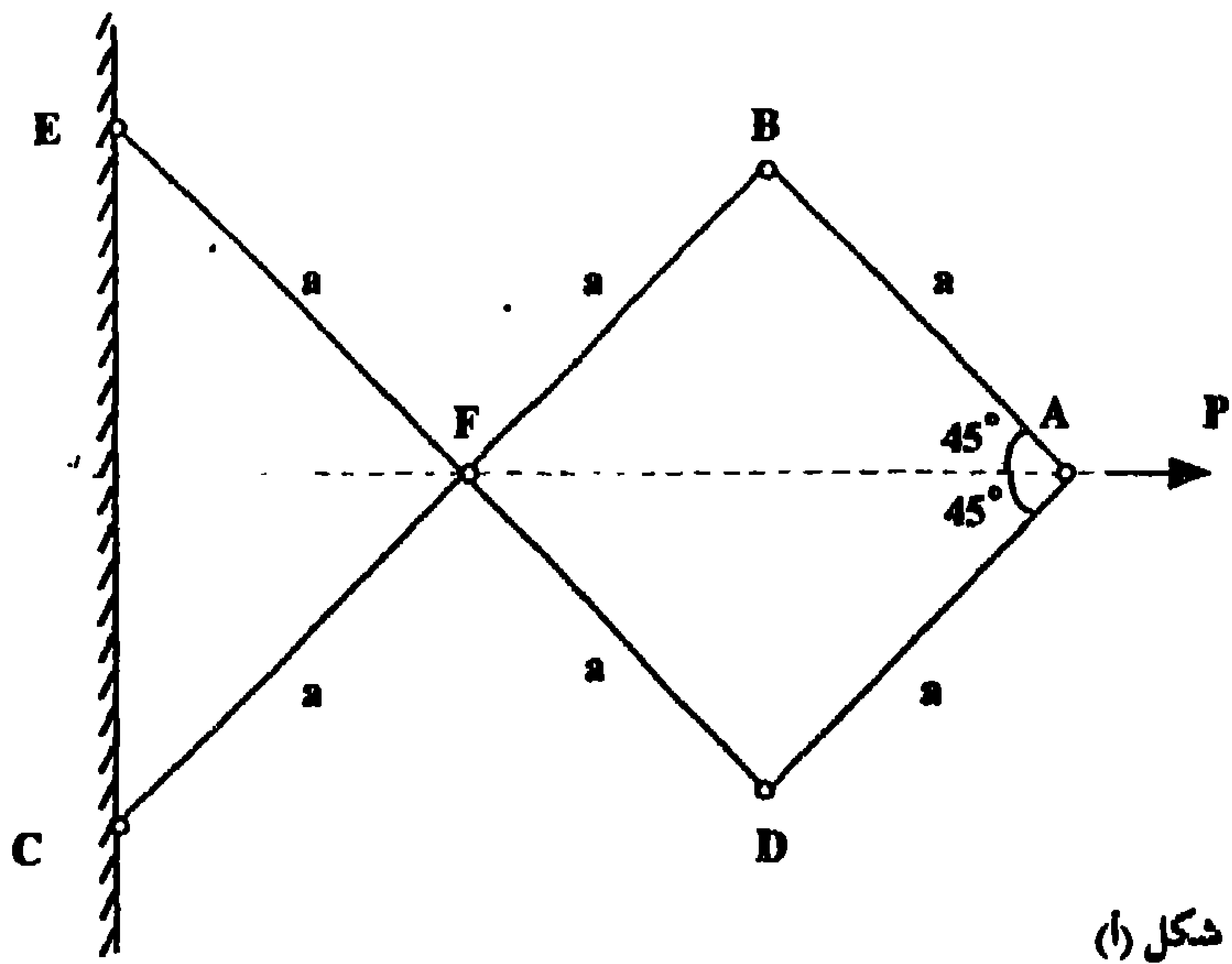
القضيبان AD ، AB يعتبران وصلتان خفيفتان نستبدل كل واحد منهما بقوة محورية (شد أو ضغط في اتجاهه) ونظرا للتماثل تكون القوتان أيضا متماثلتان ولذلك يمكن اجراء الحل على قضيب واحد متماثل BC ، DE مع ملاحظة أن المفصل F مفصل تماثل داخلي. لاحظ كذلك أن كلا من BC ، DE لا يمكن اعتباره غير محمل نظراً لوجود ثلاث مفاصل به (محمل برد فعل المفصل F)

اتزان المفصل A: شكل (جـ)

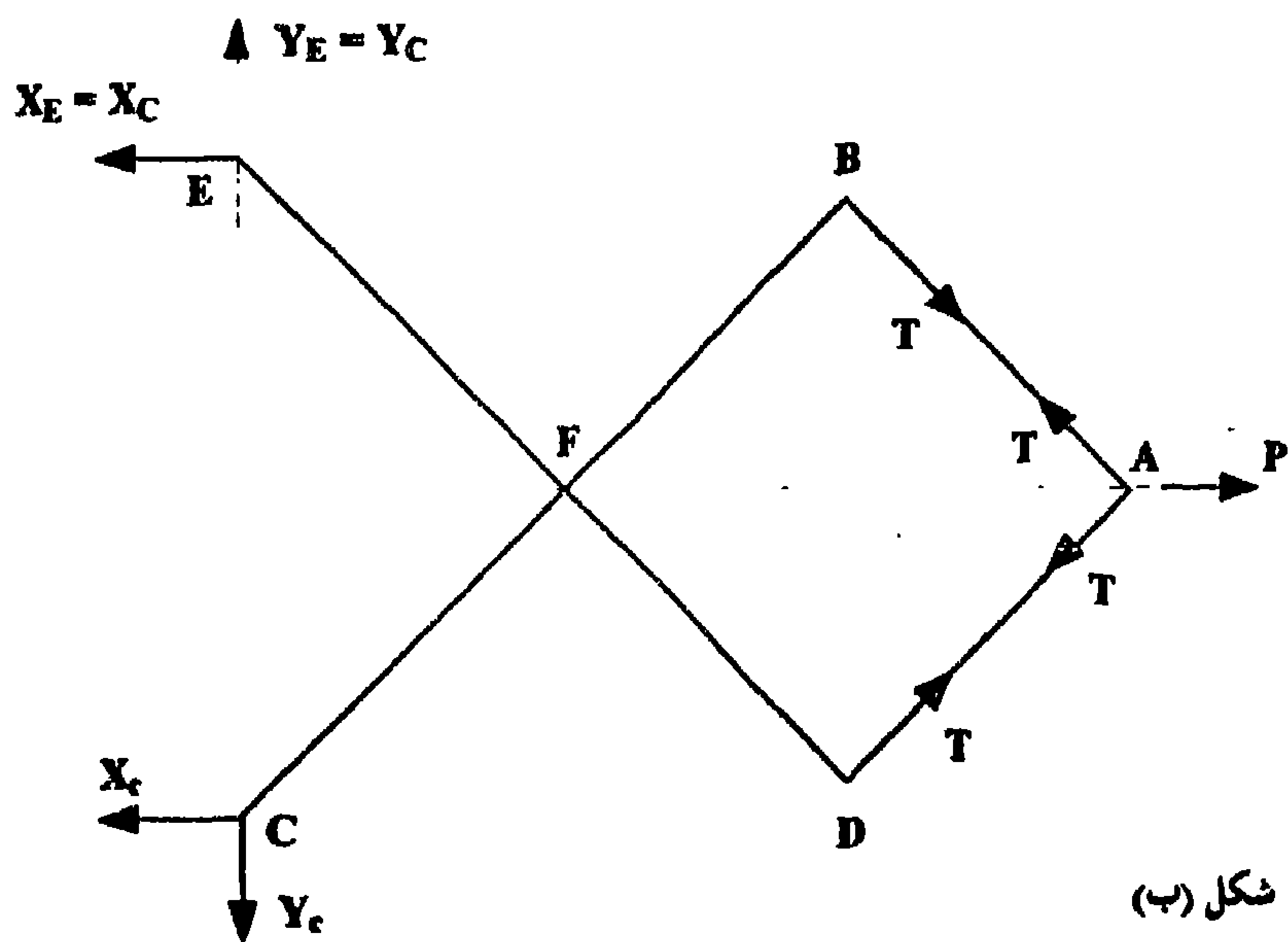
$$\sum X = 0$$
$$2T\cos 45 - P = 0$$
$$\therefore T = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

اتزان القضيب BC شكل (د)

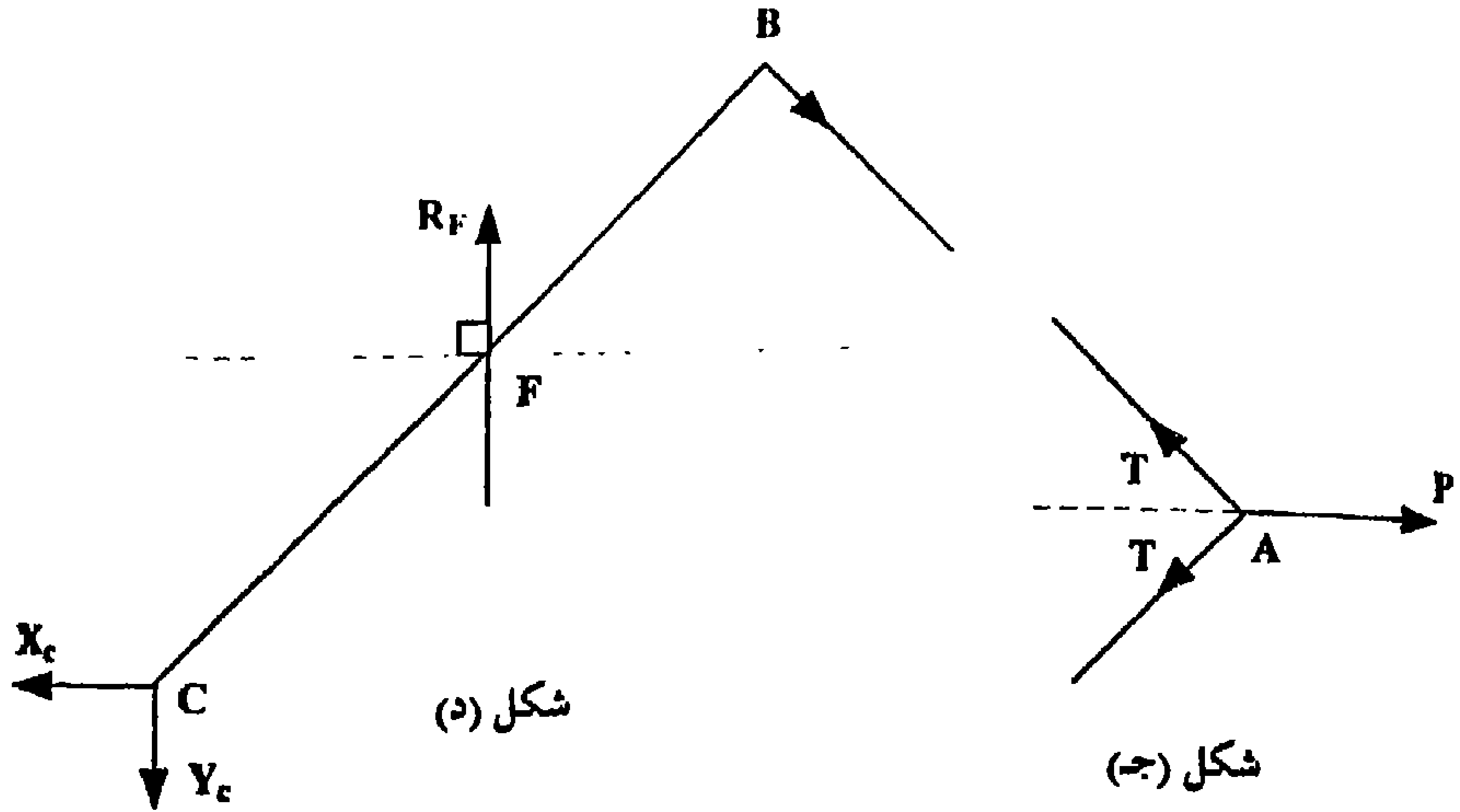
$$\sum M_C = 0$$
$$R_F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - T(2a) = 0$$
$$\therefore R_F = 2P$$
$$\sum X = 0$$
$$-X_C + \frac{T}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\therefore X_C = \frac{P}{2}$$
$$\sum Y = 0$$
$$-Y_C + R_F - \frac{T}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\therefore Y_C = 1.5P$$



شکل (أ)



شکل (ب)



ملخص الأجوبة:

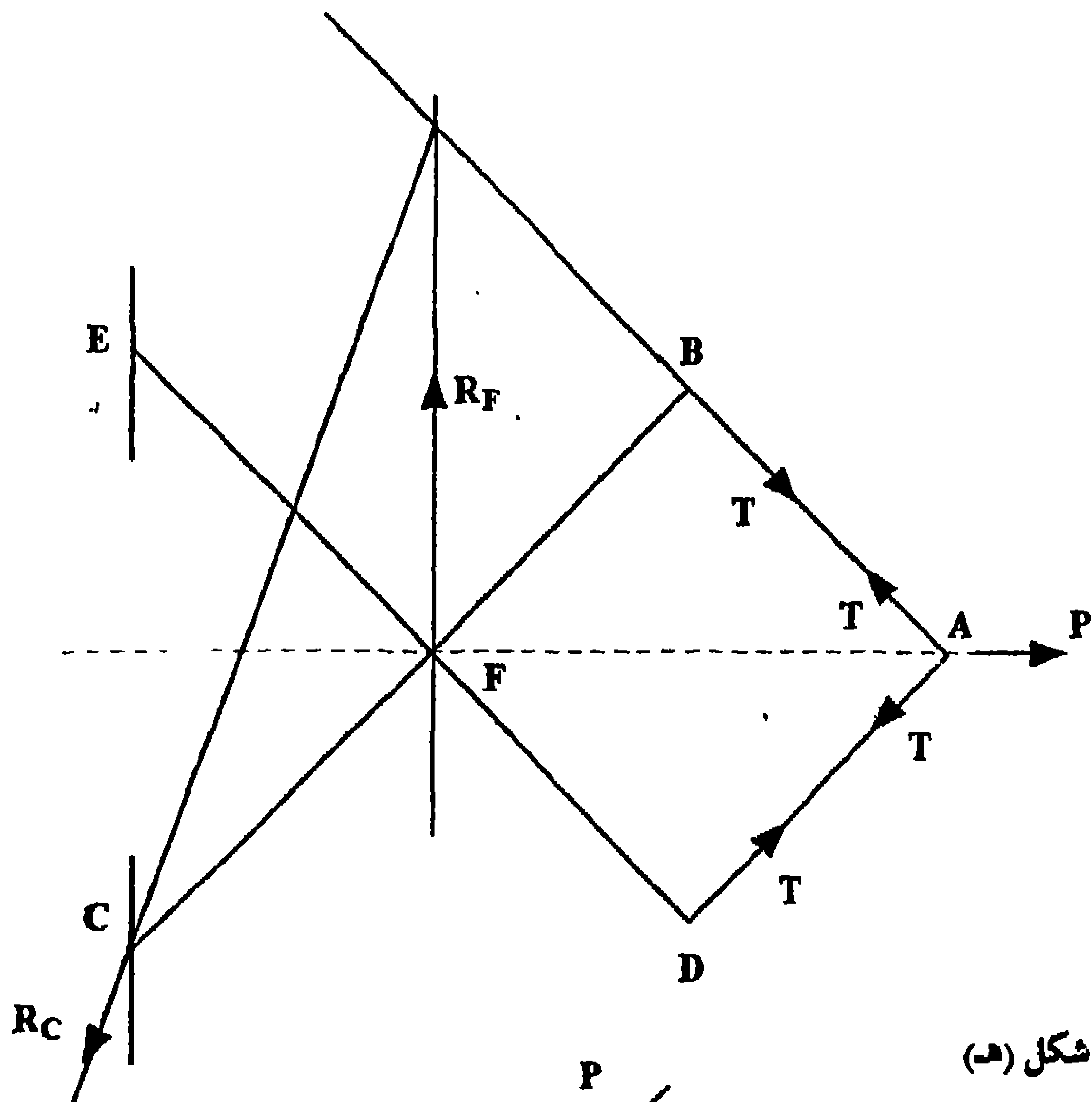
AB	F	C
$T = \frac{P}{\sqrt{2}}$	$X_F = 0$	$X_C = \frac{P}{2}$
شداد	$Y_F = 2P$	$Y_C = \frac{3P}{2}$

الحل البياني:

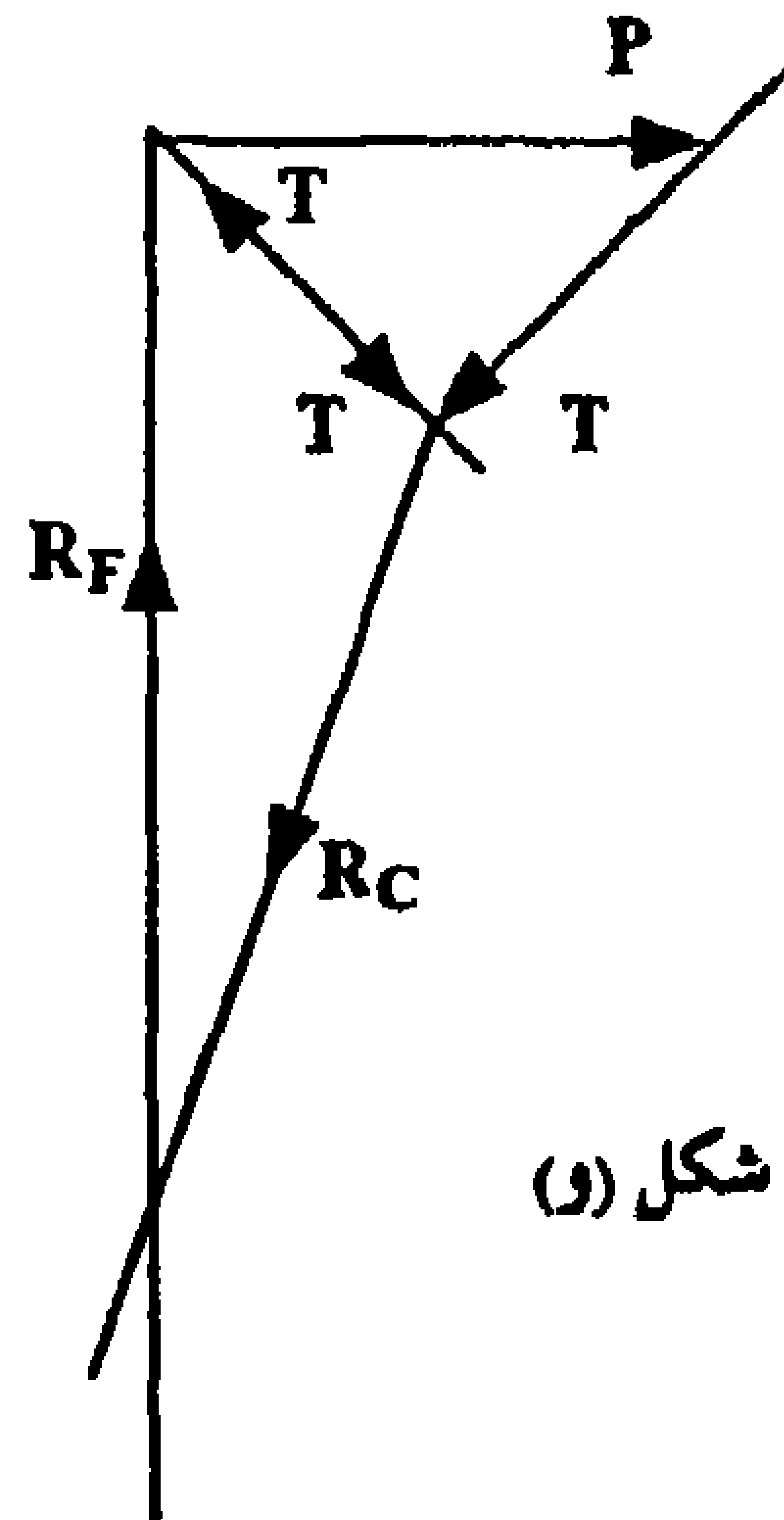
مقياس رسم المسافات $a = 4$ cm ومنها 1 cm $= 0.25a$

مقياس رسم القوى $P = 5$ cm ومنها 1 cm $= 0.2P$

شكل (هـ) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل، شكل (و) يمثل مضلع القـوى لاتزان المفصل A والقضـيب BC



شكل (هـ)



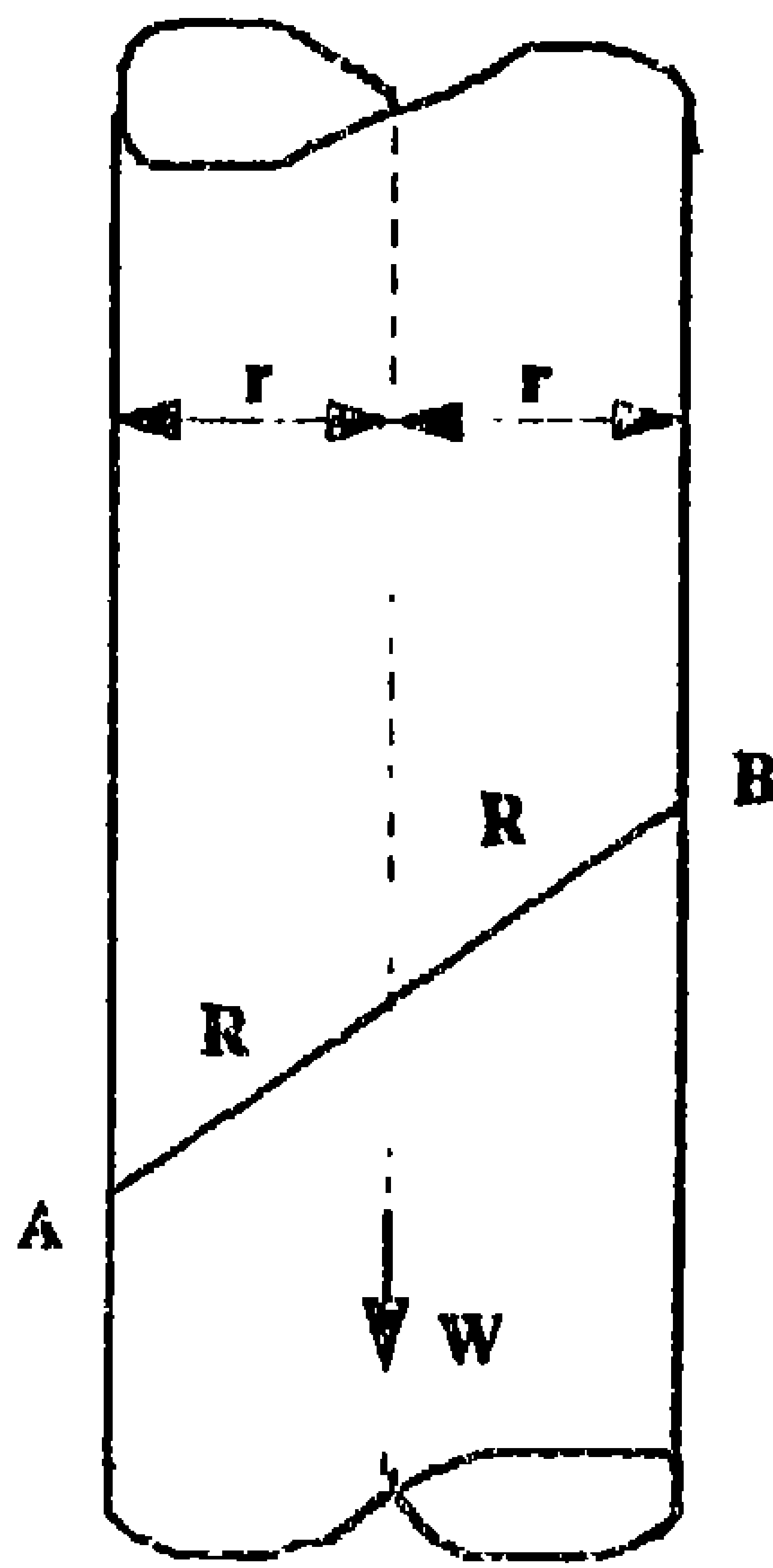
شكل (و)

النتائج: من الرسم وبالقياس:

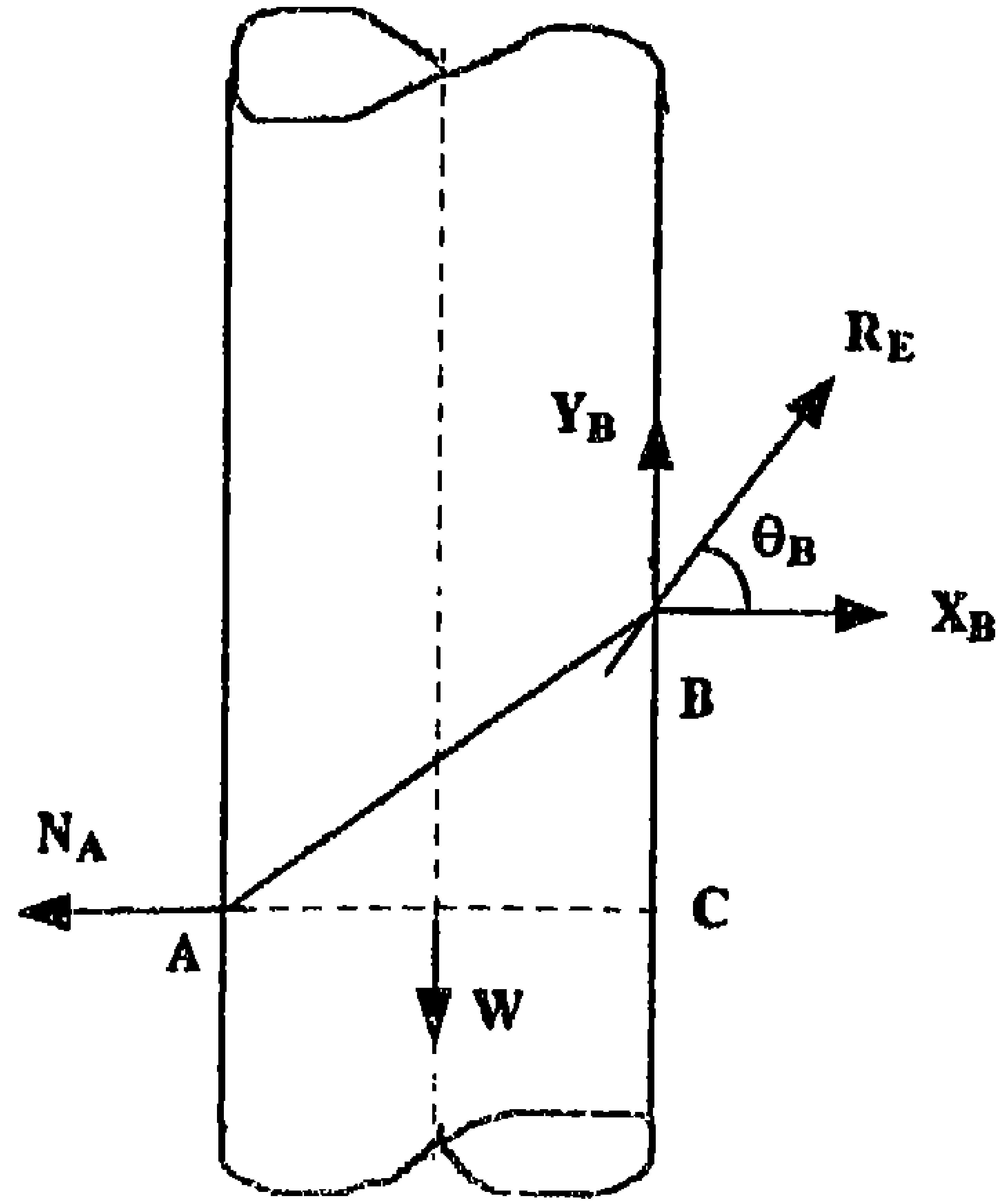
$T = 0.7\ P$ $R_F = 2\ P$ $R_C = 1.6\ P$

مثال ٧ :

حلقة رفيعة وزنها W ونصف قطرها R وضعت حول اسطوانه دائرية محورها رأسي ونصف قطرها r حيث ($R > r$) ومنع الحلقة من السقوط مسمار أفقي مثبت في الاسطوانة استندت عليه الحلقة كما في الشكل (١٦١) أوجد الضغط الأفقي بين الحلقة والاسطوانة وكذلك رد فعل المسمار على الحلقة مقداراً واتجاهاً.



شكل (أ)

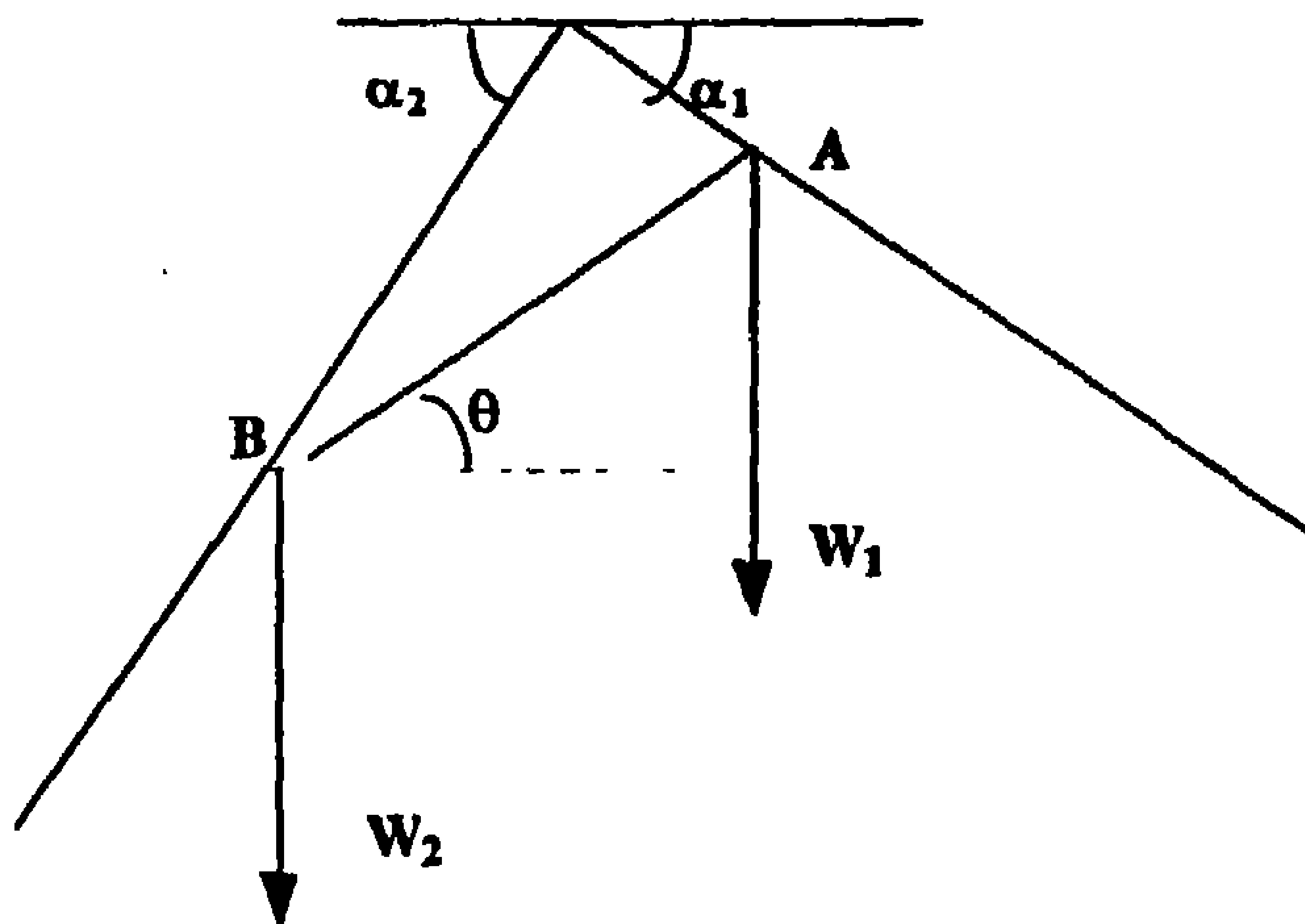


شكل (ب)

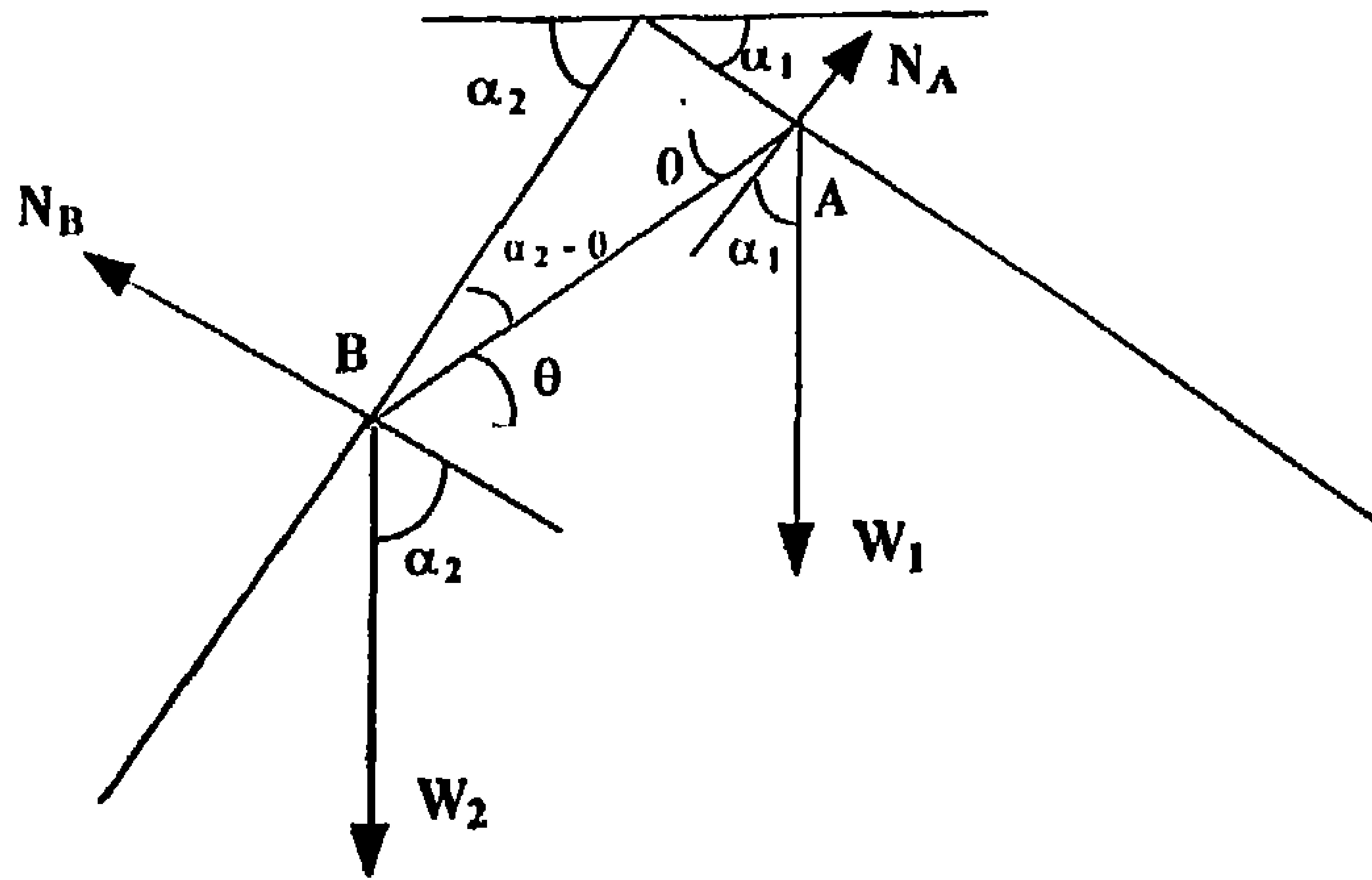
الحل التحليلي:

نضع ردود الأفعال على الحلقة ثم نكتب معادلات الاتزان كما في الشكل (١٦٢) يؤثر على الحلقة أربعة قوى واقعة في مستوى واحد هي X_B ، Y_B ، W ، N_A .

$$\sum X = 0$$
$$X_B - N_A = 0$$
$$\sum Y = 0$$
$$Y_B - W = 0$$
$$\therefore Y_B = W$$
$$\sum M_C = 0$$
$$-X_B(BC) + W(r) = 0$$
$$\therefore X_B = W\frac{r}{\sqrt{(2R)^2-(2r)^2}} = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2-r^2}}$$
$$N_A = X_B = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2-r^2}}$$
$$R_B = \sqrt{X_B^2 - Y_B^2} = \frac{W}{2}\sqrt{\frac{4R^2-3r^2}{R^2-r^2}}$$
$$\tan\theta_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{2\sqrt{R^2-r^2}}{r}$$

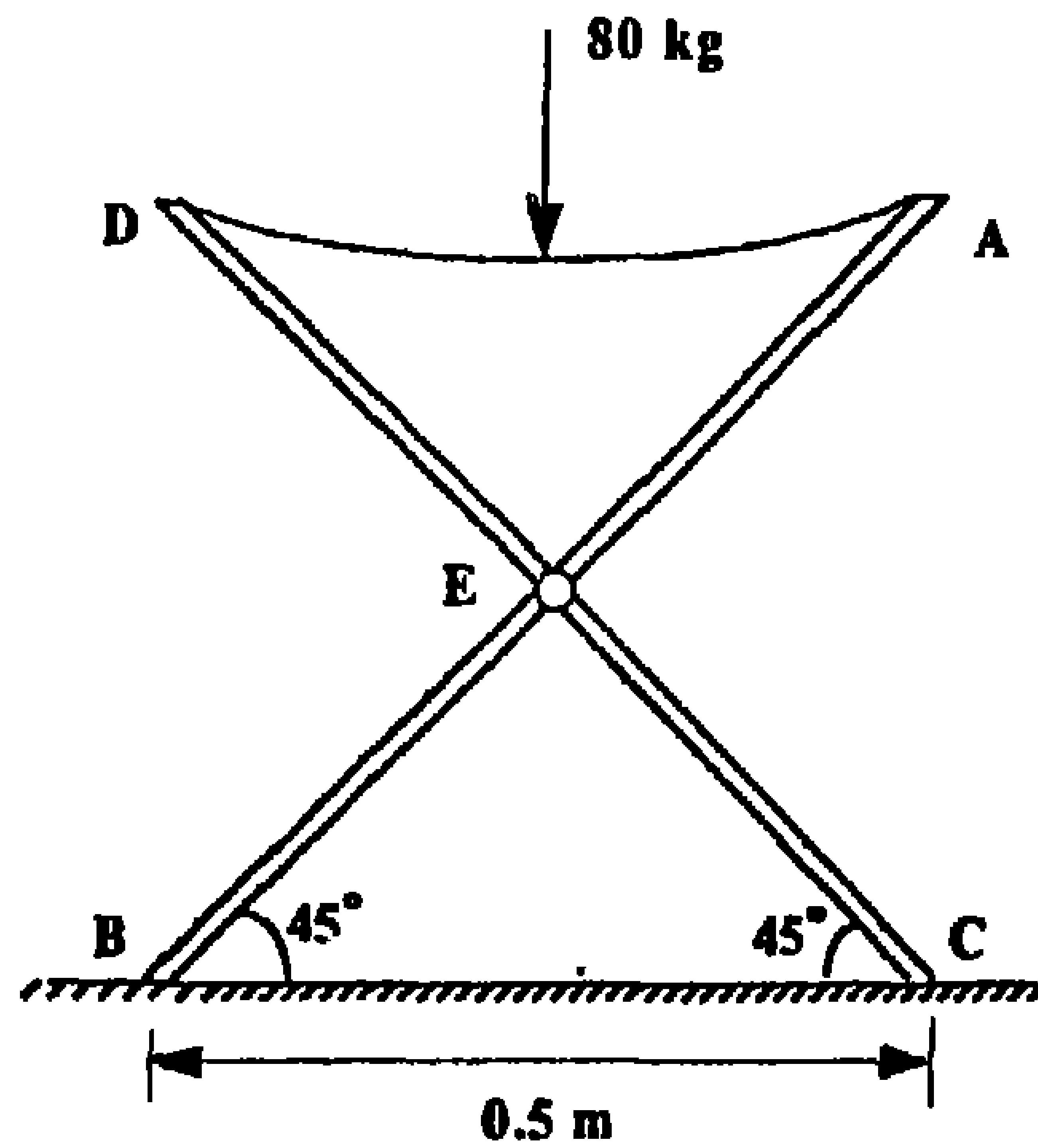


شكل (جـ)



شكل (د)

مثال ٨ :



يجلس شخص وزنه ٨٠ كجم على كرسي شاطئ كالمبين بالشكل ويتخذ قماش القاعدة شكل قوس دائري يقابل زاوية مركزية قدرها ٦٠° عين القوى المؤثرة على زوج الأرجل AB.

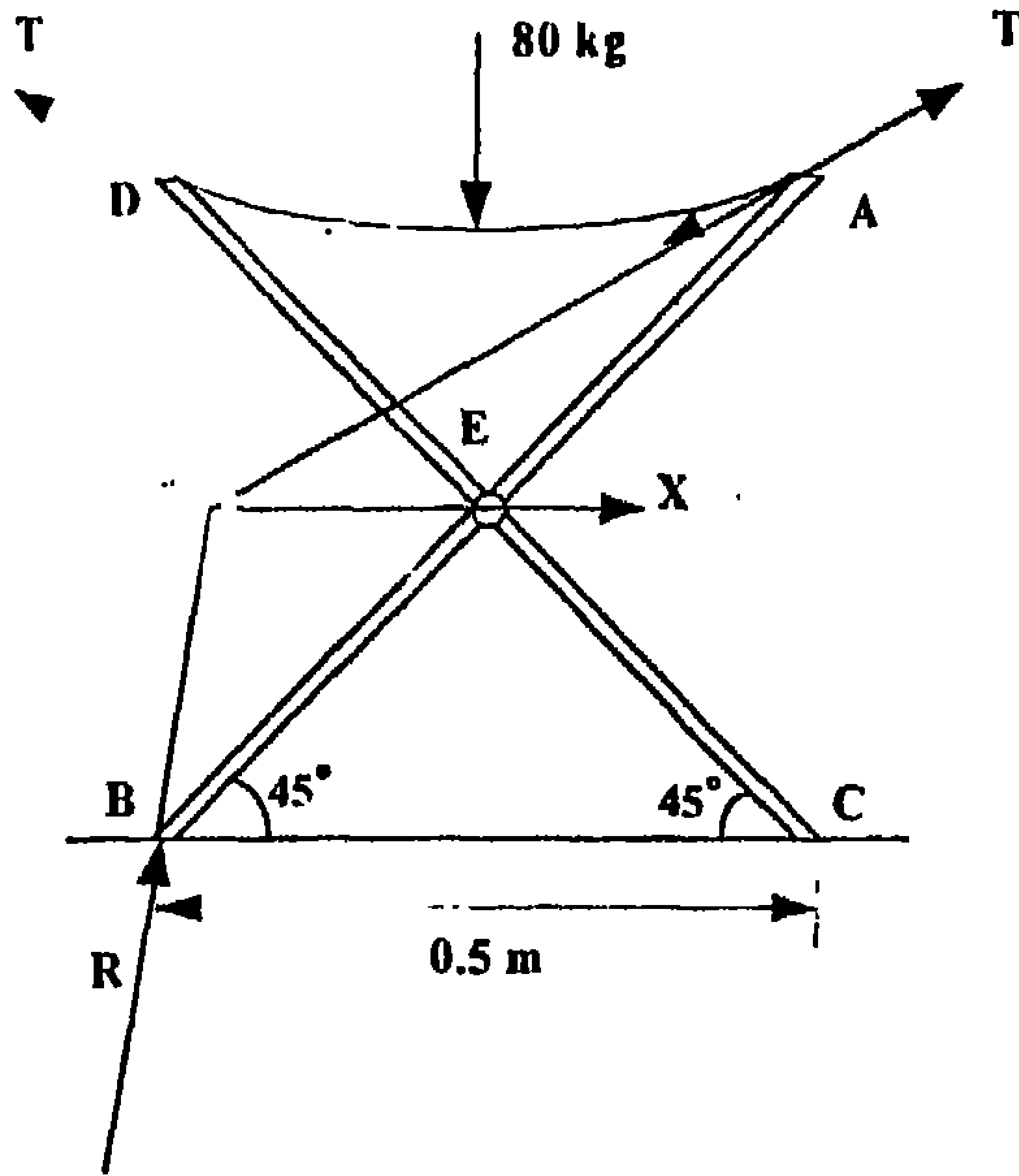
اتزان القماش

القوى المؤثرة هي وزن الرجل والشدان المتماثلان T ، T والمماسان لمنحنى القماش في A ، D (الموضحان بخطوط متقطعة) بالتحليل رأسياً نحصل على قيمة T

$$2\,T \cos 60^\circ = W$$

$$\therefore\ T = W = 80\ kg$$

اتزان الرجل AB



القوى المؤثرة هي معكوس الشد T في نقطة A. رد فعل مفصل التماثل E وهو X ورد فعل الأرض R. لاتزان القوى الثلاثة يجب أن نلتقي في نقطة واحدة برسم مثلث قوى لها مبتدئين بالقوة المعلومة T تتعين X ، R :

وأما تحليليا فتعطي العزوم حول B قيمة X :

$$X.\frac{a}{\sqrt{2}} = T\,2a\sin 15^\circ$$

$$\therefore X = W\,2\sqrt{2}\sin(45-30)$$

$$= W\,2\sqrt{2}(\sin 45\cos 30 - \cos 45\sin 30)$$

$$= W(\sqrt{3}-1)$$

ثم بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على مركبتي R :

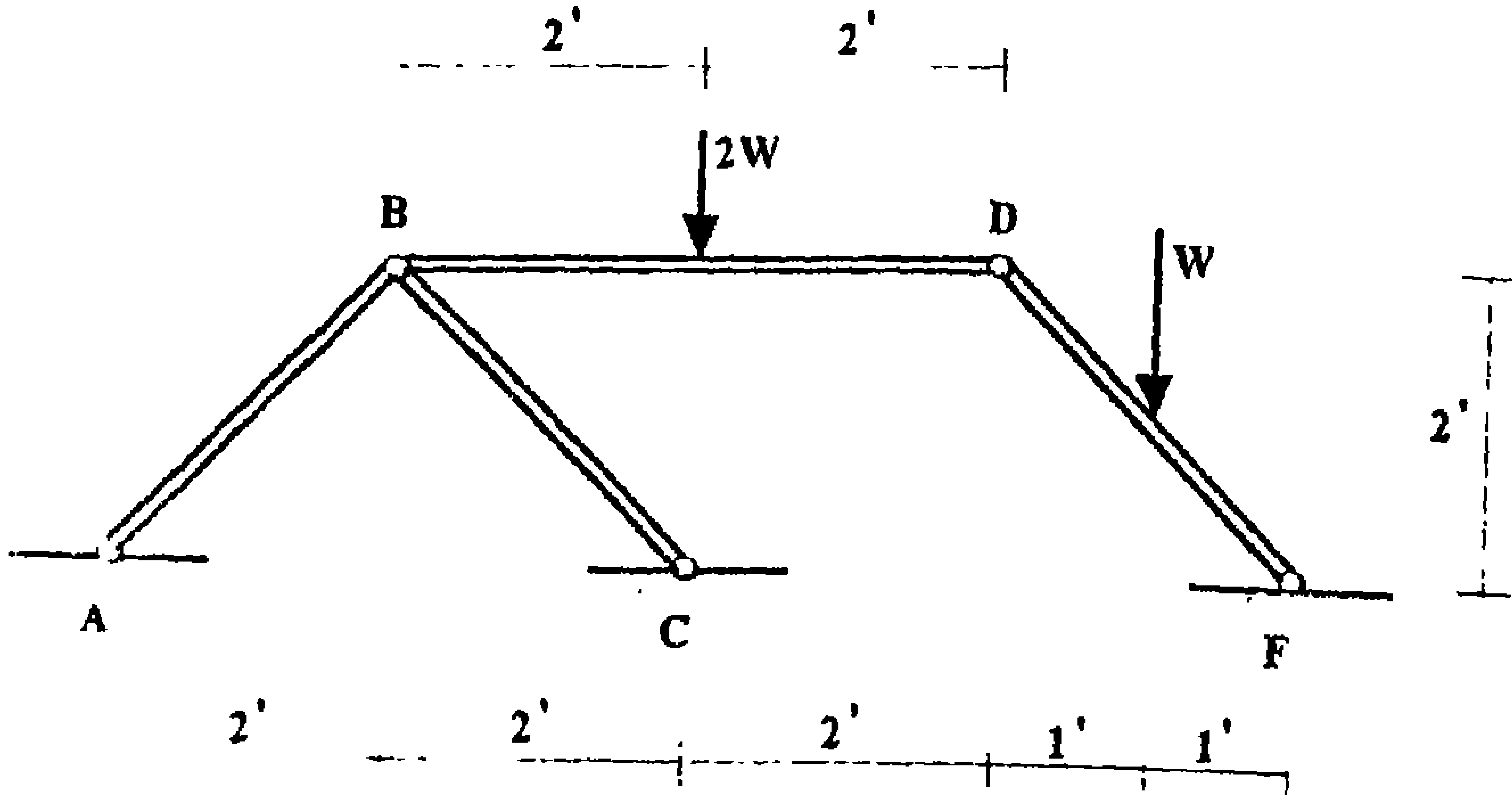
$$R_X + X - T\cos 30^\circ = 0$$

$$R_Y - T\cos 60^\circ = 0$$

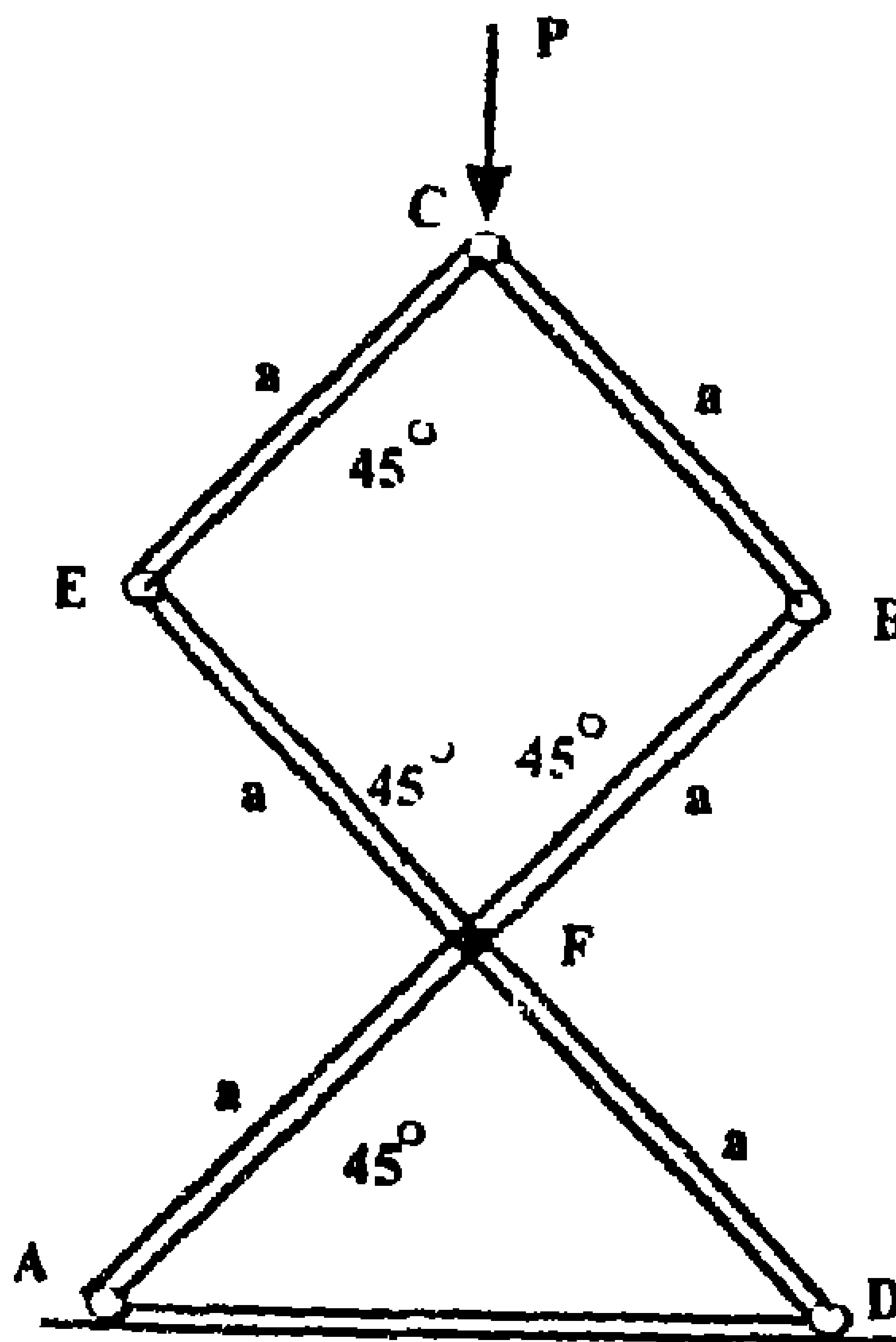
$$\therefore R_X = W\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right), R_Y = \frac{W}{2}$$

تمارين

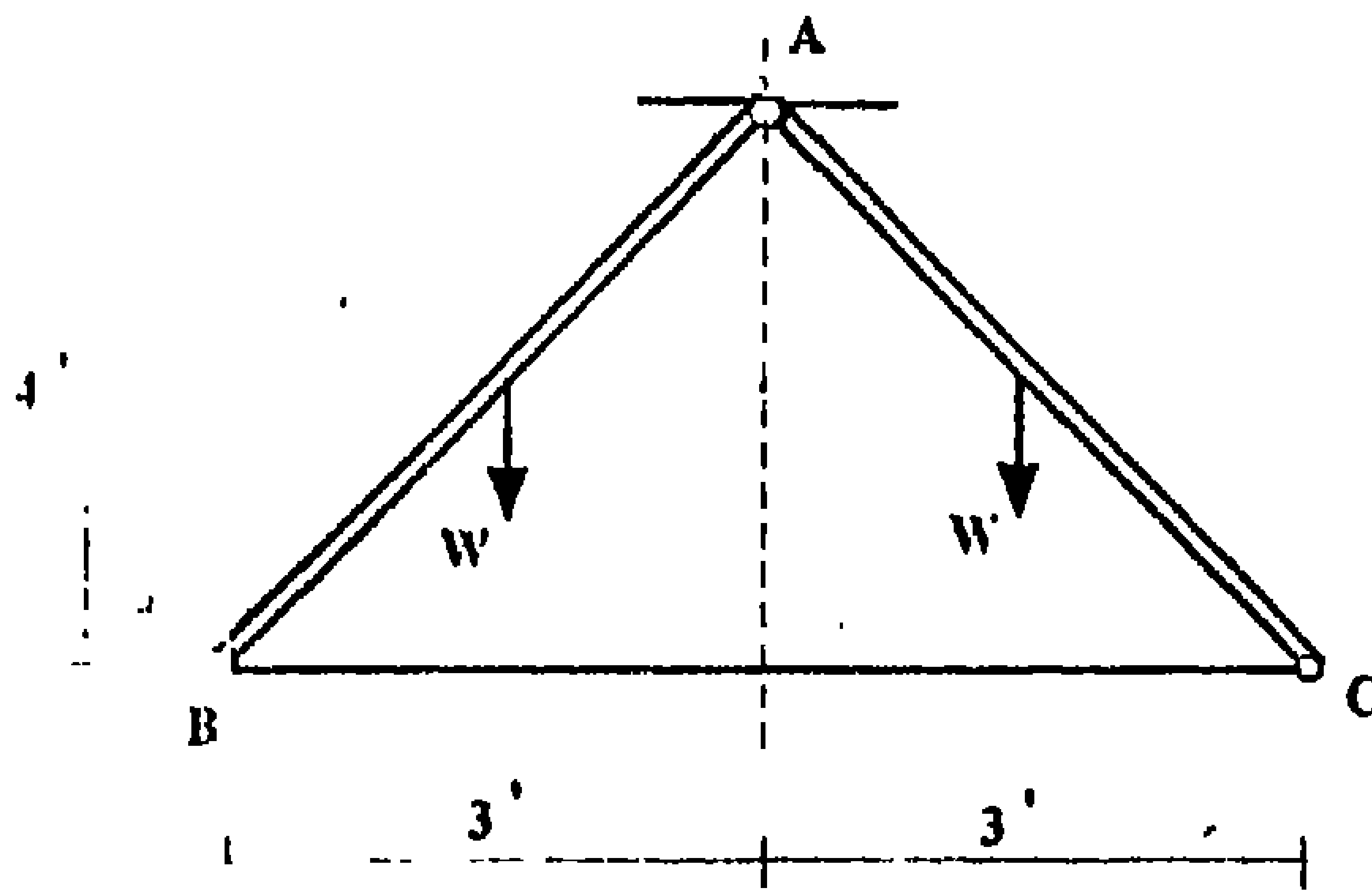
١ - أوجد ردود الفعل في مفاصل الهيكل المبين بالشكل تحليليا.



٢ - الهيكل المفصلي المبين بالشكل يتكون من أربعة قضبان AB و BC و DE و EC ترتبط مفصليا كما في الشكل و ترتكز عند A و D على ارض افقية ملساء و يحفظ اتزانها خيط غير مرن AD . تؤثر القوة P رأسيا لأسفل على المفصل C . عين الشد في الخيط .

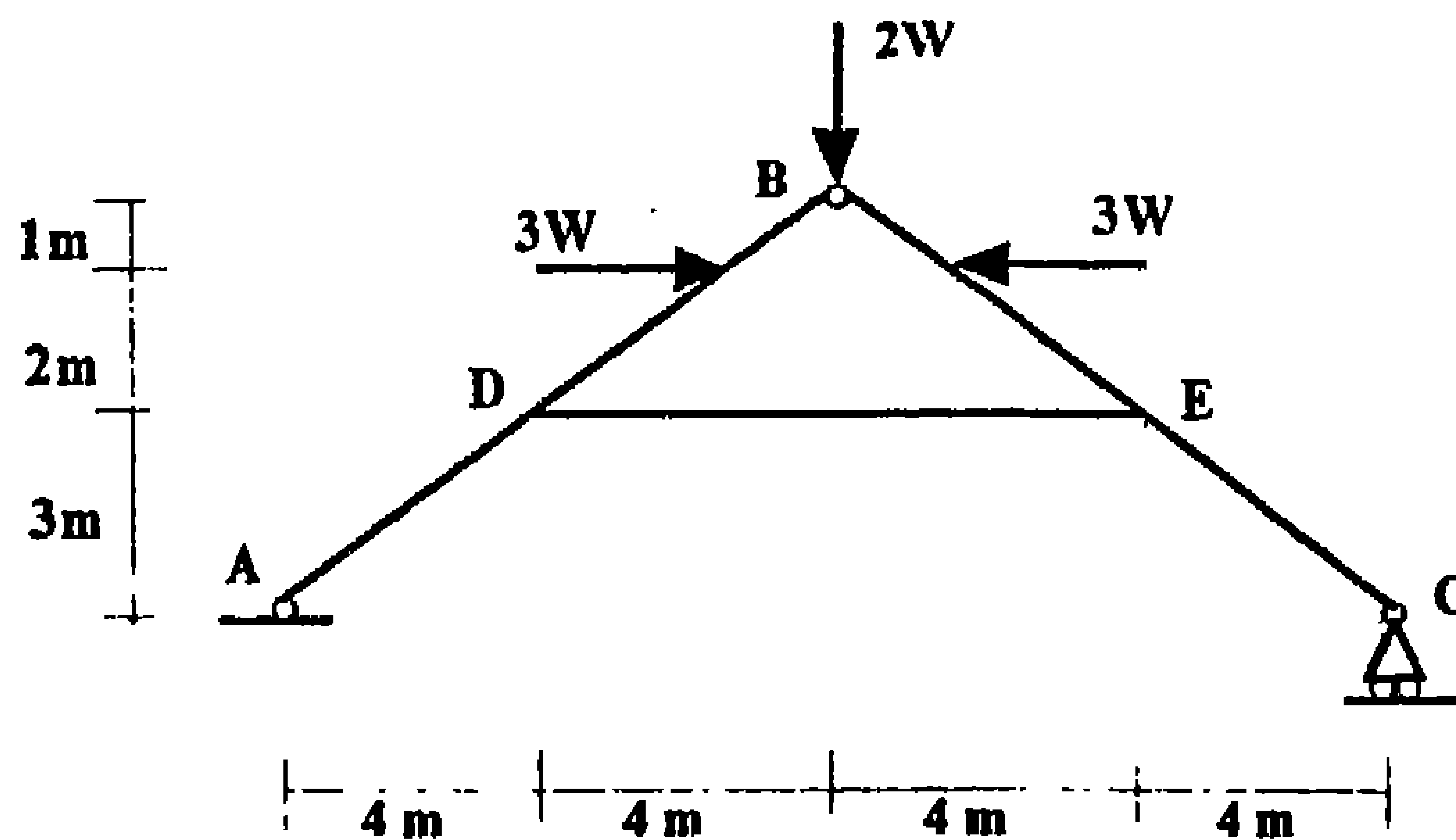


٣ – الهيكل المفصلي المبين بالشكل يتكون من قضيين وزن الواحد W و طوله ٥ أقدام معلقان من نقطة A و يحفظ اتزانهما قضيب خفيف BC .عين رد فعل المفصل A و القوة المحورية في BC .

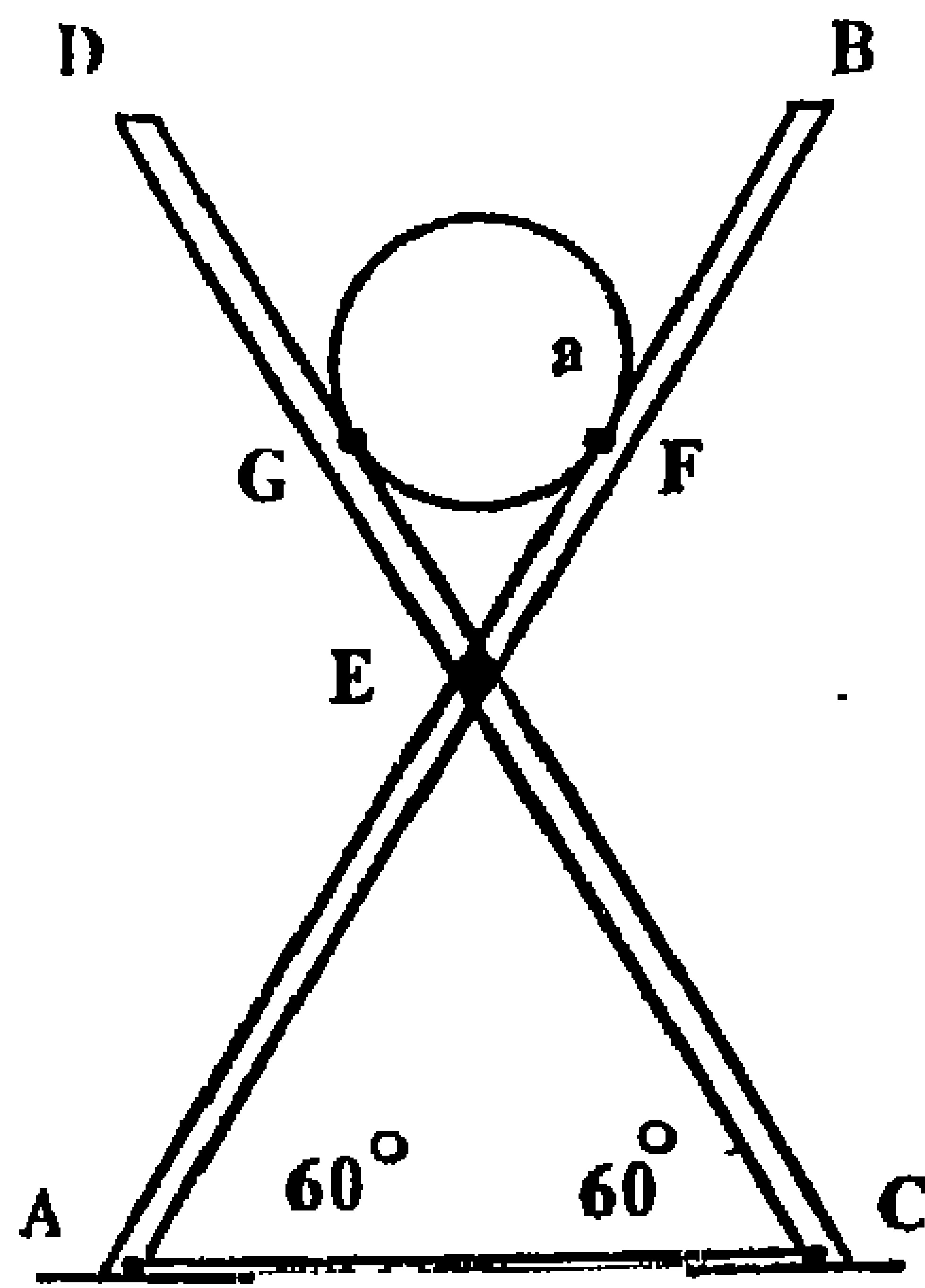


٤ – للمنشأ المبين بالشكل عين ردود الأفعال في المفاصل B و A و عند الإرتكاز الحر C و كذلك الشد في الخيط DE .

حيث أن وزن W = BC = AB



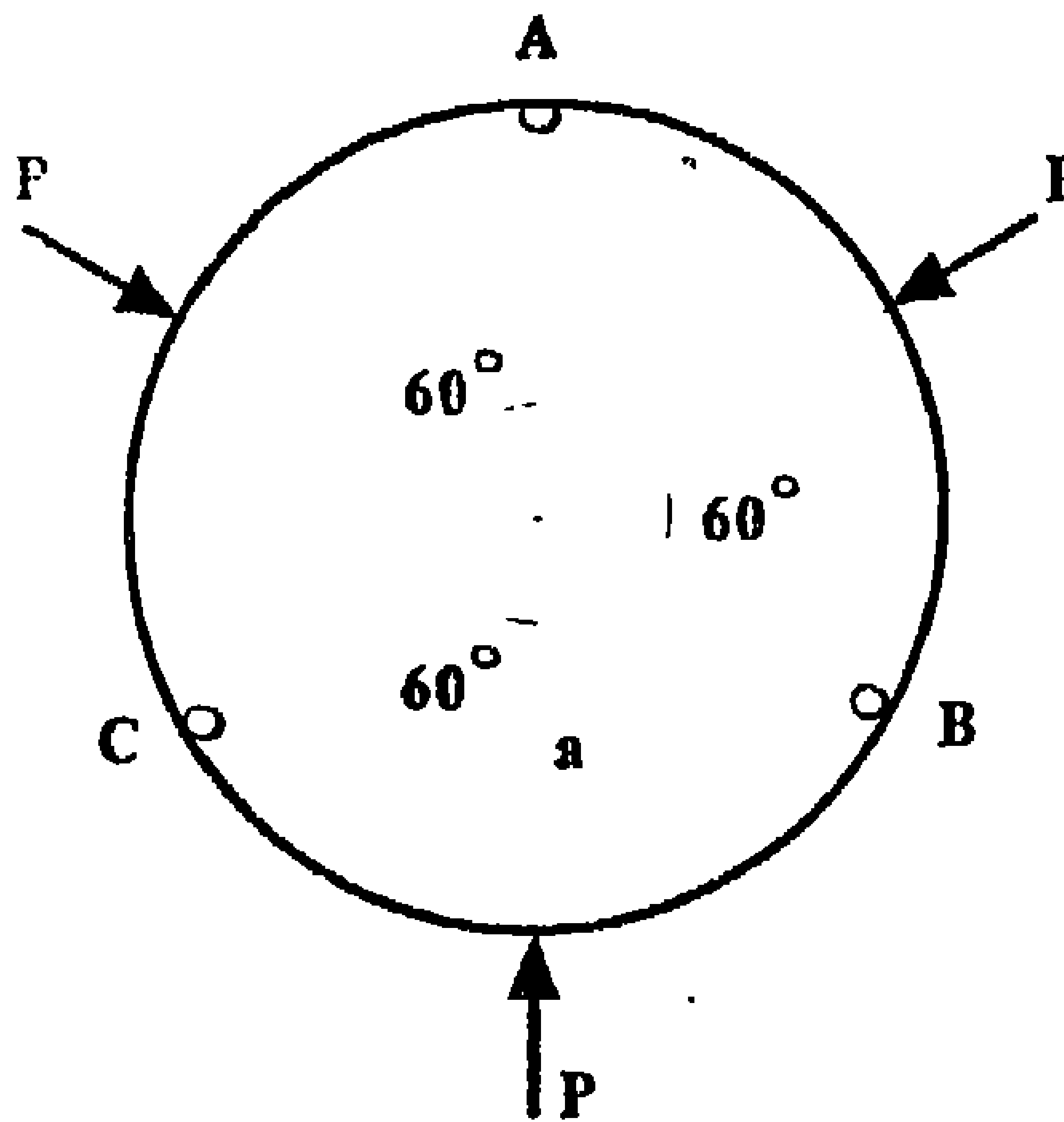
٥ – لوحان خفيفان املسان AB, CD يتصلان مفصليا في E و يرتكزان على ارض ملساء. AC خيط خفيف يربط طرفيهما المرتكزين على الأرض . يحمل اللوحان كرة وزنها W و نصف قطرها a .



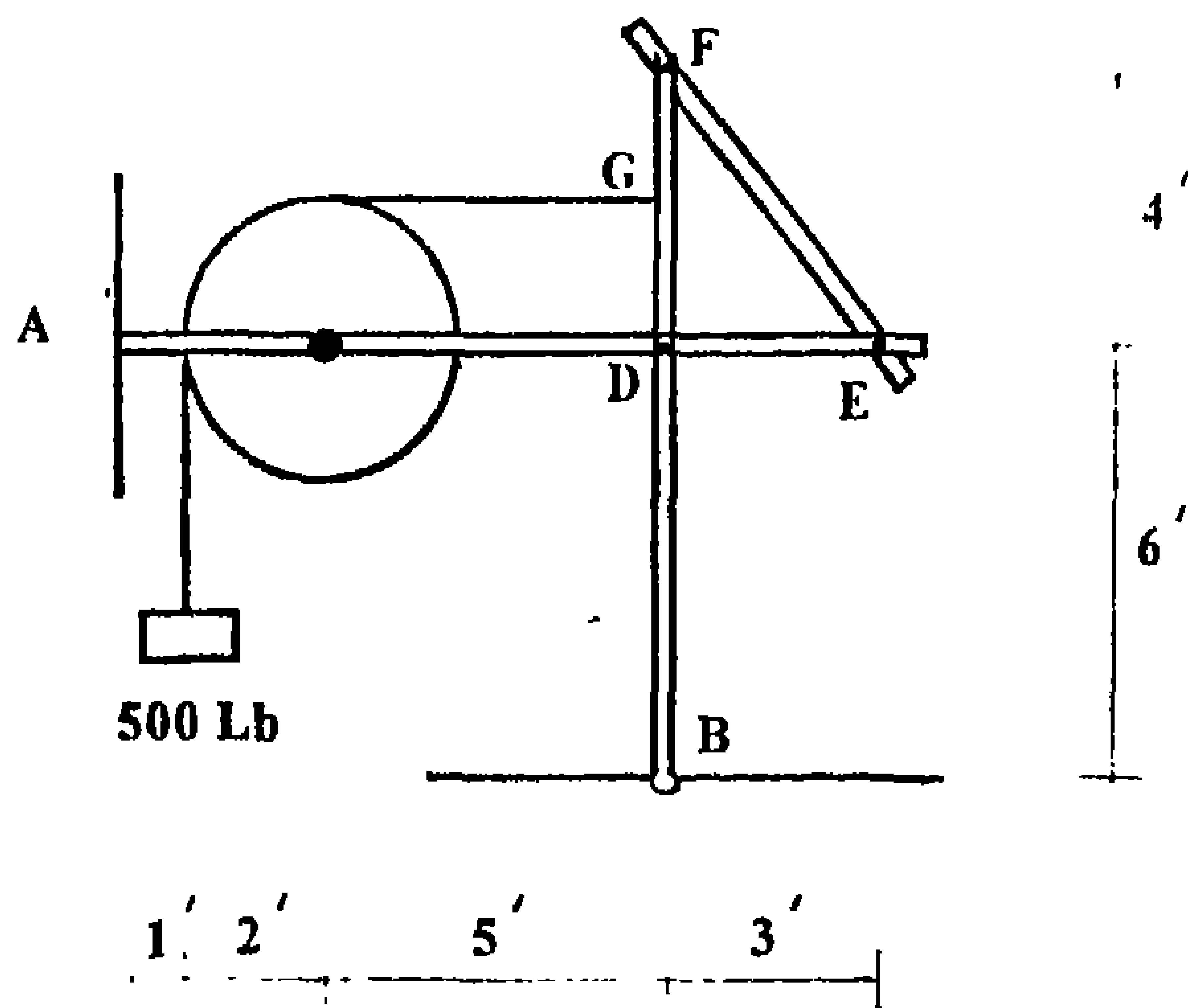
علماً بان طول EC = ED , EA = EB

و طول GE = DG , EF = BF

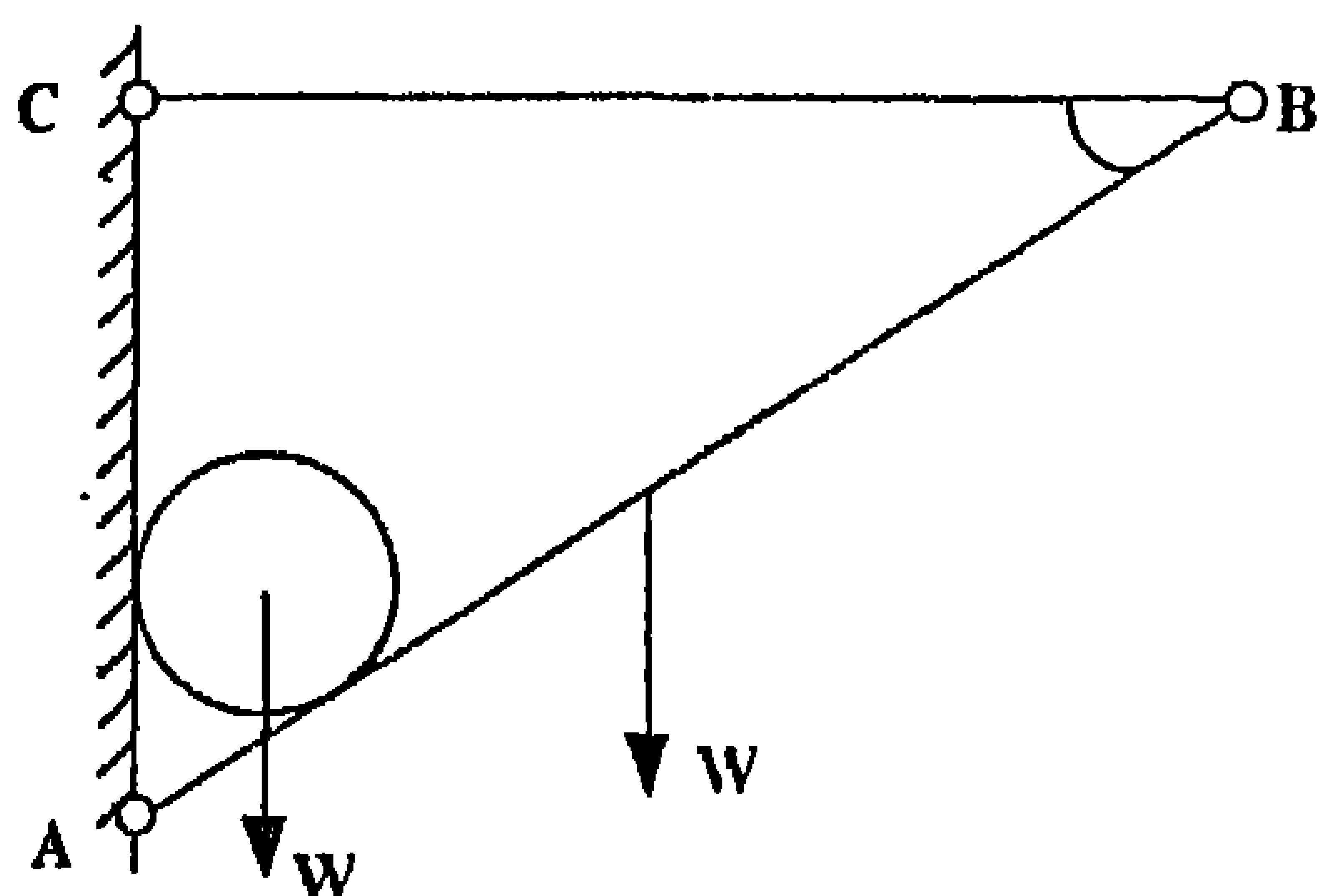
٦ – حلقة دائرية نصف قطرها a موضوعة على نضد افقي أملس و يتألف من ثلاثة أعضاء CA و BC و AB و تؤثر عليهما الأحمال المبينة بالشكل .عين ردود الأفعال في المفاصل C و B و A .



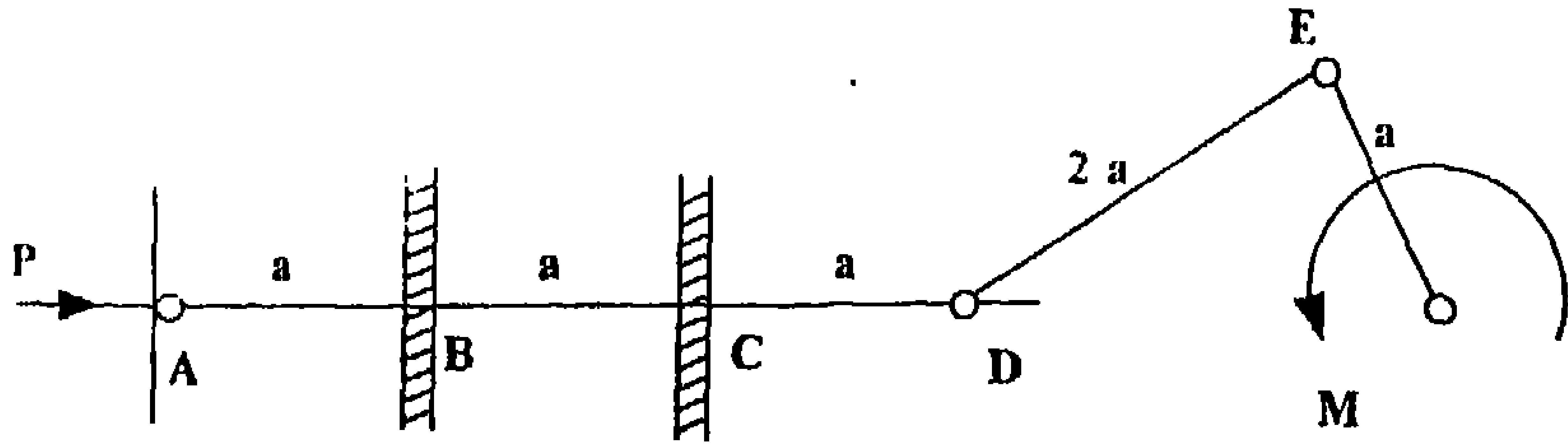
٧ – هيكل مفصلي كالمبين بالشكل يستند لحائط أملس عند A مرتكزاً مفصلياً عند B و مركب عليه بكرة خفيفة ملساء C يمر عليها خيط متصل بالهيكل عند G . أوجد ردي الفعل في A , B و جميع القوى المؤثرة على الكمرة ACDE .



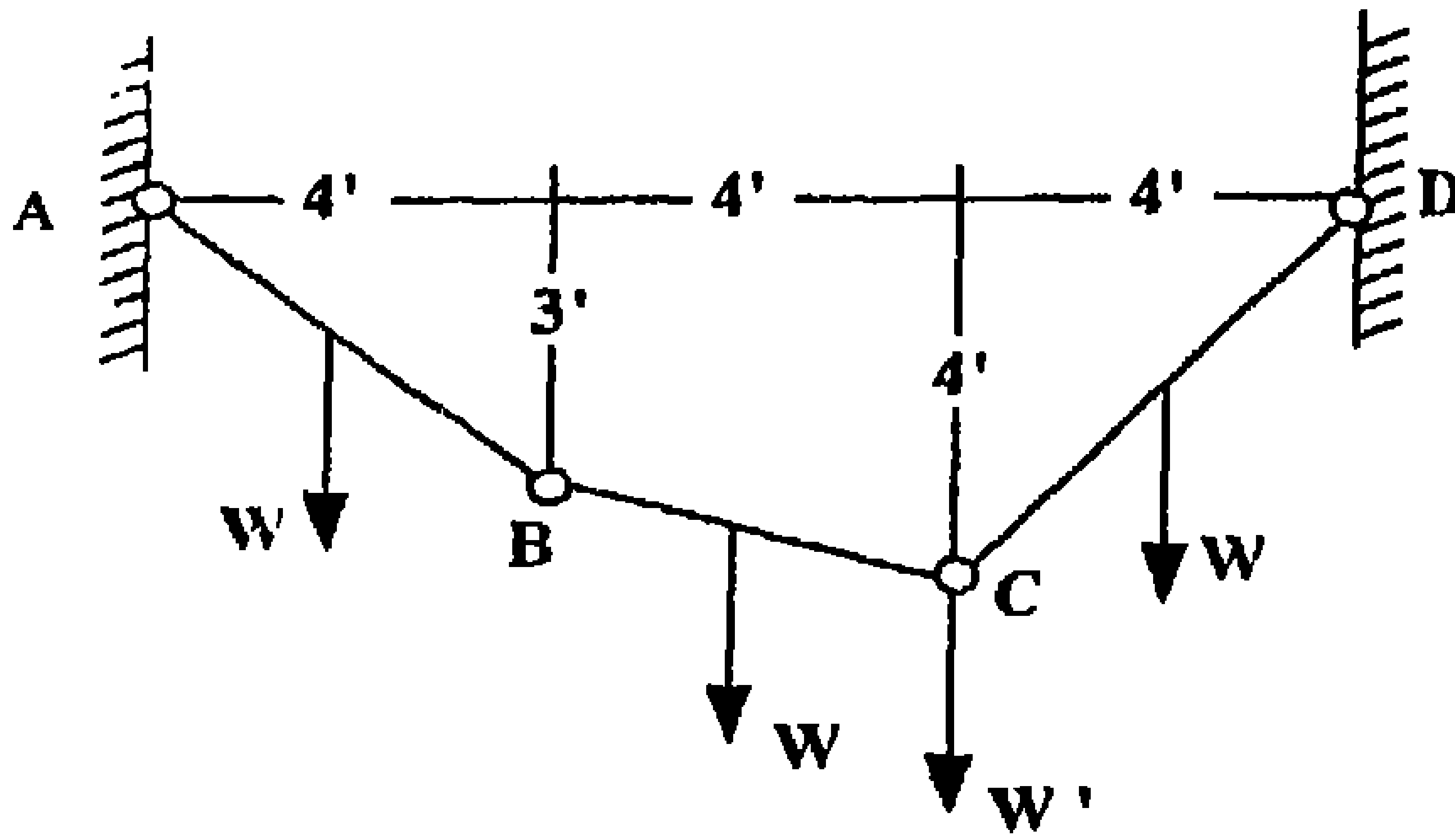
٨ - تستقر اسطوانة ملساء وزنها W ونصف قطرها a بين حائط رأسي ولوح أملس AB وزنه W وطوله ($4\sqrt{3}\,a$) واللوح يتصل بالحائط مفصليا في A ويشده إليها خيط خفيف أفقي CB عين شد الخيط وردود الفعل على اللوح.



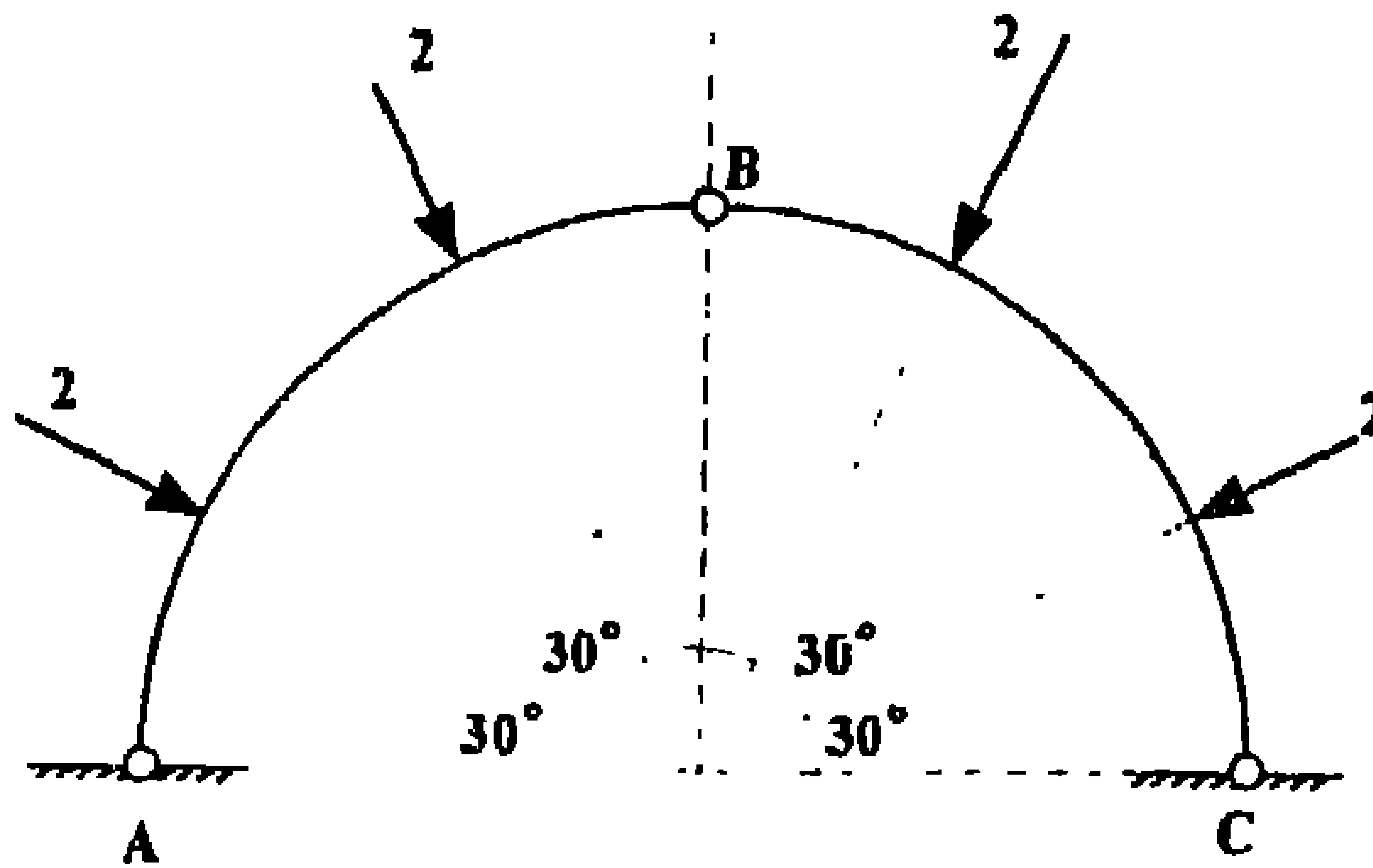
٩ - الشكل المرفق عبارة عن كروكي لآلة ترددية بسيطة في أحد أوضاعها عين العزم M على المرفق بدلالة ضغط البخار P على مكبسها.

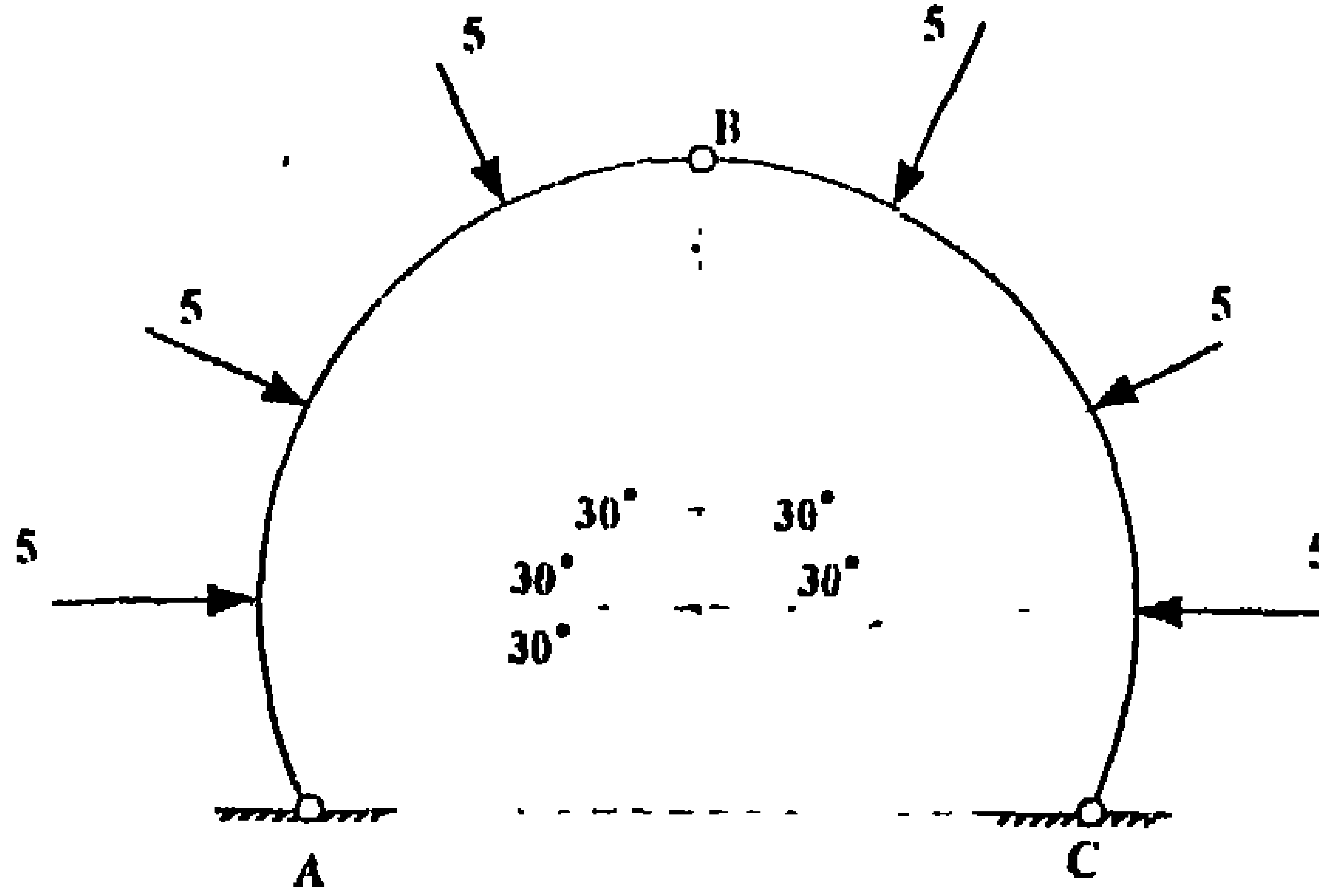


١٠ – ثلاثـة قضبـان ثقيلـة وزن كل منها W متصلة في B ، C ومحمولـــة بمفصـلان ثابتـان D ، A يؤثـر في C حمـل راسـي W عـــين بـــالطرق التحليلية مقـدار رأسـي 'W بدلالة W.



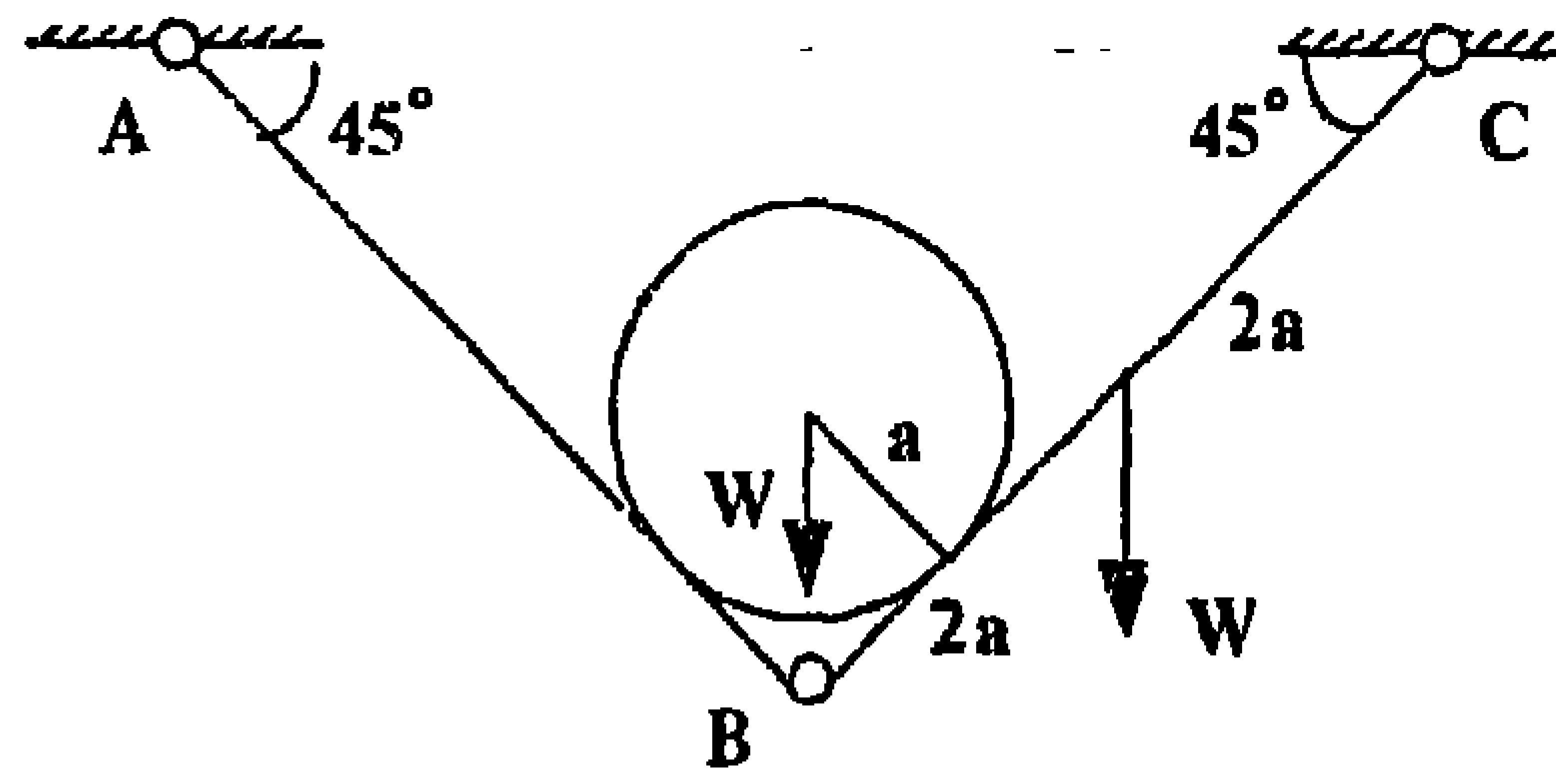
١١ – عقد متماثل ثلاثـي المفـاصل علـى شـكل نصـف دائـرة نصـف قطرها ٤ م تؤثر على العقد مجموعة القـوى المتسـاوية المركزيـة المبينة في الشكل. عين تحليليا وبيانيـاً ردود فعل المفـاصل الثلاثة A, B, C .





١٢ – عقد ثلاثي المفاصل على شكل ثلثي دائرة نصف قطرها ٤ م . تؤثر على العقد مجموعة القوى المتساوية المركزية المبينة في الشكل. عين تحليلياً وبيانياً ردود فعل المفاصل الثلاثة A, B, C .

١٣ – ترتكز كرة ملساء وزنها W ونصف قطرها a على لوحين أملسين BC و AB وزن كل منهما W وطوله 4a ، اللوحان يتصلان مفصلياً في B ومعلقان من مفصلين ثابتين C و A كما في الشكل عين ردود فعل المفاصل الثلاثة تحليلياً وبيانياً.

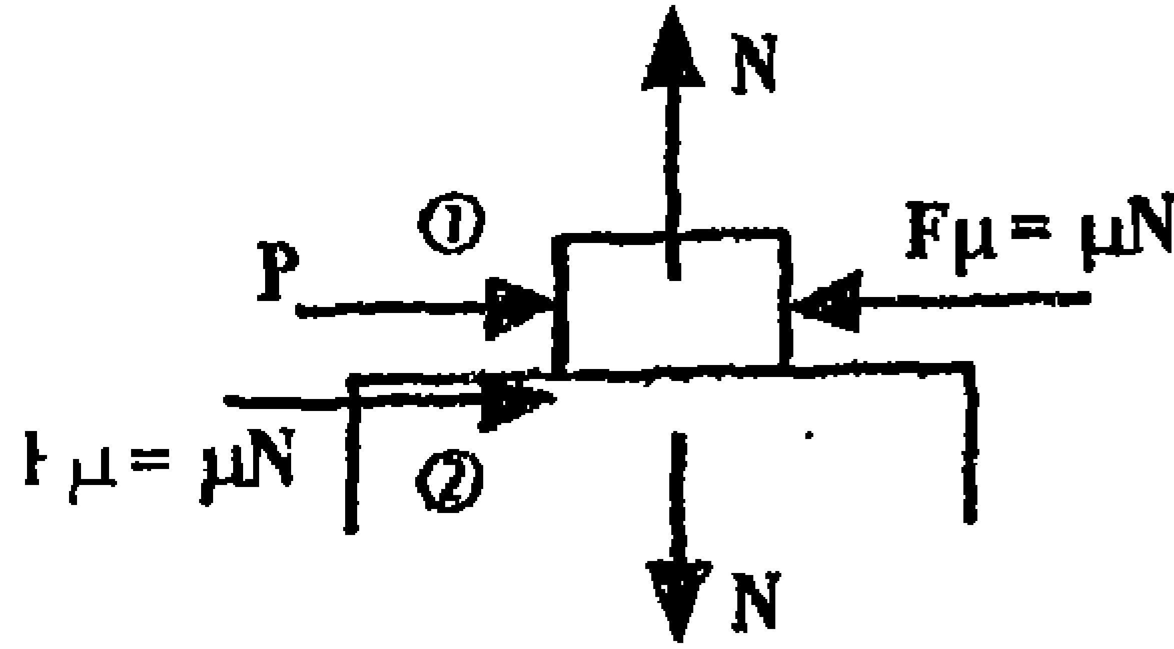


الباب السابع

الإحتــكاك

إذا ارتكزا سطحين خشنين على بعضهما بدون أدنى حركة نسبية بين السطحين فيكون هنـاك قوى رد فعل عموديتين فقط.

عند توليد حركة نسبية بين الجسمين وذلك بالتأثير على أحداهما بقوة P مثلا فعند سطح التلامس يتولد قوتان F ، F في عكس الإتجاه قابلية الحركة تسمى القوة F مقاومة الإحتكاك وتصل إلى أقصى قيمة لها F_μ عندما يوشك الجسم على الحركـة ،

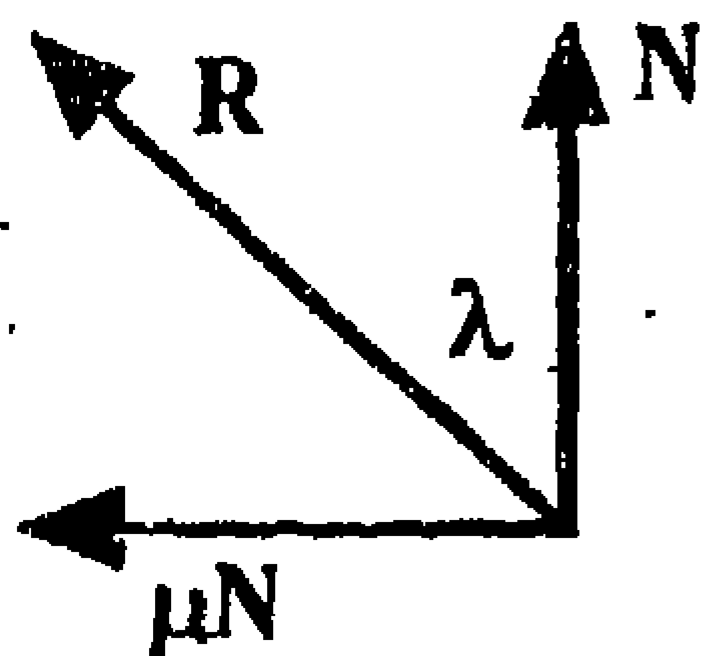


وتسمى أيضا بقوة الإحتكاك النهائي وهي عادة تتناسب مع رد الفعل العمودي بين السطحين N .
حيث μ تسمى معامل الإحتكاك وهي قيمة ثابته لكل سطحين معنيين ومعامل الإحتكاك قبل حدوث الحركة > الإحتكاك بعد حدوث الحركة

(معامل الإحتكاك اللإستاتيكي) > (معامل الإحتكاك الكيناتيكي)

١ - زاوية الإحتكاك :

لو كان هناك جسم على وشك الإنزلاق فإن محصلة رد الفعل عليه R تكون عباره عن رد الفعل العمودي N وقوى الإحتكاك μ N



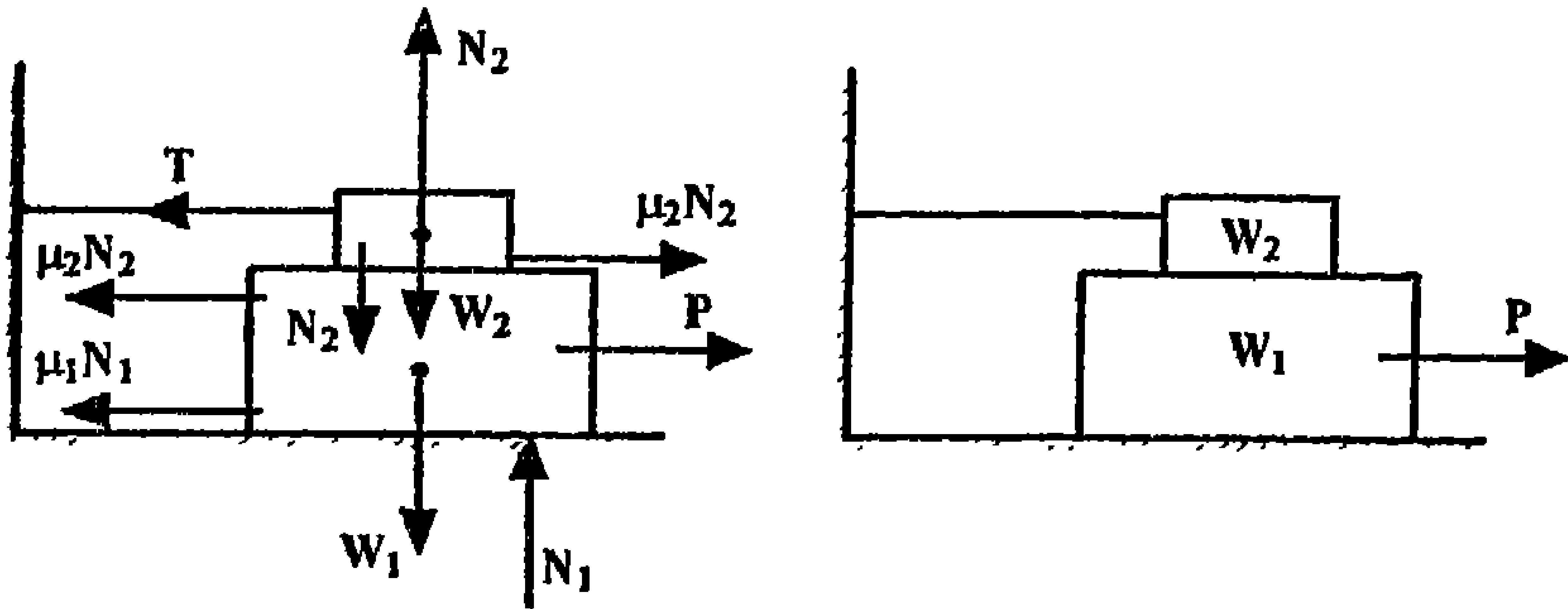
والزاوية λ التي يصنعها رد الفعل المحصل R مع رد الفعل العمودي N تسمى زاوية الإحتكاك.

$$\tan\lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

أي أن معامل الإحتكاك يساوي ظل زاوية الإحتكاك.

مثال ١ :

كتلة وزنها W_1 تستقر على سطح أفقي ومعامل الإحتكاك بينها وبين السطح يساوي μ_1 وضعت كتلة أخرى W_2 فوق الكتلة الأولى وربطت بواسطة خيط أفقي كما في الشكل. معامل الإحتكاك بين الكتلتين μ_2. عين أقل قوة P تلزم لتحريك الكتلة W_1 ثم عين الشد في الخيط عندئذ.



الحل :

لإيجاد P ندرس إتزان الكتلة W_1

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu_2 N_2 + \mu_1 N_1 \quad \text{.......................} (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_1 = N_2 + W_2 \quad \text{.......................} (2)$$

بدراسة الإتزان الرأسي للكتلة W_2

$$\sum y = 0$$
$$N_2 = W_2$$

وبالتعويض في (1) ، (2)

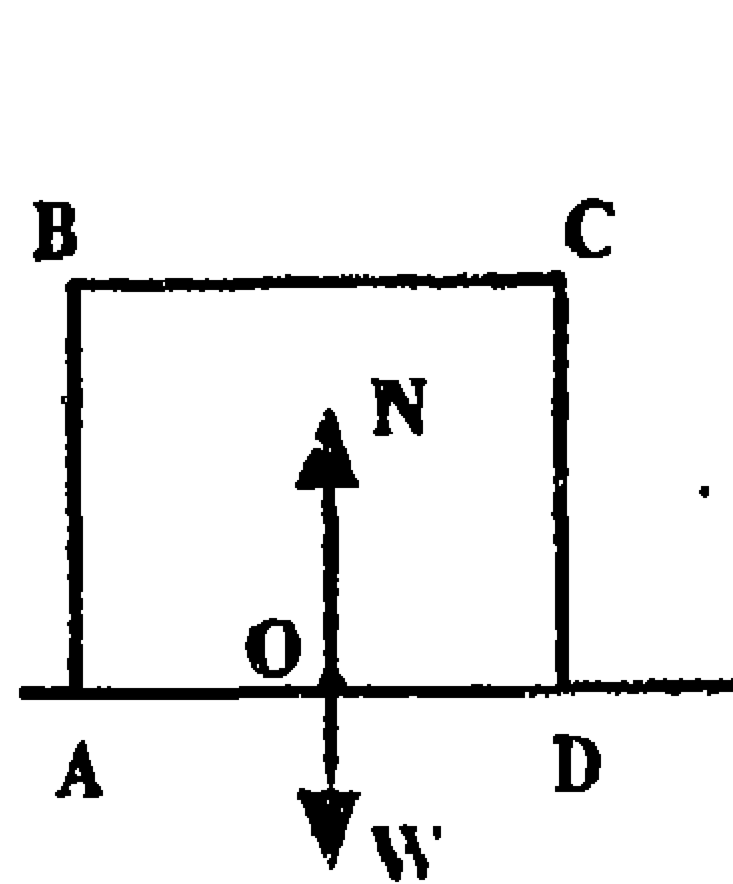
$$P = \mu_2 W_2 + \mu_1 (W_2 + W_1)$$

ولإيجاد T ندرس إتزان الكتلة W_2

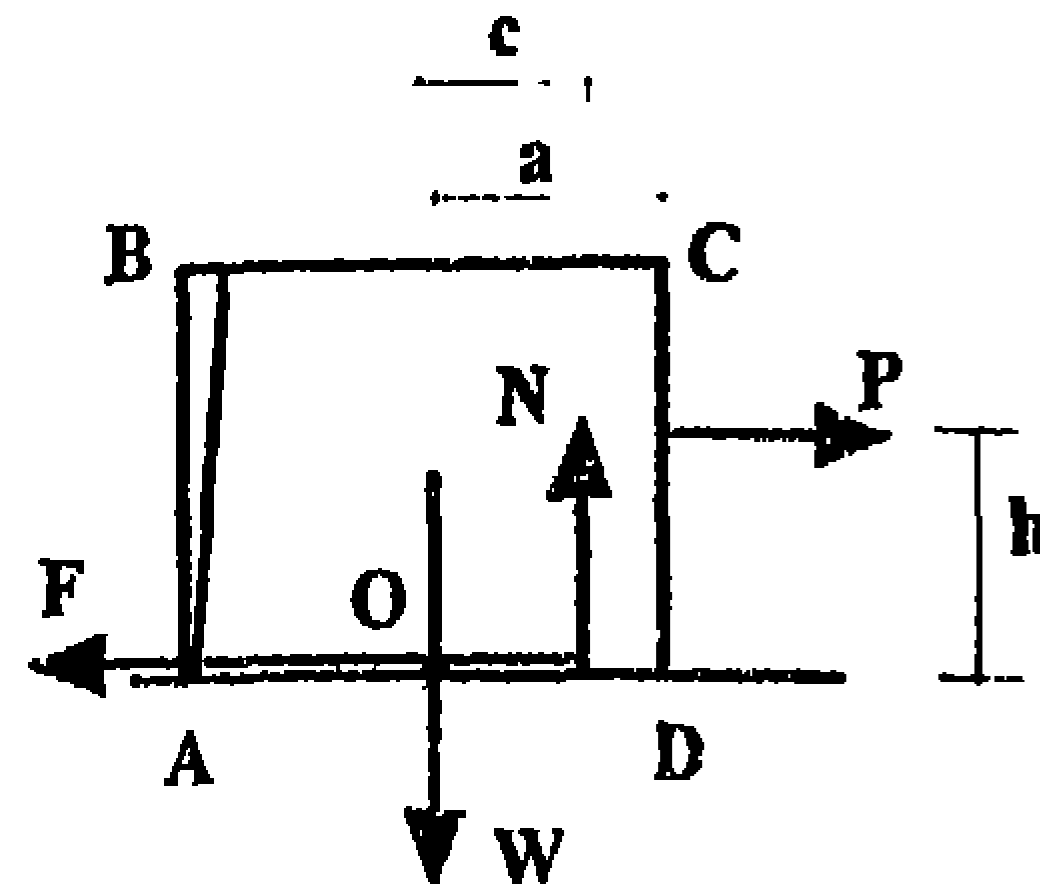
$$\sum x = 0$$
$$T = \mu_2 N_2$$
$$T = \mu_2 W_2$$

٢ – الإنزلاق والإنقلاب:

عند وضع جسم له أبعاد معلومة لا يمكن إهمالها على سطح أفقي خشن بدون تأثير أي قوة خارجية فإن الجسم يتزن تحت تأثير وزنه W ورد الفعل العمودي N بحيث N = W والقوتان على خط عمل واحد يمر بنقطة O .



حالة اتزان دون
حدوث أي محاولة للحركة



محاولة حركة الجسم
$c < a$, $F < \mu N$

عند تحريك الجسم بواسطة P قوة أفقية يحدث شيئان في نفس الوقت وهما:

١ - تتولد قوة الإحتكاك F بحيث تحاول أن تمنع الجسم من الإنزلاق وتكون قيمتها F = P .

٢ - يتحرك رد الفعل العمودي N من نقطة O نحو نقطة D وذلك لمنع الجسم من الإنقلاب أو الدوران تبعا للمعادلة الآتية :

$$\sum M_o = 0$$
$$N.C = P \cdot h$$

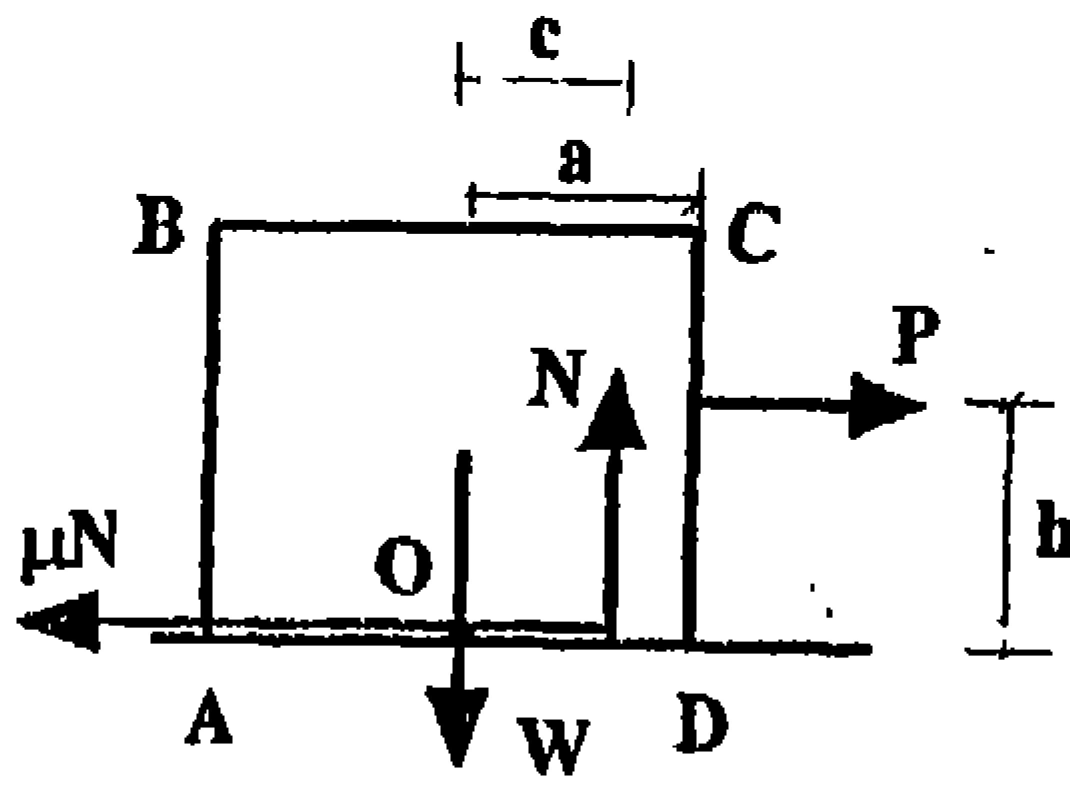
حيث N تساوي W

بمحاولة تحريك الجسم بزيادة قيمة القوى P وتبعا للمعادلتين

$$F = P \quad , \quad N \cdot C = P \cdot h$$

نجد أن كلا من F ، C تزيد بزيادة P ، ومع زيادة P قد يحدث أحد الإحتمالات الآتية:

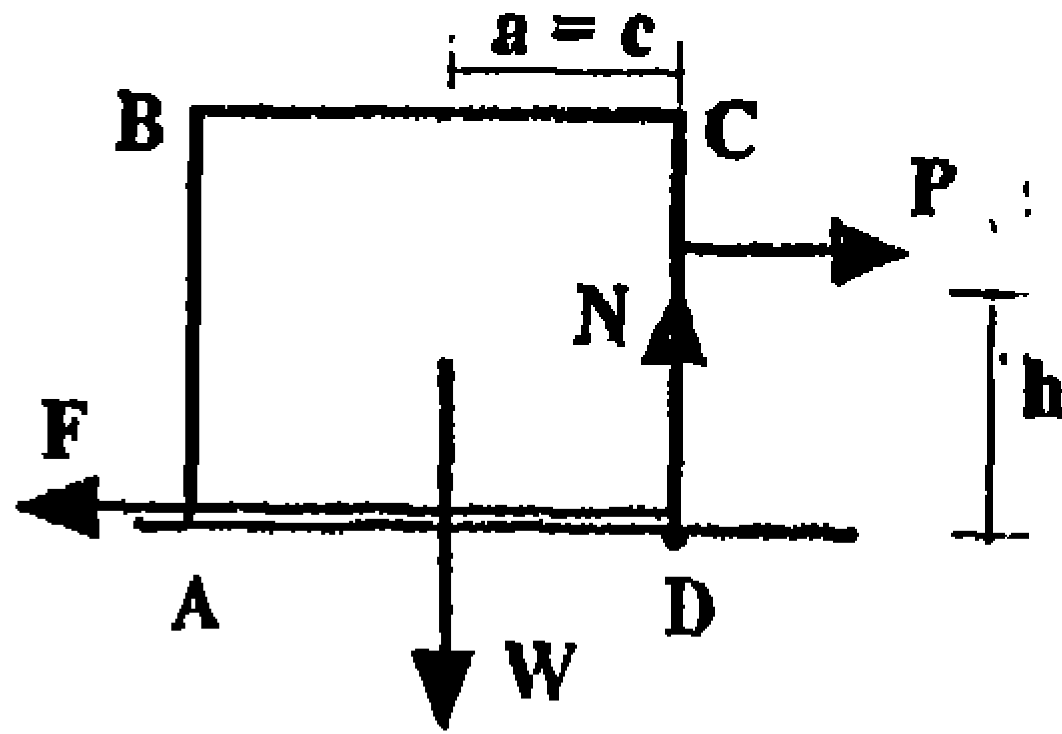
١ - تصل قوة الإحتكاك F إلى قيمتها العظمى μN قبل أن يصل N إلى نقطة D وعندئذ يبدأ الجسم في الإنزلاق قبل الإنقلاب.



على وشك الإنزلاق

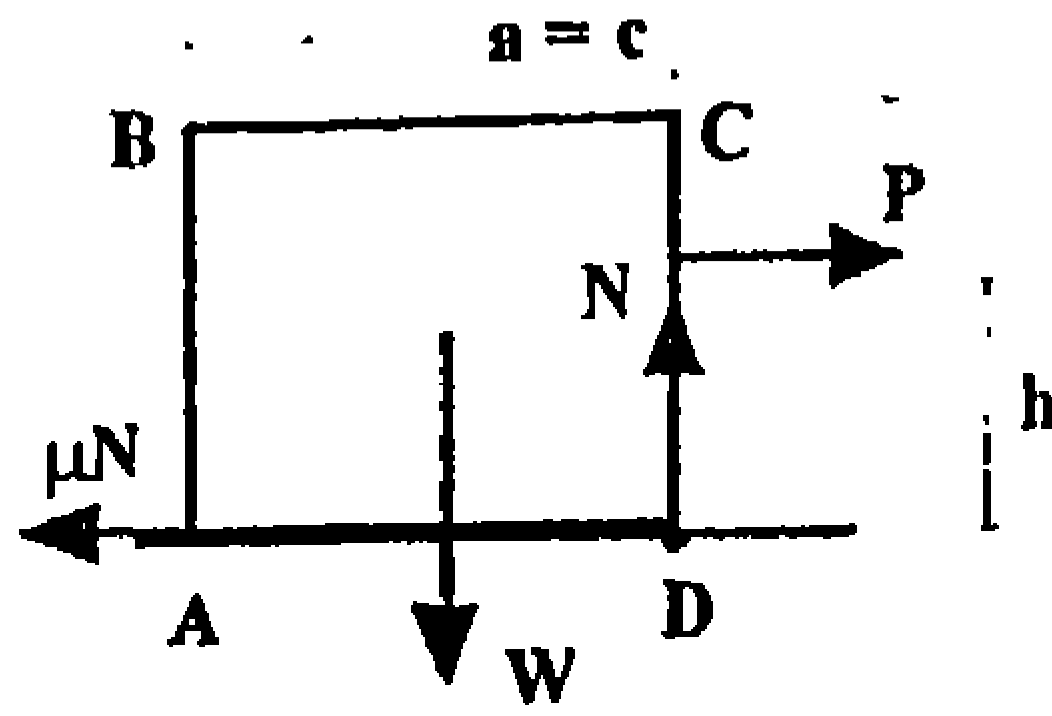
$c < a , F = \mu N$

٢ - يصل خط عمل N إلى نقطة D (c = a) قبل أن تصل F إلى قيمتها العظمى μN وعندئذ يبدأ الجسم في الإنقلاب حول D قبل الإنزلاق.



على وشك الإنقلاب

$c = a , F < \mu N$



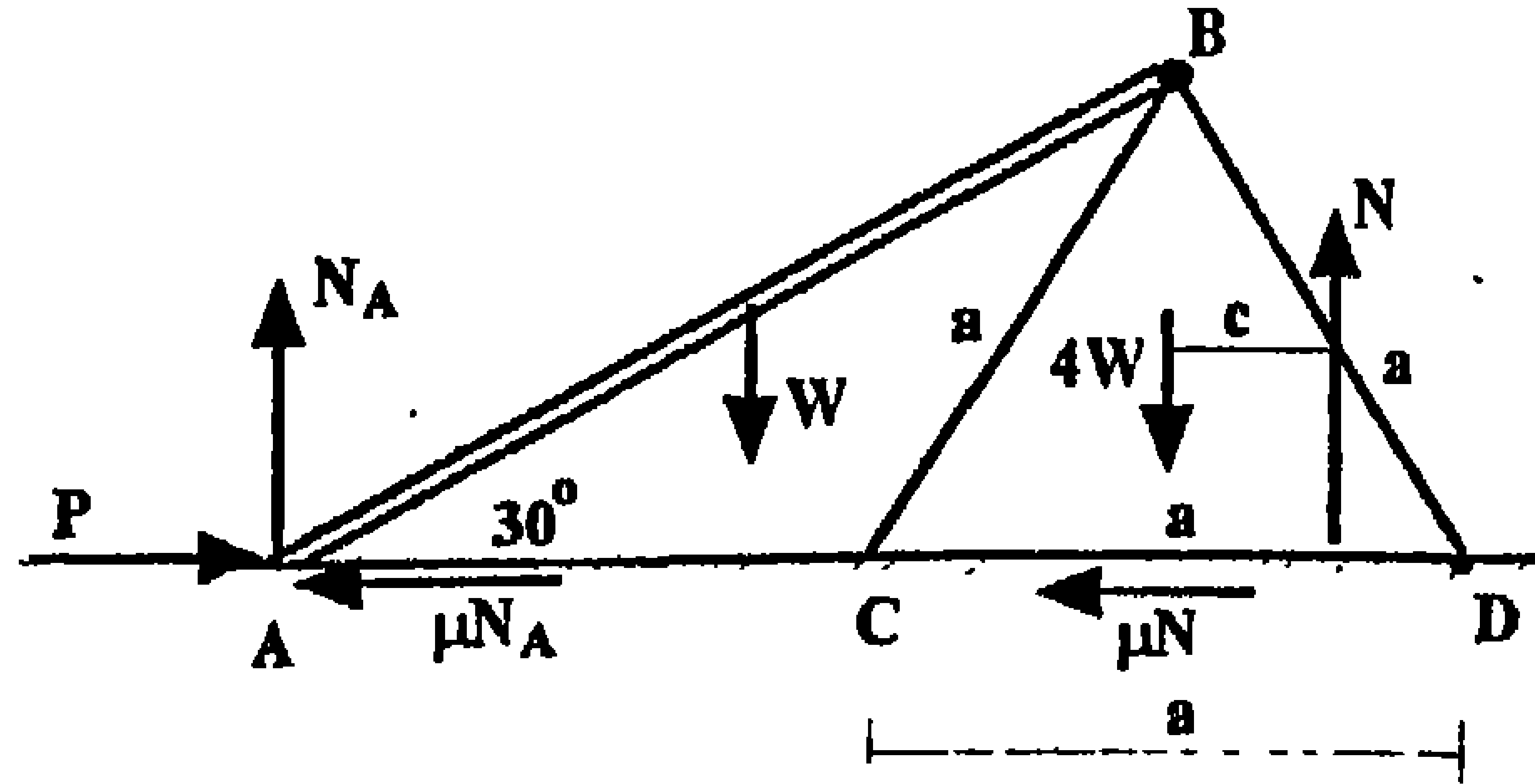
على وشك أنزلاق و أنقلاب

$c = a\ ,\ F = \mu N$

٣ – تصل قوة الإحتكاك F إلى قيمتها العظمى μN في نفس اللحظة التي يصل فيها خط عمل N إلى نقطة D وعندئذ يبدأ الجسم في الإنزلاق والإنقلاب حول D معا.

مثال ١ :

لوح AB وزنه W يتصل مفصليا في B بمنشور ثلاثي BCD وزنه 4W ويستقران على أرض خشنه بمعامل إحتكاك يساوي $\sqrt{3}/8$ أوجد القوة الأفقية P اللازمه لإحداث الإنزلاق وأثبت أن المنشور لا ينقلب في هذه الحالة .



الحل

بدراسة الإتزان للمجموعة

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu(N_A + N)$$

$$\sum y = 0$$

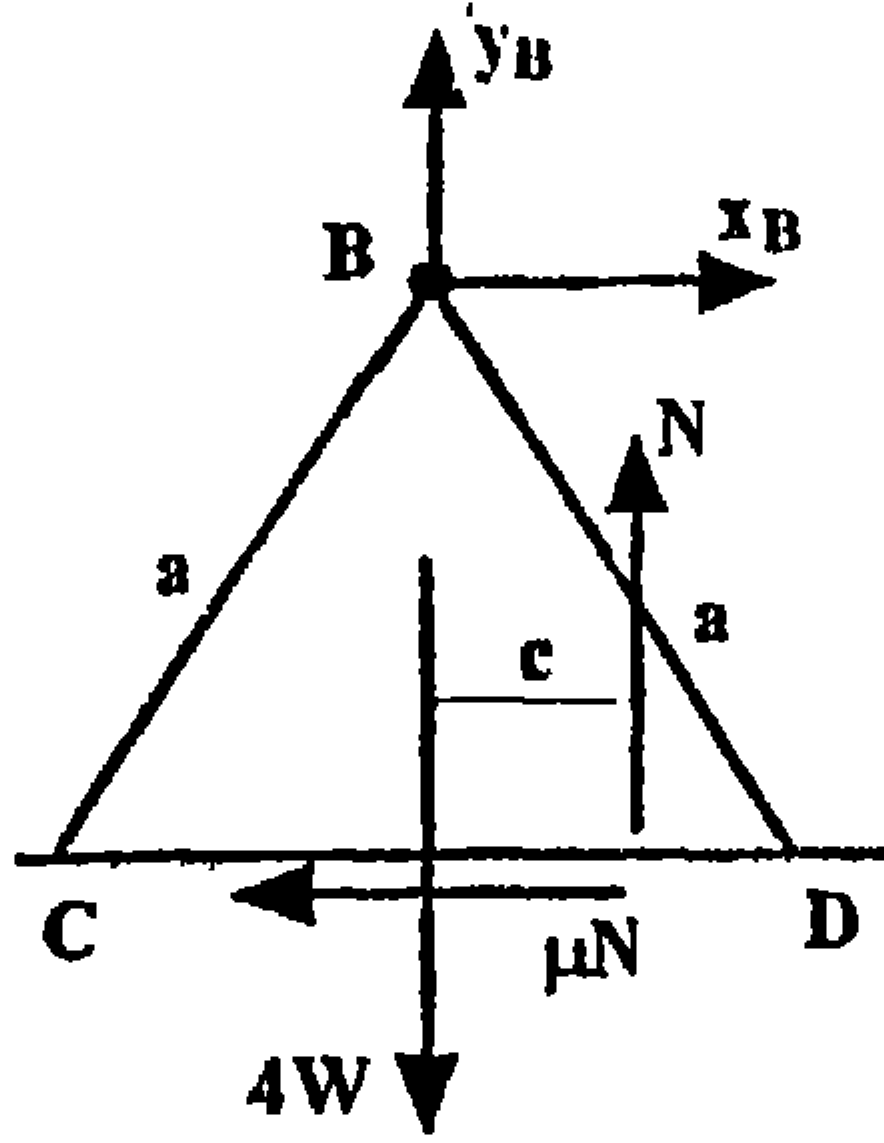
$$N_A + N = 5W$$

$$\therefore P = 5\mu W \qquad \because \mu = \sqrt{3}/8$$

$$P = \frac{5\sqrt{3}}{8} W$$

لإثبات أن المنشور لا ينقلب يجب إثبات أن $c \le \frac{1}{2}a$.

بدراسة إتزان المنشور فقط



$$\sum M_B = 0$$

$$N \cdot C = \mu \cdot N \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$C = \frac{3}{16} a$$

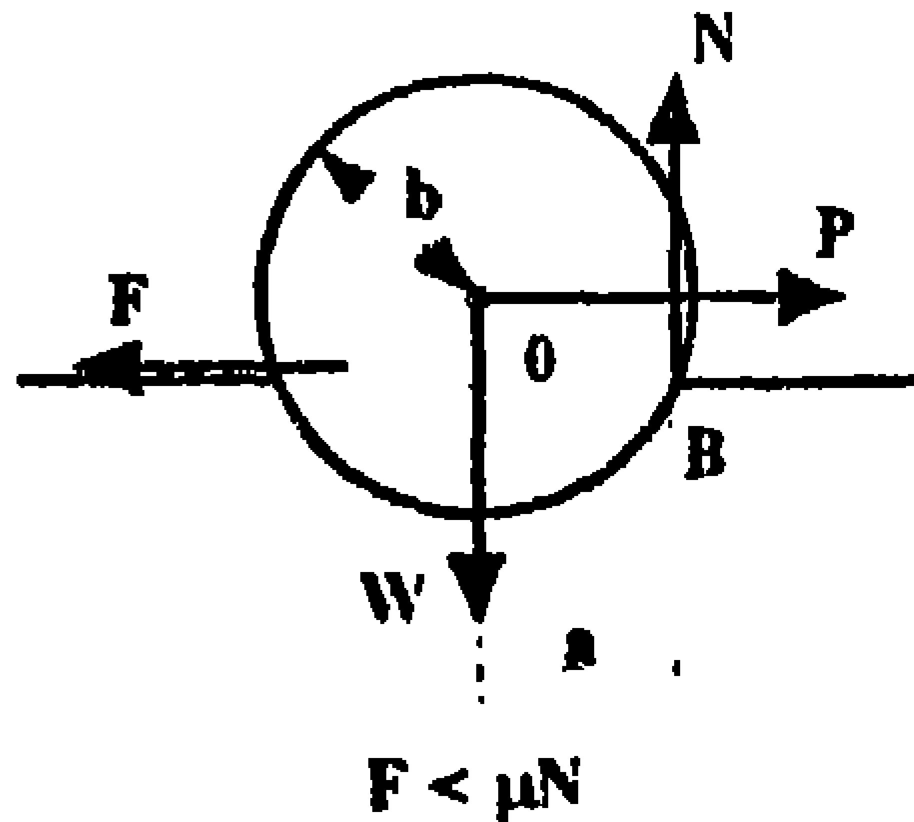
وهذا يعني أن المنشور لا ينقلب حيث أن $C < \frac{1}{2}a$.

٣ – مقاومة التدحرج:

تنشأ عن تدحرج إسطوانة أو كره أو عجله على سطح خشن . قد يحدث تفرطح إو إنبعاج في الكره أو الإسطوانه نتيجة أن أي من الأرض أو الإسطوانه غير متكب تامي الصلابة .

وإذا كانت صلابتهما تامه بحيث لايحدث أي قدر من التفرطح فإن التماس بينهما يكون على راسم في الإسطوانة (يظهر نقطة واحده على الشكل) أو نقطة تماس واحده بين الكره المتدحرجة والسطح و لَكفت أي قوة سحب صغيرة P لإحداث التدحرج .

ويمكن إعتبار التحرج مجموعة إنقلابات متلاحقة عند B التي تسكن لحظيا وتنقلب حول الإسطوانه بحيث تتغير B بإستمرار على سطح الإسطوانه ويكون طول القوس على سطح الإسطوانه مساويا لطول المسافه المقطوعه على الأرض.



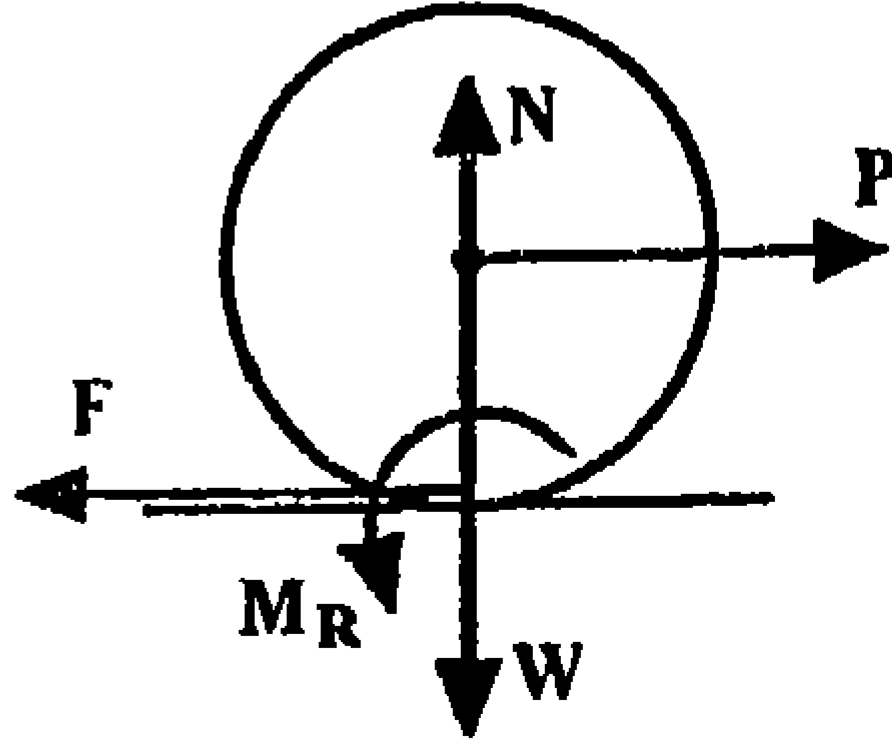
وهذا يعني أن F لا تصل إلى μN ، وبكتابة معادلة الإتزان على الشكل :

$$F = P$$

$$N = W$$

$$P \cdot b\cos\theta = N \cdot a \qquad \therefore P = \frac{Wa}{b\cos\theta}$$

نظرا لأن θ صغيره جداً فإن cos θ = 1



$$\therefore P = W\frac{a}{b}$$

و المسافة a تسمى عادة ذراع مقاومة التدحرج $M_R = N \cdot a$

مثال ١ :

اسطوانة نصف قطرها R و وزنها W وضعت على مستوى مائل خشن زاوية ميله على الأفقي صغيرة و مقدارها α فبدأت الإسطوانة في التدحرج بانتظام هابطه إلى أسفل المستوى المائل بتأثير وزنها .عين ذراع مقاومة التدحرج ثم عين القوة P التي اذا أثرت في مركز الأسطوانة موازيه للمستوى المائل لتدحرجت الأسطوانة صاعده المستوى بسرعه منتظمه .

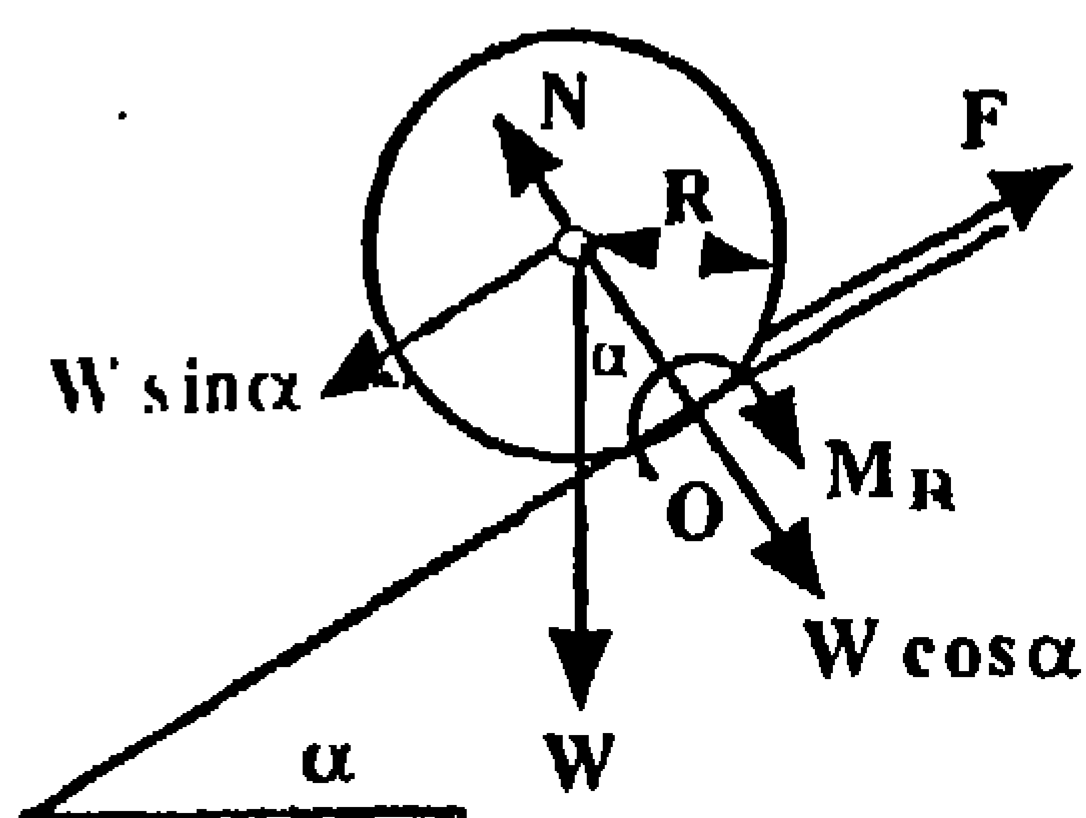
الحل :

أولاً في حالة الهبوط :

بالتحليل عمودي على اتجاه المستوى المائل

$$N = W\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ثم بأخذ العزوم حول O



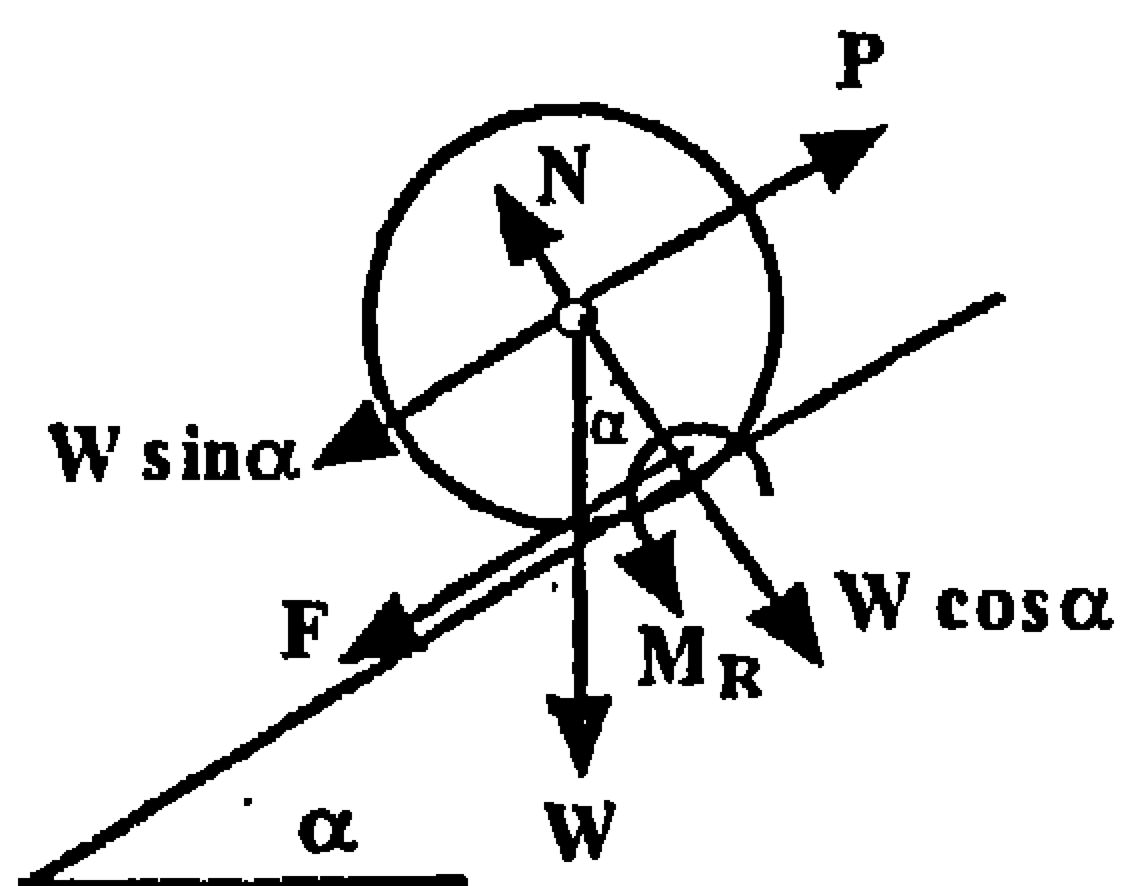
$$W \sin\alpha . R = N . a = M_R \qquad .... (2)$$

بحل (1) و (2) في a ينتج

$$W \sin\alpha . R = W \cos\alpha . a$$

$$= R\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad a = R \tan\alpha \quad ....(3)$$

ثانيا في حالة الصعود :



بأخذ العزوم حول O

$$M_O = P . R = W \sin\alpha . R + M_R$$

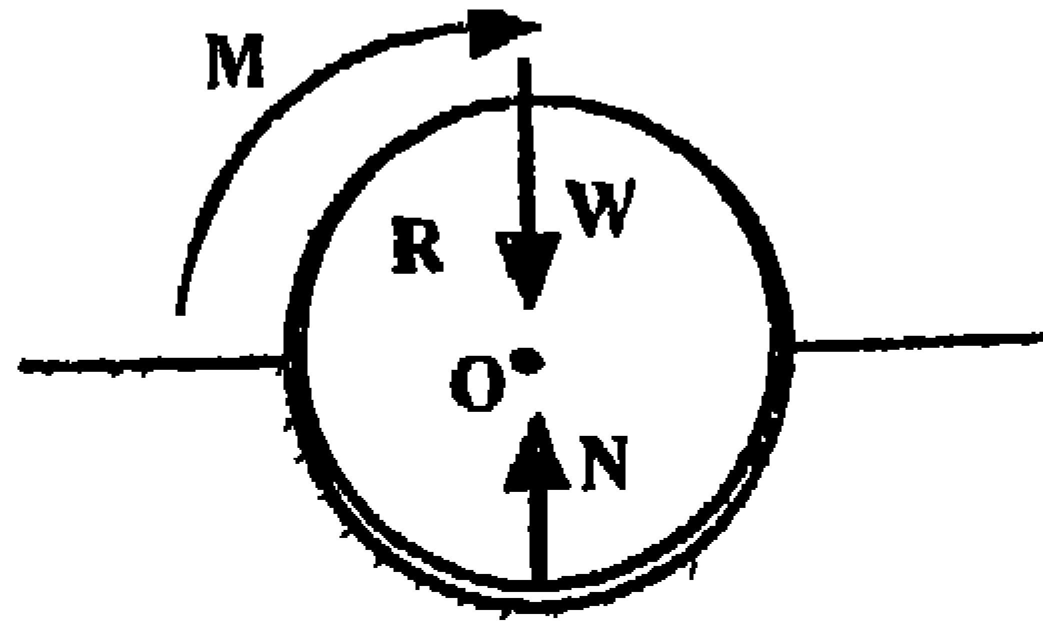
$$P . R = W \sin\alpha . R + W \cos\alpha . a$$

و بالتعويض من المعادله(3) ينتج :

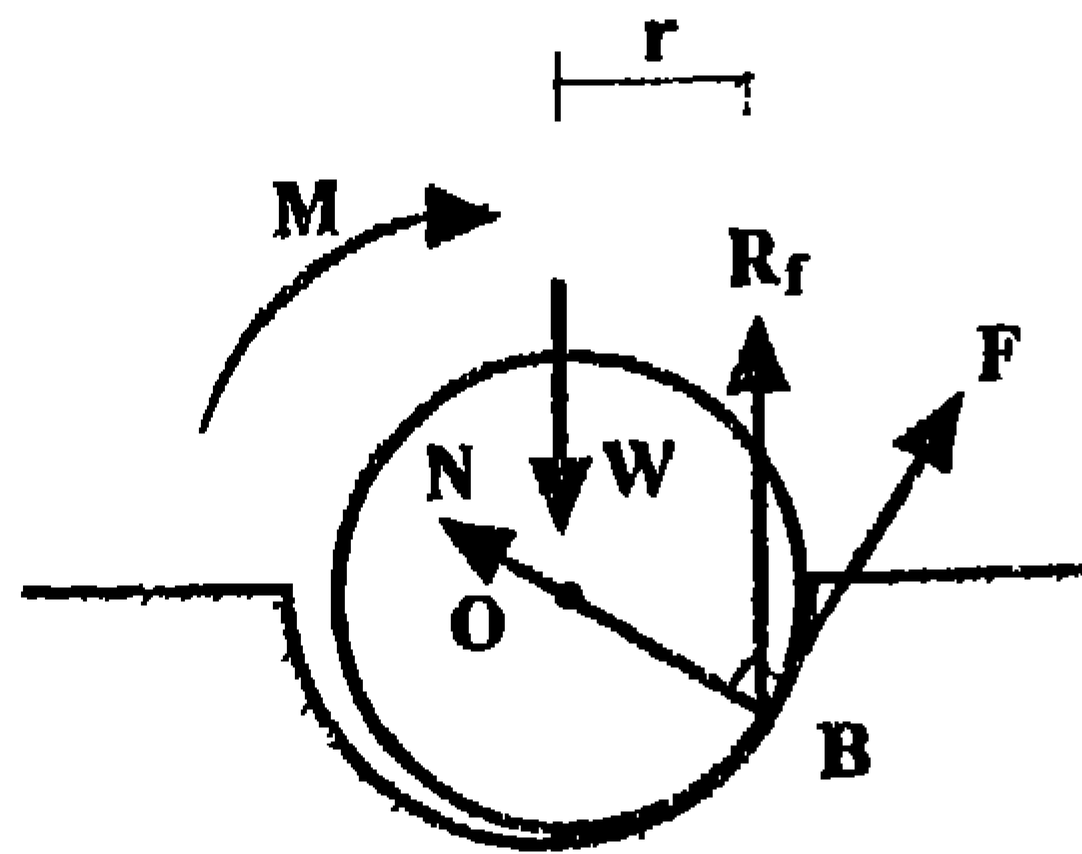
$$P \cdot R = W \sin\alpha \cdot R + W \cos\alpha \cdot R \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$P = 2W \sin\alpha$$

٤ - إحتكاك المحاور:



المحور هـو عبـارة عـن جسـم اسـطواني يؤثـر عليه حمل و يمكـن ادارتـه عـن طريـق التأثير عليـه بعزم دوران . و يرتكز علـى كرسـي محـور حيـث يوجد بينه و بين المحور خلوص .

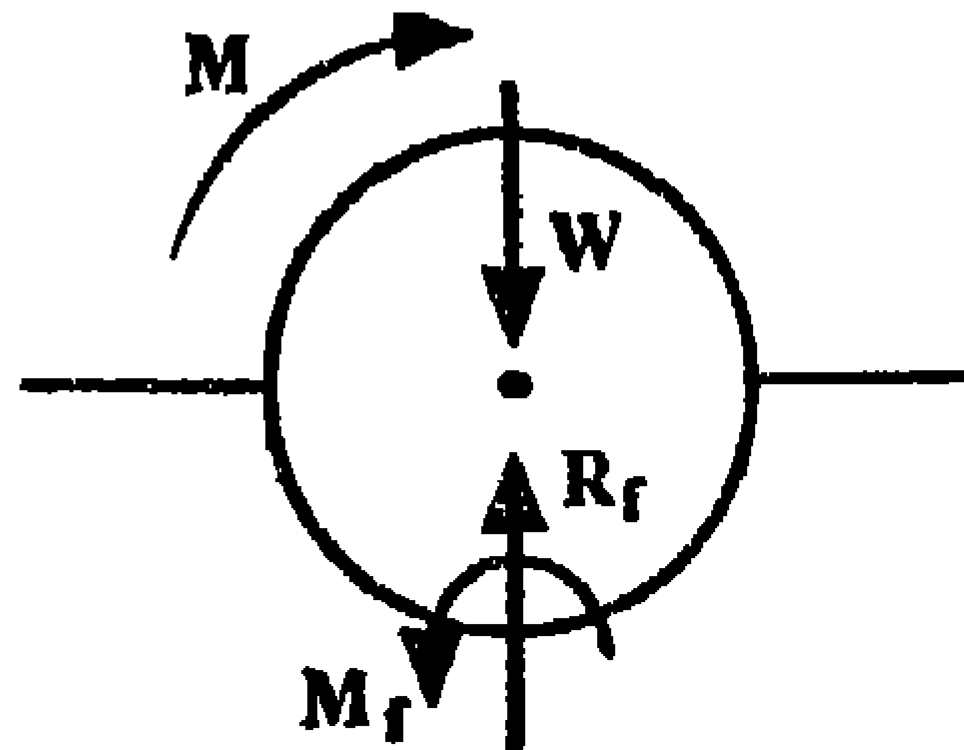


في عدم وجود أي خشونه في المحور أو الحامل فإنـه أقل عزم دوران M تكفي لإدارة المحور .

نظـراً لوجـود قـدر مـن الخشـونه في المحـور و حامله فإن قـوة مقاومـة الإحتكـاك F تظهـر علـى المحور بحيث تقاوم الدوران و تمر F بنقطة التمـاس بين المحور و الحامل (راسم تماس) التي تتقدم قليلاً لتسمح لردود الفعل من توليد عزم احتكاك مقاوم للدوران .

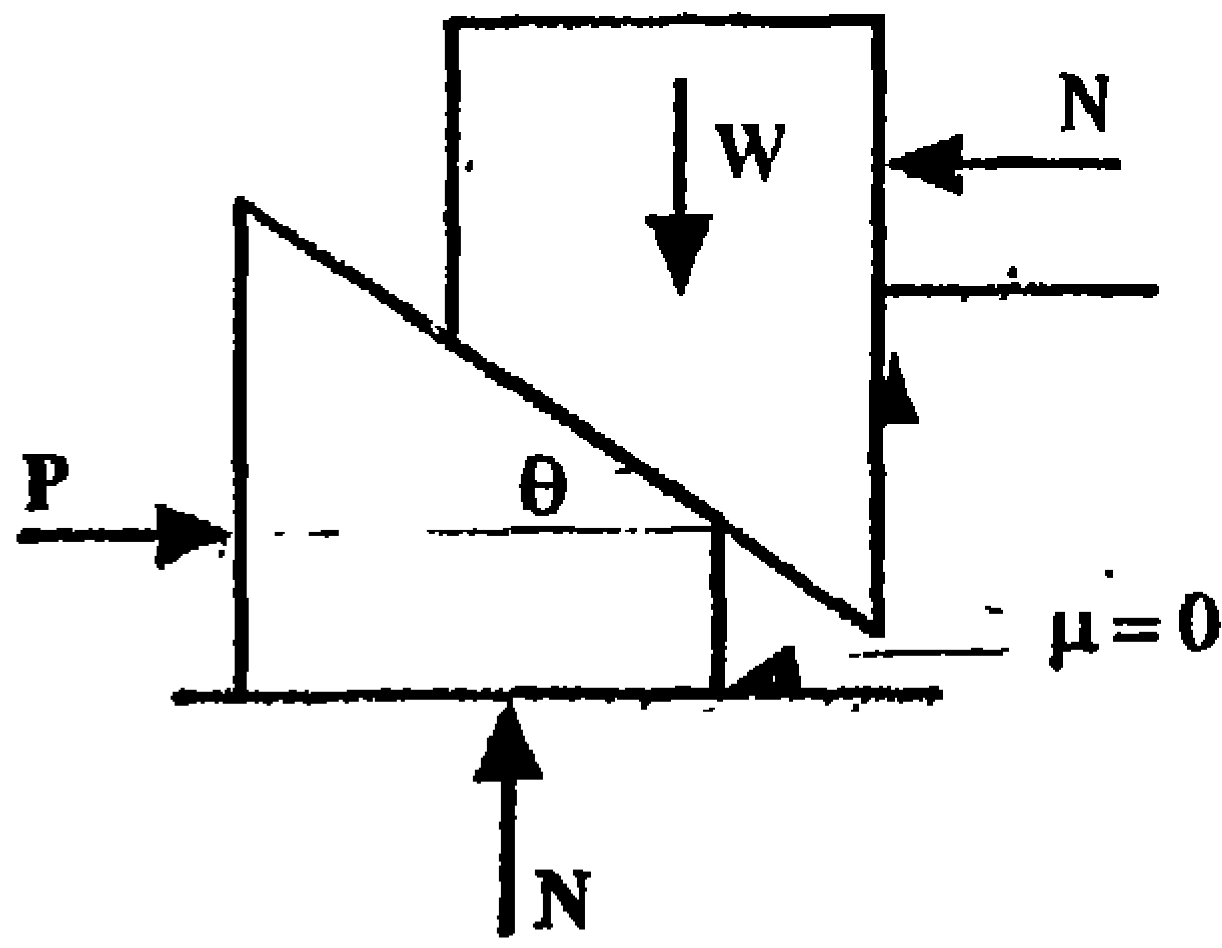
بتغيير اتجاة الحمل W يتغير أيضا اتجاه R_f و تظل المسافة r ثابتة و تسمى r بنصف قطر دائرة احتكاك المحور .

يمكن اعادة R_f الى مركز المحور O موازية لنفسها مع اضافة عزم ازدواج M_f يسمى عزم احتكـاك المحور و هو مضاد لعزم الإدارة M و يساويه في المقدار حيث $M_f = M = W.\ r$ و يمكـن تقليـل عـزم مقاومة الإحتكاك و كذلـك عـزم الـدوران عـن طريـق تقليل قوة الإحتكاك F و بالتـالي يقـل M_f عـن طريـق التزييت أو التشحيم .

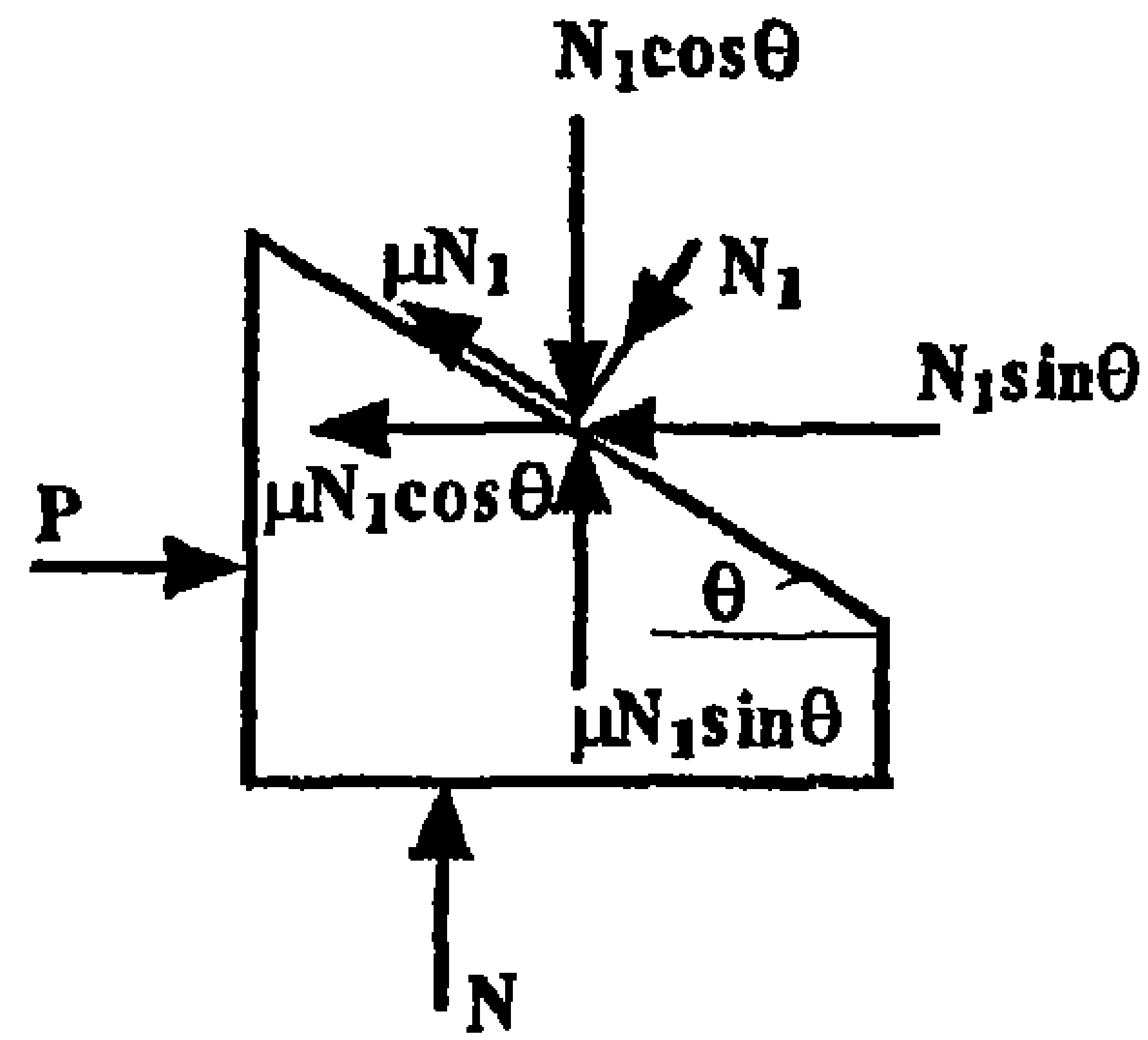


٥ – الأسفين :

هو عبارة عن آلة بسيطة تعتمد في عملها أساساً على الإحتكاك . و يستعمل عادة لرفع حمل معين أو لزحزحة جسمين عن بعضهما .



يتضح من اتزان المجموعة أن



$$N = W \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_1 \cos\theta - \mu N_1 \sin\theta = N$$

$$N_1 = \frac{W}{\cos\theta - \mu \sin\theta} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu N_1 \cos\theta + N_1 \sin\theta \quad \cdots\cdots (3)$$

بالتعويض من (2) في (3) ينتج أن

$$P = W \frac{\sin\theta + \mu \cos\theta}{\cos\theta - \mu \sin\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

المعادلة (4) تعطي أقل قوة P تلزم لرفع الحمل W الى أعلى . و يتضح من هذه المعادلة أنه كلما زادت زاوية رأسي الاسفين θ فإن الكمية (cos θ - μsin θ) تقل و بالتالي تزيد القوه p اللازمة لرفع W . و يستحيل رفع الحمل اذا وصلت الكمية (cos θ - μsin θ) الى الصفر أي اذا كان :

$$\cos\theta = \mu \sin\theta$$

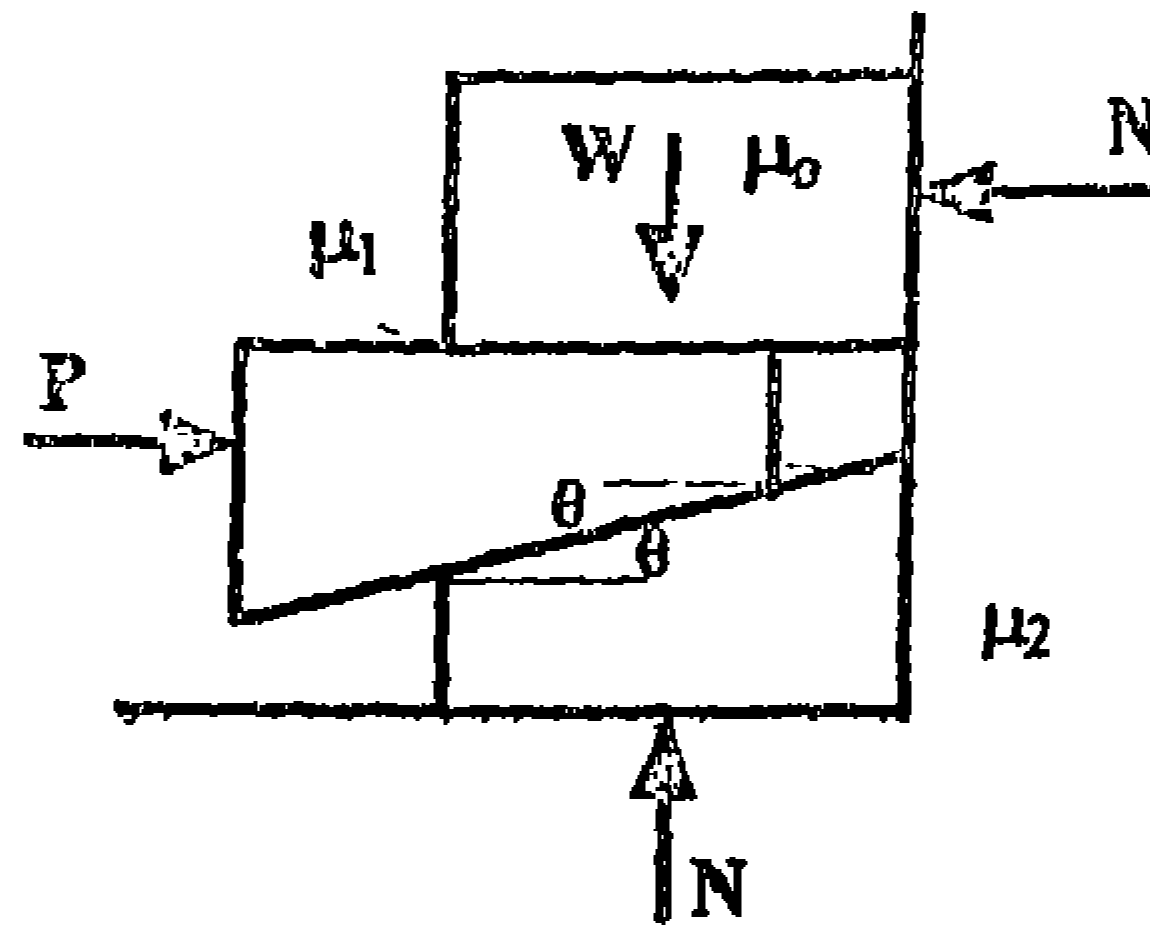
$$\mu = \cot\theta$$

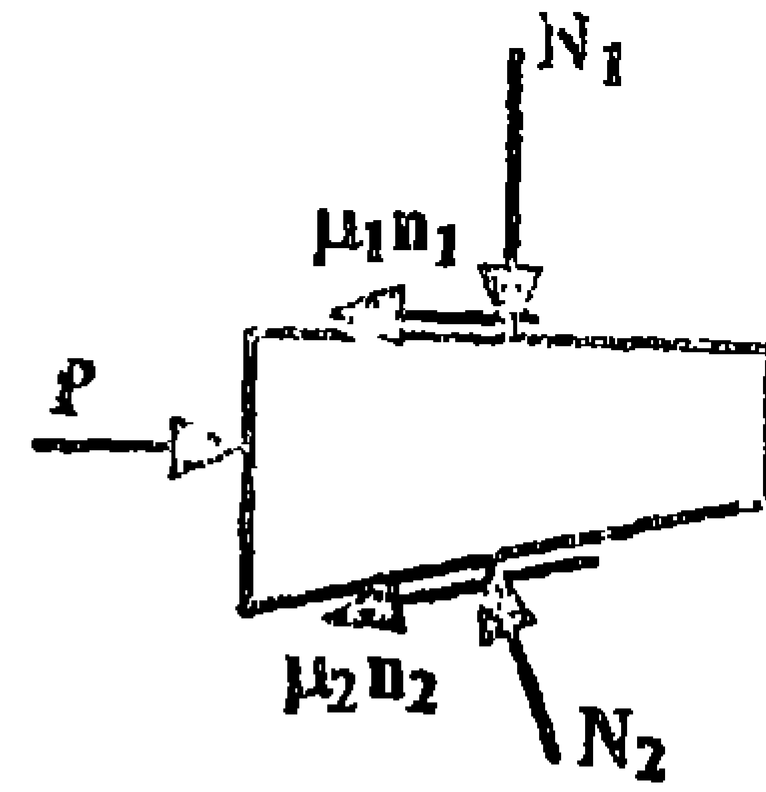
و عندها تؤول P الى اللانهاية .

مثال :

يستعمل الأسفين الموضح بالشكل لرفع الحمل W . معامل الإحتكاك بين الأسفين و الحمل μ_1 و بين الأسفين و الكتلة السفلى μ_2 و اعتبر الحائط أملس عين القوة P اللازمة لرفع الحمل W اذا كان :

$$W = 8000\ lb\ ,\ \mu_1 = 0.3\ ,\ \mu_2 = 0.1\ \text{ and }\ \theta = 10^0$$





الحل :

من اتزان الحمل نلاحظ .

من التحليل الرأسي للأسفين :

$$N_1 = W$$

$$N_1 = N_2 \cos\theta - \mu_2 N_2 \sin\theta$$

$$N_2 = \frac{W}{\cos\theta - \mu_1 \sin\theta}$$

من التحليل الأفقي :

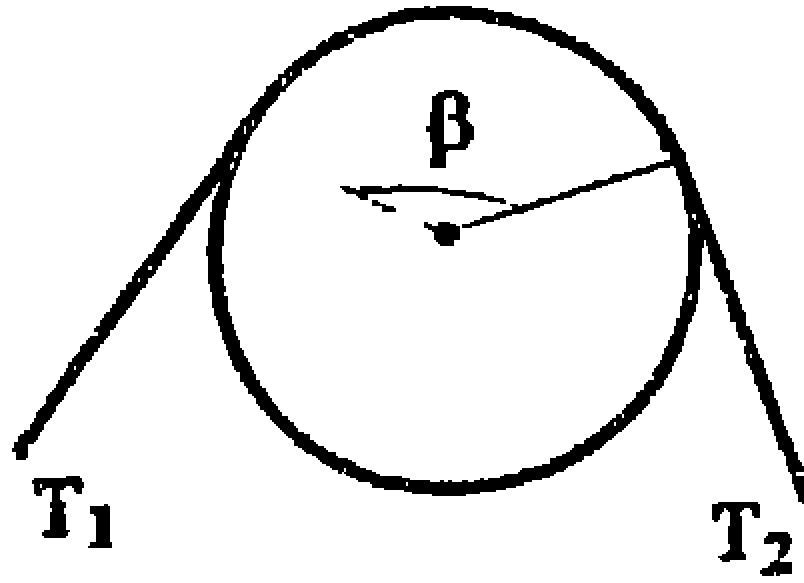
$$P = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \cos\theta + N_2 \sin\theta$$

$$P = W\left(\mu_1 + \frac{\mu_2 \cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu_2 \sin\theta}\right)$$

$$P = W\left(\mu_1 + \frac{\mu_2 + \tan\theta}{1 - \mu_2 \tan\theta}\right)$$

$$P = 4650 \text{ Ib}$$

٦ – احتكاك الحبال أو السيور :



لو أن حبلا أو سيرا يلتف حول محيط اسطوانة خشنة ثابتة بحيث يحصر زاوية مركزيه β و كان الشد في أحد طرفين T_1 و في الطرف الأخر T_2 و معامل الإحتكاك بين الحبل و الإسطوانة μ . $T_2 = T_1 e^{\mu\beta}$

مثال ١ :

يراد منع وزن قدره ١٠٠٠ كجم من الهبوط و ذلك عن طريق ربطه بحمل و لف الحبل حول اسطوانه ثابتة خشنة . اذا كان معامل الإحتكاك بين الحبل و الأسطوانة $\mu = \frac{1}{2}$ و لف الحبل مرتين على سطح الإسطوانة ، فعين القوة اللازمة لمنع الحمل من الهبوط .

الحل :

$\mu = 1/2$

$\beta = 2\pi \times 2 = 4\pi$

$T_2 = 1000 \text{ kg}$

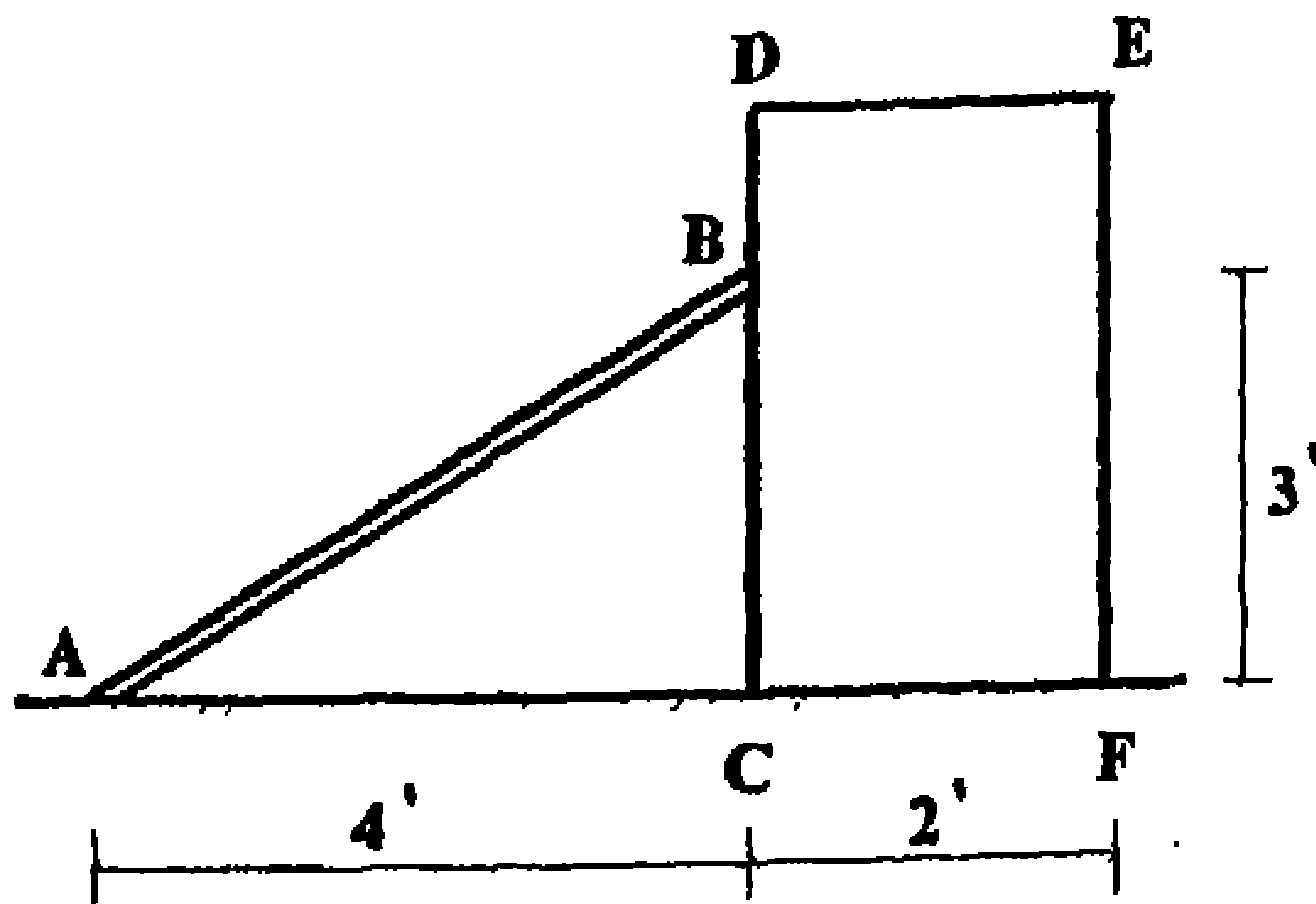
Then $T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$

$1000 = T_1 e^{1/2\, 4\pi}$

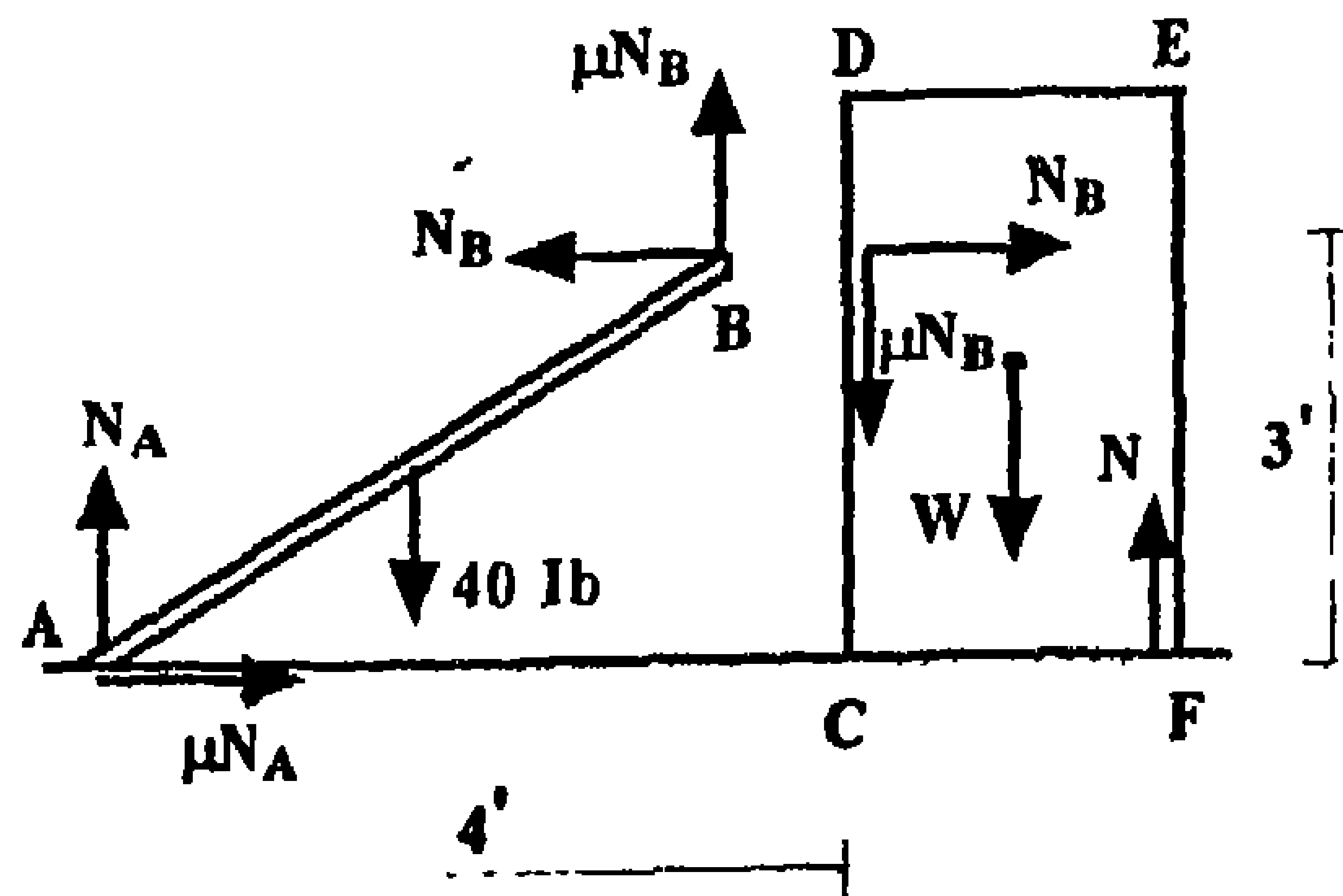
$T_1 = \frac{1000}{e^{2\pi}} = 1.867 \text{ kg}$

مثال ٢ :

قضيب منتظم AB وزنه ٤٠ باوند يرتكز على أرض خشنة و على كتله مستطيله المقطع CDEF بنفس الخشونه كما في الشكل . اذا كان القضيب على وشك الإنزلاق و الكتله على وشك الإنقلاب . أوجد معامل الإحتكاك ، وزن الكتلة W .



الحل :



بدراسة AB

$$\sum X = 0$$

$$N_B = \mu N_A \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_A + \mu N_B = 40 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$40 \times 2 = 3N_B + 4\mu N_B \quad \cdots\cdots (3)$$

بحل (1) ، (2) ، (3) في المجاهيل الثلاثة N_A ، N_B ، μ ينتج :

$$\mu = 1/2$$

$$N_B = 16 \text{ Ib}$$

$$N_A = 32 \text{ Ib}$$

ثم بدراسة اتزان الكتلة :

$$\Sigma M_F = 0$$

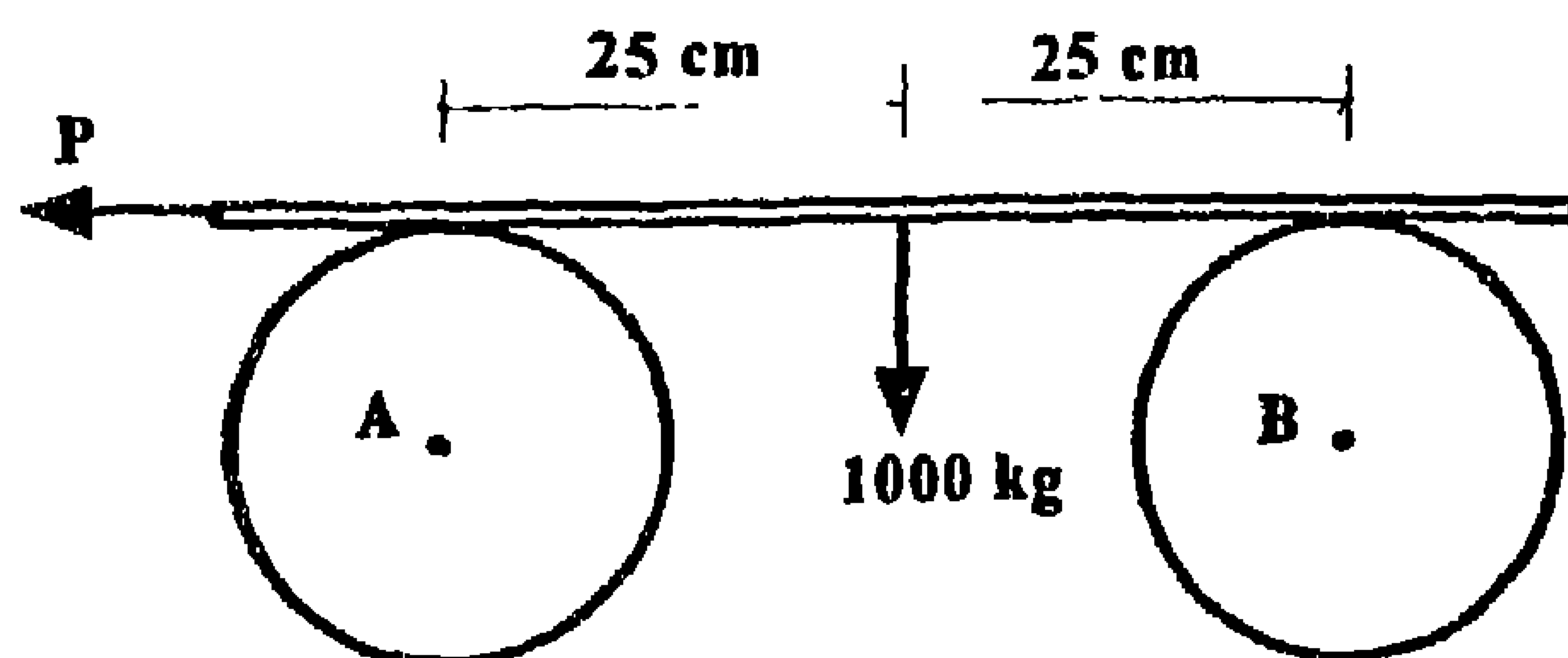
$$W \cdot 1 = 3 N_B - 2\mu N_B$$

$$W = 32 \text{ Ib}$$

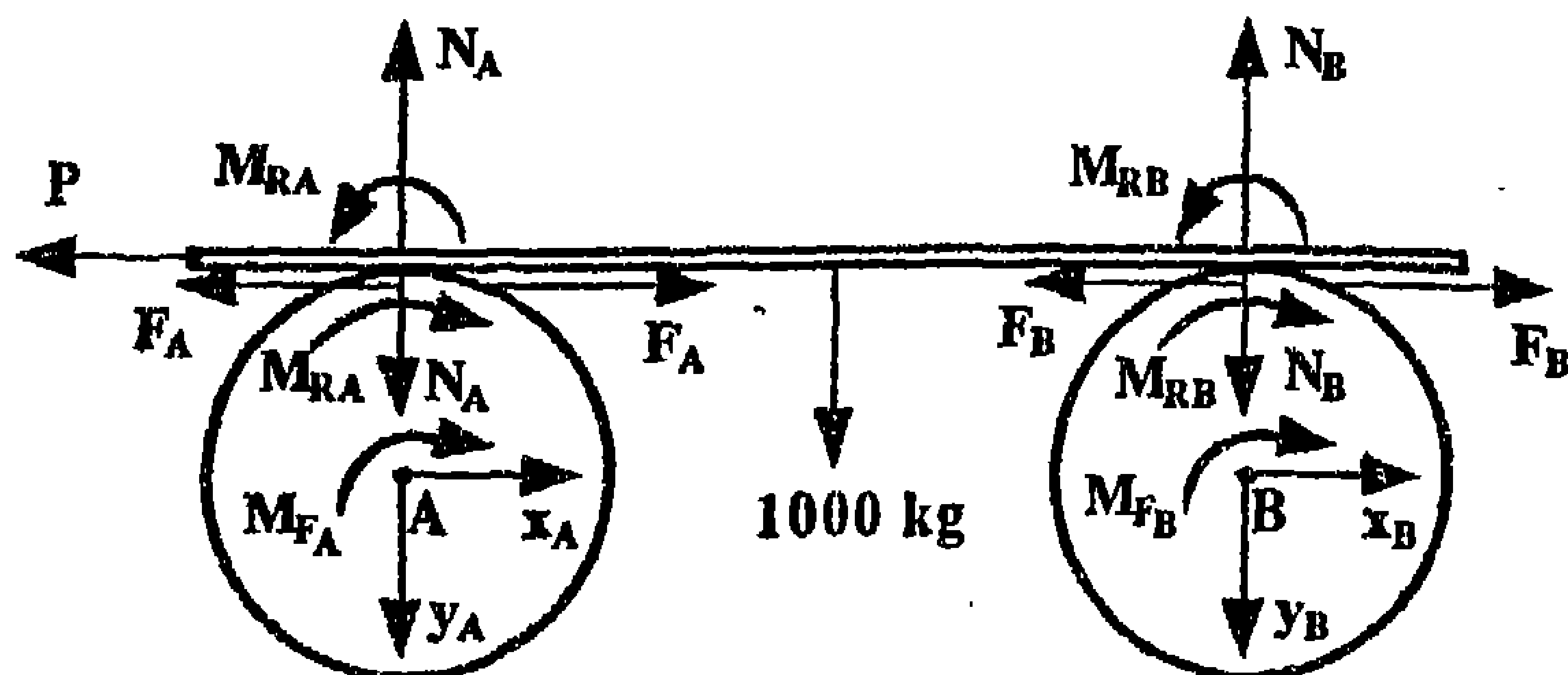
مثال ٣ :

يستعمل الجهاز المبين بالشكل داخل المصانع لجر الألواح الثقيلة و ذلك عن طريق وضعها على عجلتين خفيفتين مركبتين على محورين ثابتين A ، B في مستوى أفقي واحد ثم شد اللوح بقوة أفقية P . و المطلوب حساب قيمة P اذا كان :

وزن اللوح ١٠٠٠ كجم ، ذراع مقاومة التدحرج بين اللـوح و كـل مـن العجلتـين = ٠,٢٥م ، نصف قطر دائرة احتكاك المحور عند A ، B يساوي ٠,٢٥م ، نصف قطـر العجلـة ١٠ سـم و المسـافة بين المحورين ٥٠ سم .



الحل :



من اتزان اللوح :

$$\Sigma X = 0$$

$$P = F_A + F_B$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_A + N_B = 1000$$

من اتزان العجلة A :

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_A \times 10 = M_{RA} + M_{FA}$$

$$M_{RA} = 1/4\, N_A$$

$$M_{FA} = 1/4\, Y_A$$

$$10\, F_A = 1/4\, (N_A + Y_A) \quad \text{.........................} \quad (1)$$

وكذلك من اتزان العجلة B و العزم حول B :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$10\, F_B = M_{RB} + M_{FB}$$

$$10\, F_B = 1/4\, (N_B + Y_B) \quad \text{.........................} \quad (2)$$

جمع (1) ، (2) ينتج :

$$F_A + F_B = 1/40\, (N_A + y_A) + 1/40\, (N_B + y_B)$$

$$= 1/40\, (N_A + N_B) + 1/40\, (y_A + y_B)$$

$$= 1/40 \times 1000 + 1/40 \times 1000$$

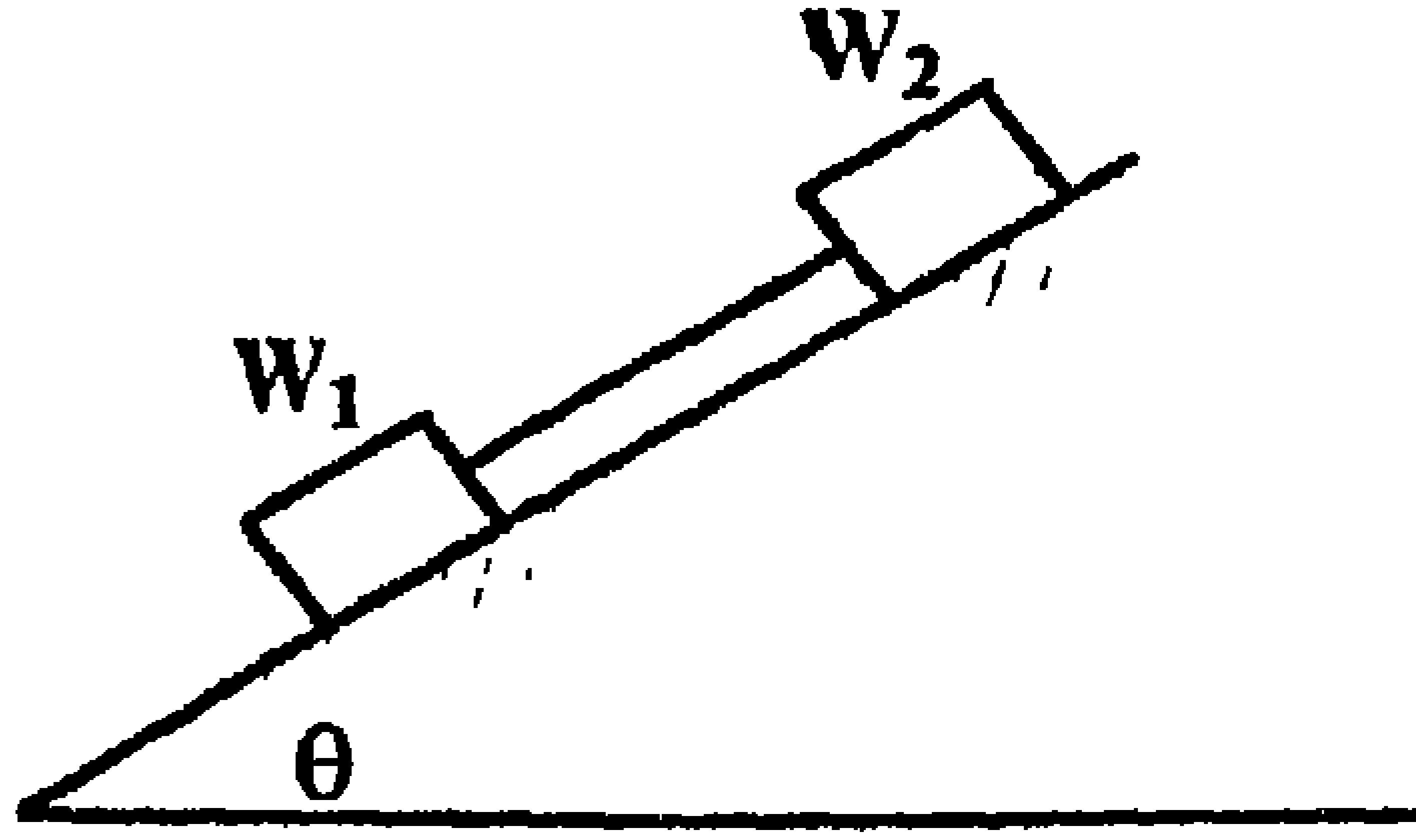
$$= 50$$

$$\therefore P = 50 \text{ kg}$$

أي أننا نحتاج الى قوه تساوي ٥٠ كجم لسحب لوح وزنه ١٠٠٠ كجم .

أمثلة متنوعة :

مثال ١ :

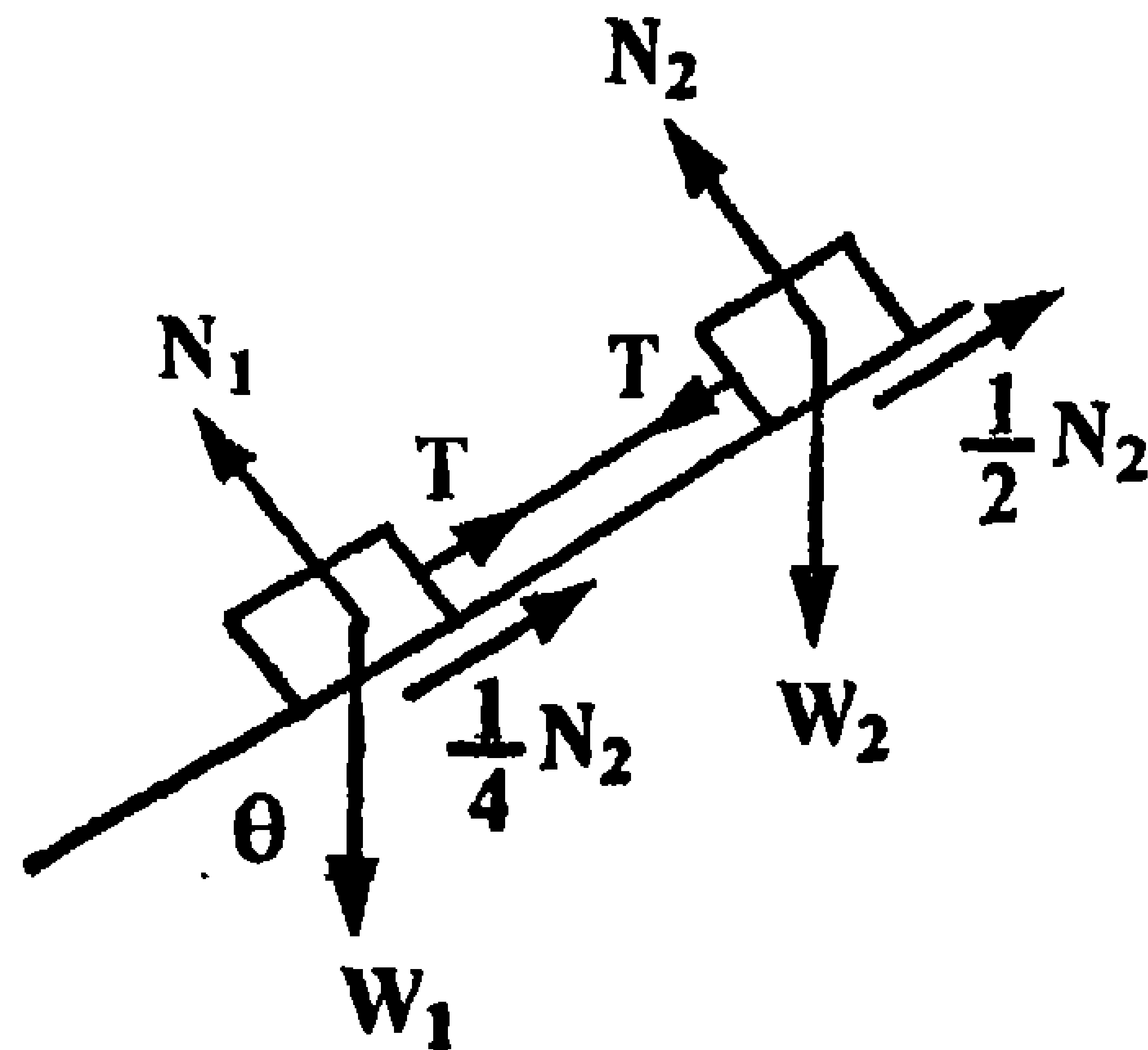


في الشكل المبين W_1 تساوي ٥٠ كجم و W_2 ٣٠ كجم و هما مربوطان معا بحبل مواز للمستوى المائل بزاوية θ . معامل الإحتكاك بين W_1 و المستوى يساوى $\frac{1}{4}$ و بين W_2 و المستوى يساوي $\frac{1}{2}$. احسب قيمة الزاوية θ التي يحدث عندها الإنزلاق و قيمة الشد في الحبل عندئذ.

الحل :

بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه لإتزان W_1 :

$$T + \frac{1}{4}N_1 = W_1 \sin\theta \quad \text{.......} \quad (1)$$



$$N_1 = W_1 \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

من المعادلتين (1) ، (2) نحصل على :

$$T = W_1 \sin\theta - \frac{1}{4} W_1 \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

كذلك بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه إتزان W_2 :

$$T + W_2 \sin\theta = \frac{1}{2} N_2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

$$N_2 = W_2 \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

من المعادلتين (3) ، (4) نحصل على :

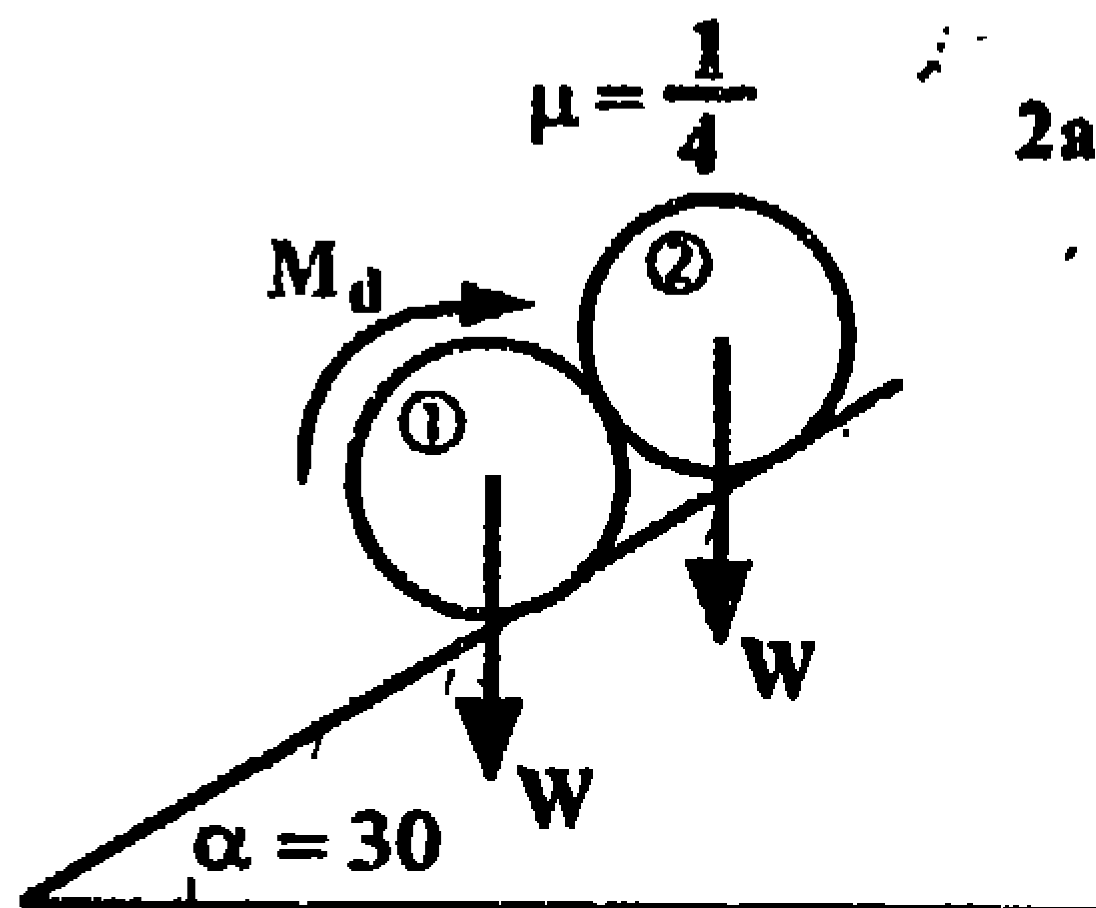
$$T = \frac{1}{2} W_2 \cos\theta - W_2 \sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

بقسمة المعادلتين (a) ، (b) ينتج أن :

$$\tan\theta = 0.344 \qquad \therefore \theta = 19.0^\circ$$

ثم من المعادلتين (a) و (b) نحصل على $T = 4.43 \ kg$

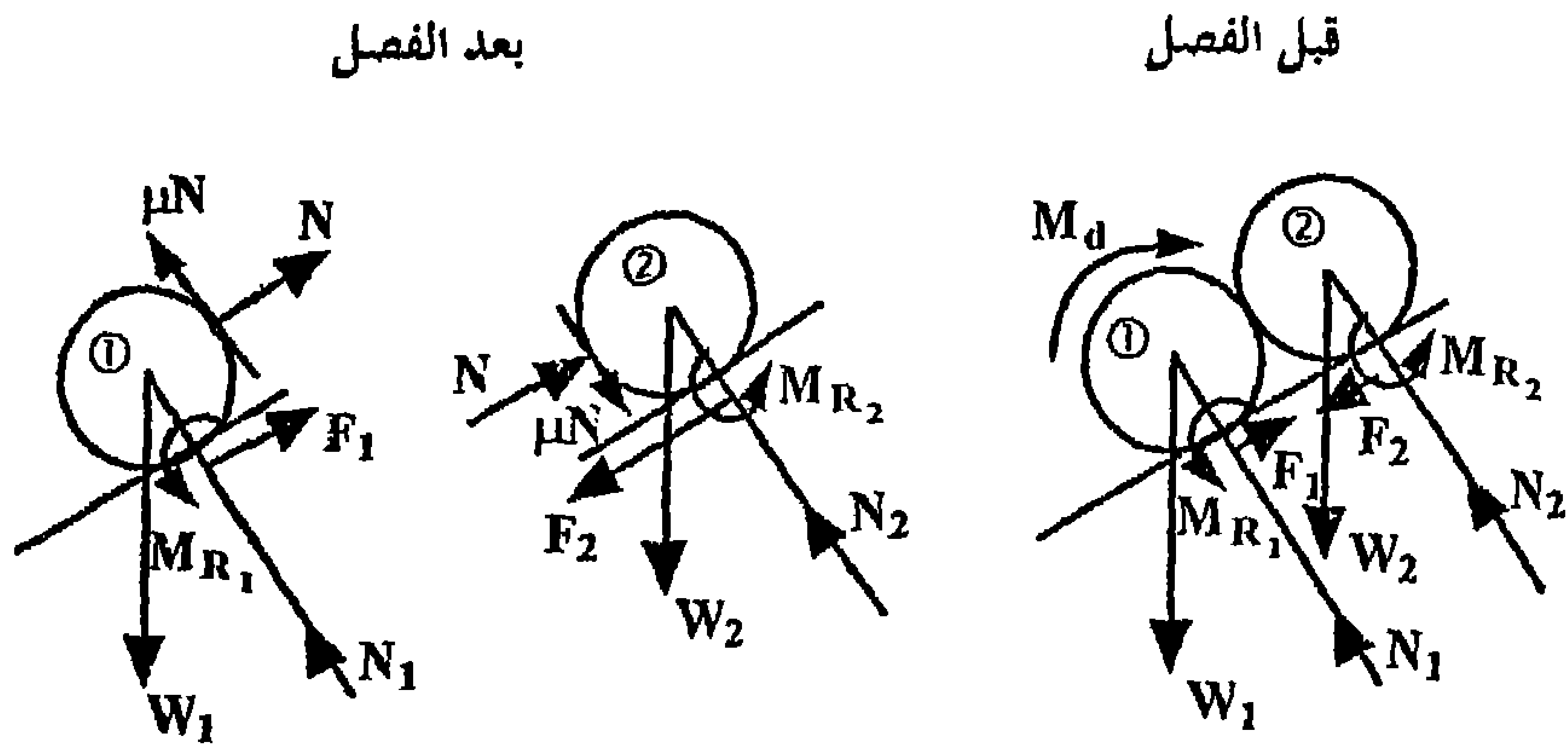
مثال ٢ :



أسطوانتين متماثلتين وزن كل منهما ($W = 500\ N$) و نصف قطر كل منهما ($a = 50\ cm$) وضعت الإسطوانتان كما هو مبين بالشكل على مستوى مائل خشن ($\alpha = 30$) على الأفقي عين عزم

الإدارة (M_d) اللازم لكي تتدحرج الإسطوانتان بانتظام على المستوى علما بأن معامل الأحتكاك الإنزلاقي بين الإسطوانتين يساوي $\frac{1}{4}$ ، و معامل الإحتكاك التدحرج بين الأسطوانتين و الأرض ($a_R = 0.01$ m) .

الحل :



دراسة الأسطوانة ٢

$$\sum M_A = 0$$

$$-N(a) + \mu N(a) + M_{R_2} + W\sin\alpha(a) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\therefore N_2 - \mu N - W\cos\alpha = 0$$

$$M_{R_2} = N_2 \times a_R = (\mu N + W\cos\alpha)a_R \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

بالتعويض من 2 في 1 :

$$\therefore -N(a) + \mu N(a) + W\sin\alpha(a) + (\mu N + W\cos)a_R = 0$$

و للحالة العددية المعطاة نجد أن $N = 346.6$

$\sum M_B = 0$

$$-M_d + N(\acute{a}) + \mu N(a) + W\sin\alpha(a) + M_{R_1} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\sum Y = 0$

$$\therefore N_1'' - W\cos\alpha + \mu n = 0$$

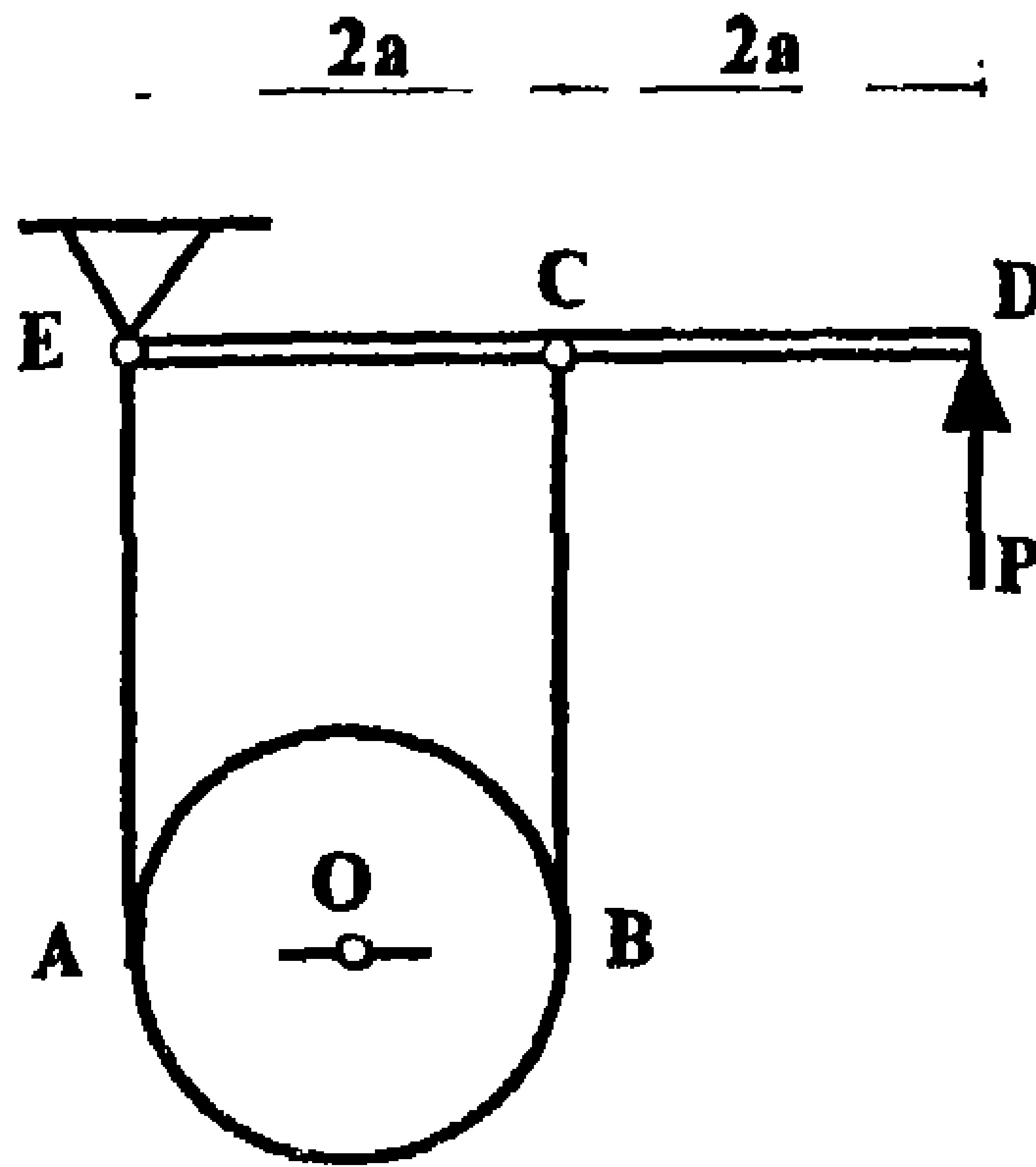
$$M_{R_1} = N_1 \times a_R$$

$$M_{R_1} = (W\cos\alpha - \mu N) \times a_R \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

بالتعويض من 4 في 3 يمكن ايجاد M_d

و المحالة العددية المعطاة نجد أن : $M_d = 345.1 \quad N.m$

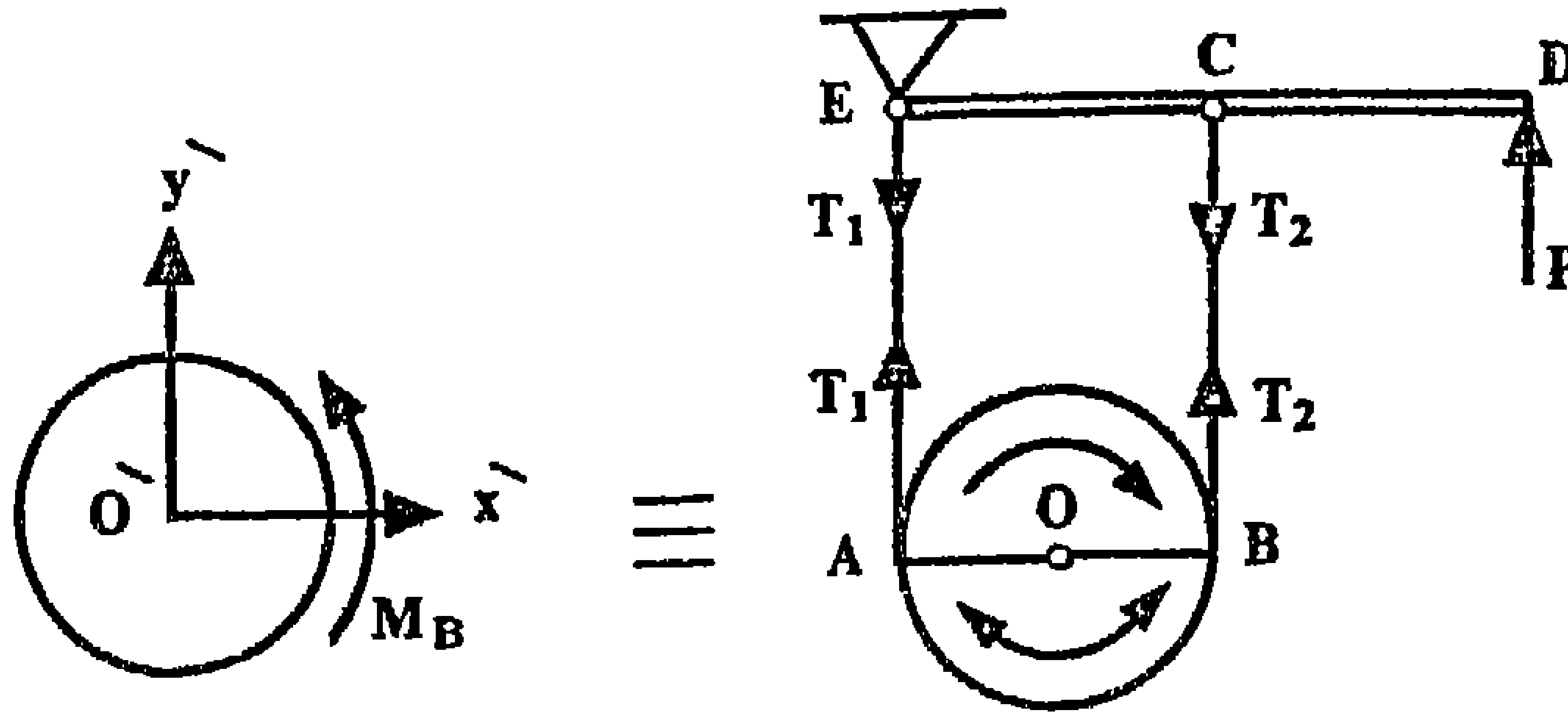
مثال ٣ :



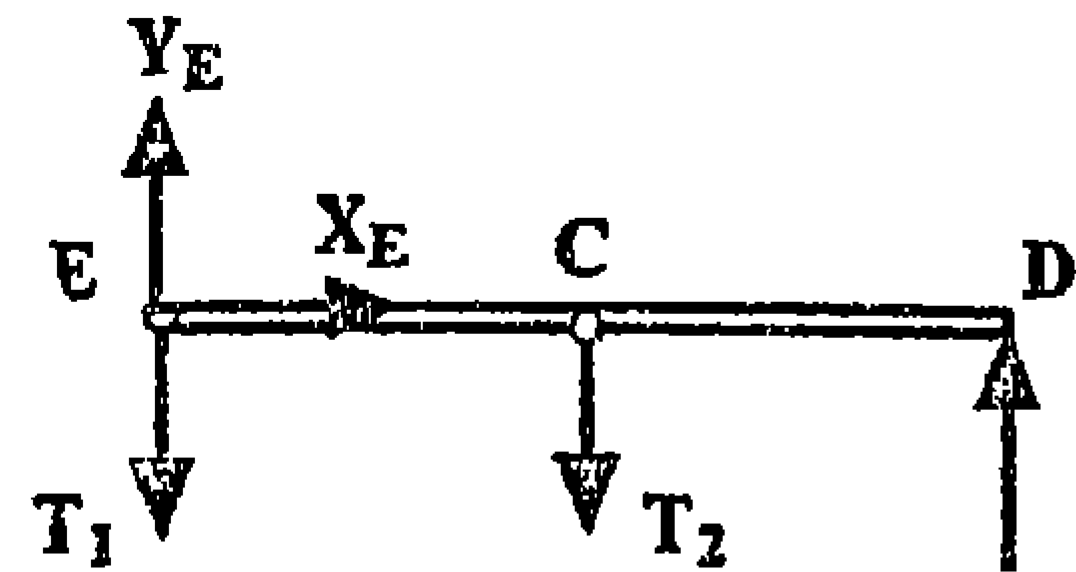
تؤثر قوة P في طرف رافعة ED قابلة للدوران حول مفصل E ، EABC عبارة عن سير ملفوف حول طارة خشبية معامل الإحتكاك بينهما $\mu = 1/2$ بفرض فرملتها ، عين عزم مقاومة دوران الطارة الناشئ من احتكاك السير.

الحل :

الإحتمال الأول : أن الطارة تدور مع عقارب الساعة و عليه فإن BC الطرف الساحب للفرملة ، AE الطرف المسحوب .



دراسة اتزان القضيب :



$$\sum M_L = 0$$
$$-T_2(2a) + P(4a) = 0$$
$$T_2 = 2P$$

و من قانون الحبال

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$$
$$2P = T_1 e^{\frac{1}{2}\pi}$$
$$\therefore T_1 = 2Pe^{-\frac{1}{2}\pi}$$

$$\sum M_{O'} = \sum M_O$$

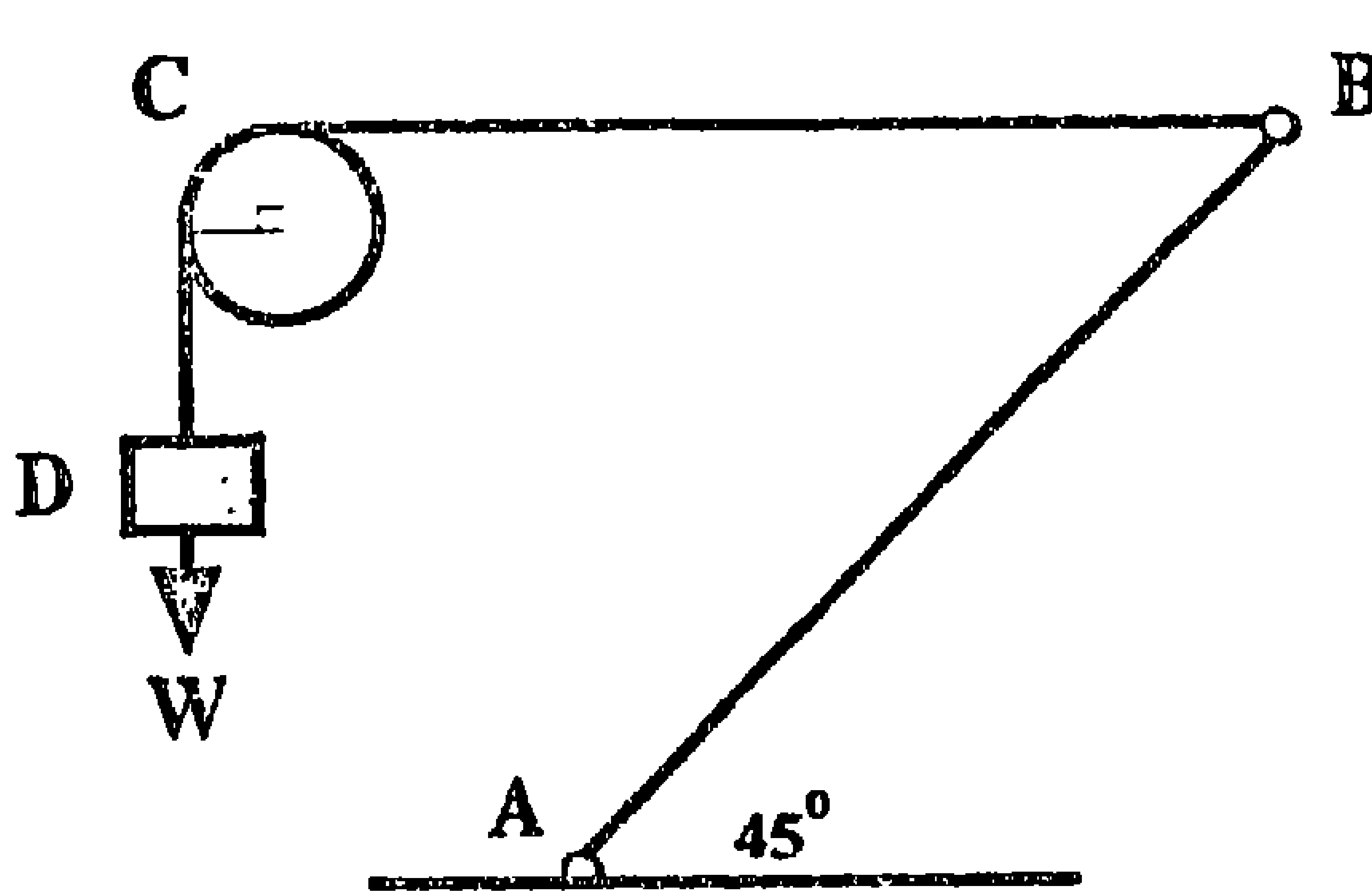
$$M_B = T_2(a) - T_1(a)$$

$$M_B = 2P(a) - 2Pe^{-\frac{1}{2}\pi}(a)$$

$$M'_B = 2Pa\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

الأحتمال الثاني : الطارة تدور ضد عقارب الساعة و عليه فان AE يكون الطرف الساحب ، BC الطرف المسحوب ، و باتباع نفس الخطوات السابقة يمكن تعيين مقدار عزم الفرملة .

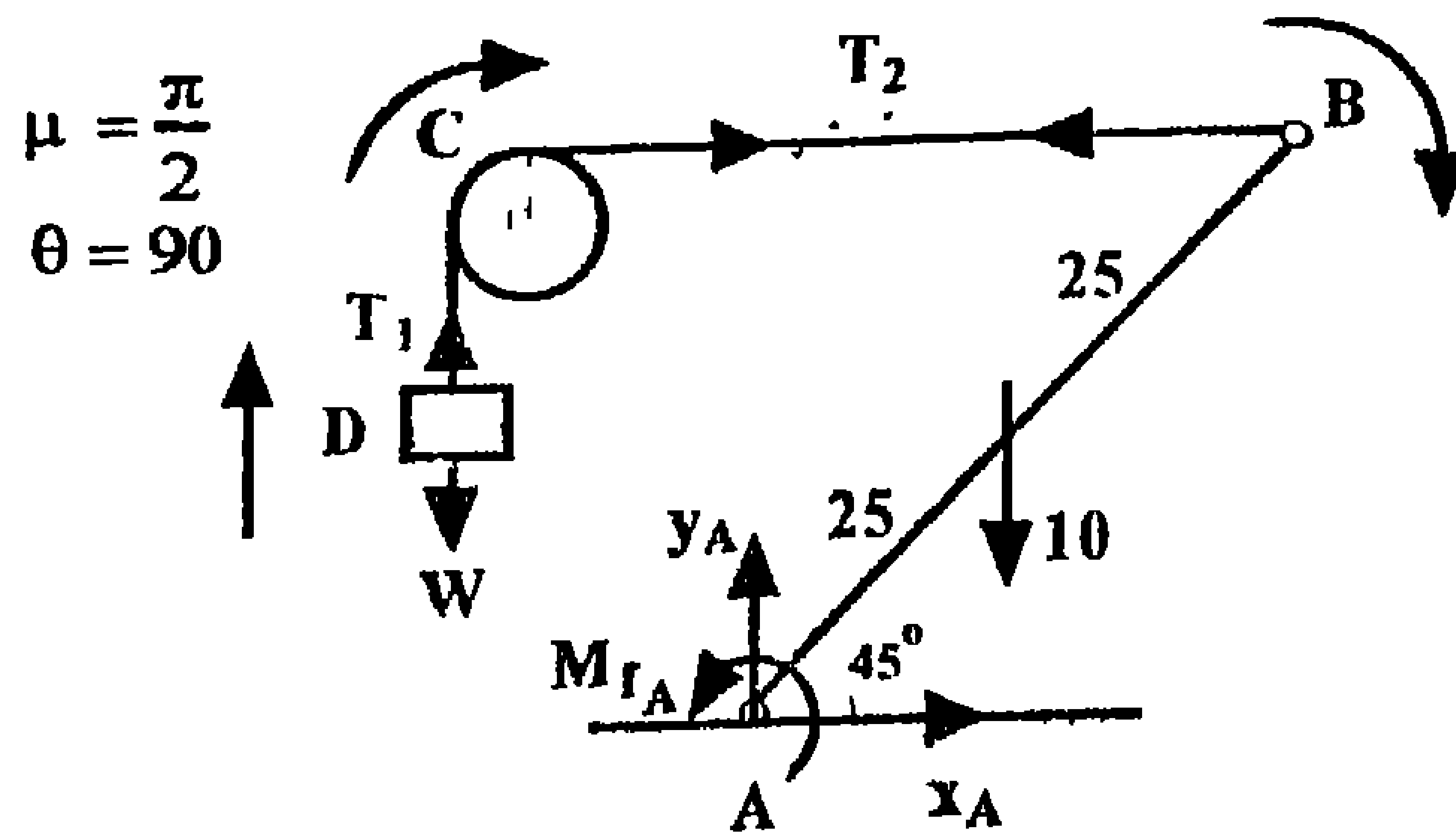
مثال ٤ :



قضيب منتظم AB وزنه N 10 و طوله 50 cm مثبت عند A بمفصل خشن معامل احتكاك المفصل a_f = 0.5 cm و يميل في وضع الاتزان بزاوية ٤٥° مع الأفقي يتصل بالقضيب عند B خيط أفقي يمر على ا طوانة ثابتة خشنة C معامل الإحتكاك عندها μ = 2/π و يتدلى بنهاية الطرف الآخر للخيط وزن W عين القيم الحرجة للوزن W .

الحل :

الحاله الأولى : الوزن يتحرك لأعلى



دراسة اتزان الجسيم D

$\sum Y = 0$

$T_1 - W = 0$ .... (1)

دراسة الحبل " قانون الحبال "

$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} = W e^{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}} = W e$ .... (2)

دراسة اتزان القضيب

$\sum X = 0$

$\therefore x_A - T_2 = 0 \qquad \therefore x_A = T_2 = W e$ .... (3)

$\sum Y = 0$

$y_A - 10 = 0 \qquad \therefore y_A = 10$ .... (4)

$\sum M_A = 0$

$M_{f_A} - 10\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) + T_2\left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right) = 0$ .... (5)

$M_{f_A} = R_A a_f = \frac{1}{2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(We)^2 + (10)^2}$

بالتعويض في 5 ينتج

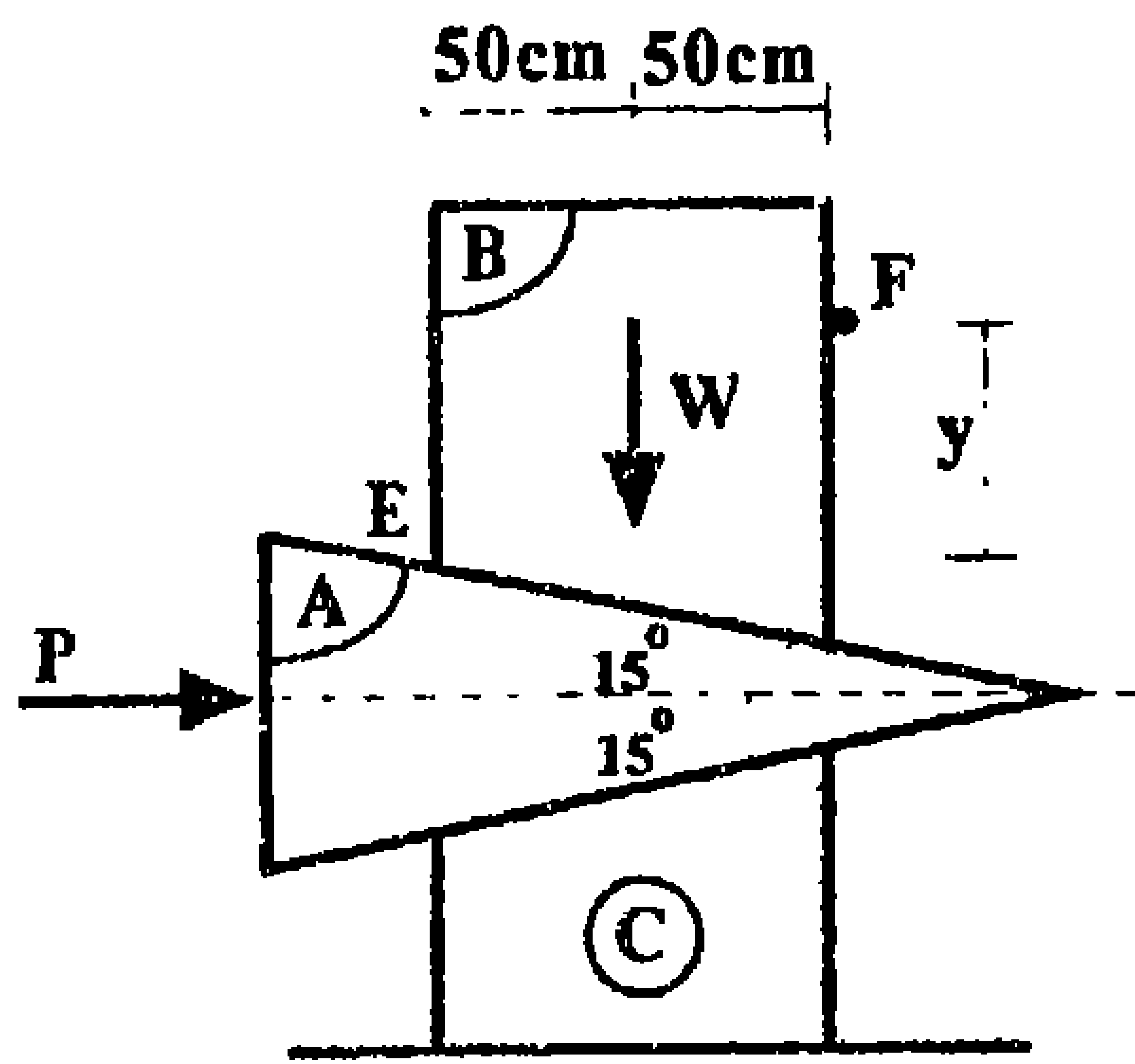
$$\frac{1}{2}\sqrt{(We)^2+(10)^2}-10\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)+W_e\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$$W_e=4.8765\ \ N$$

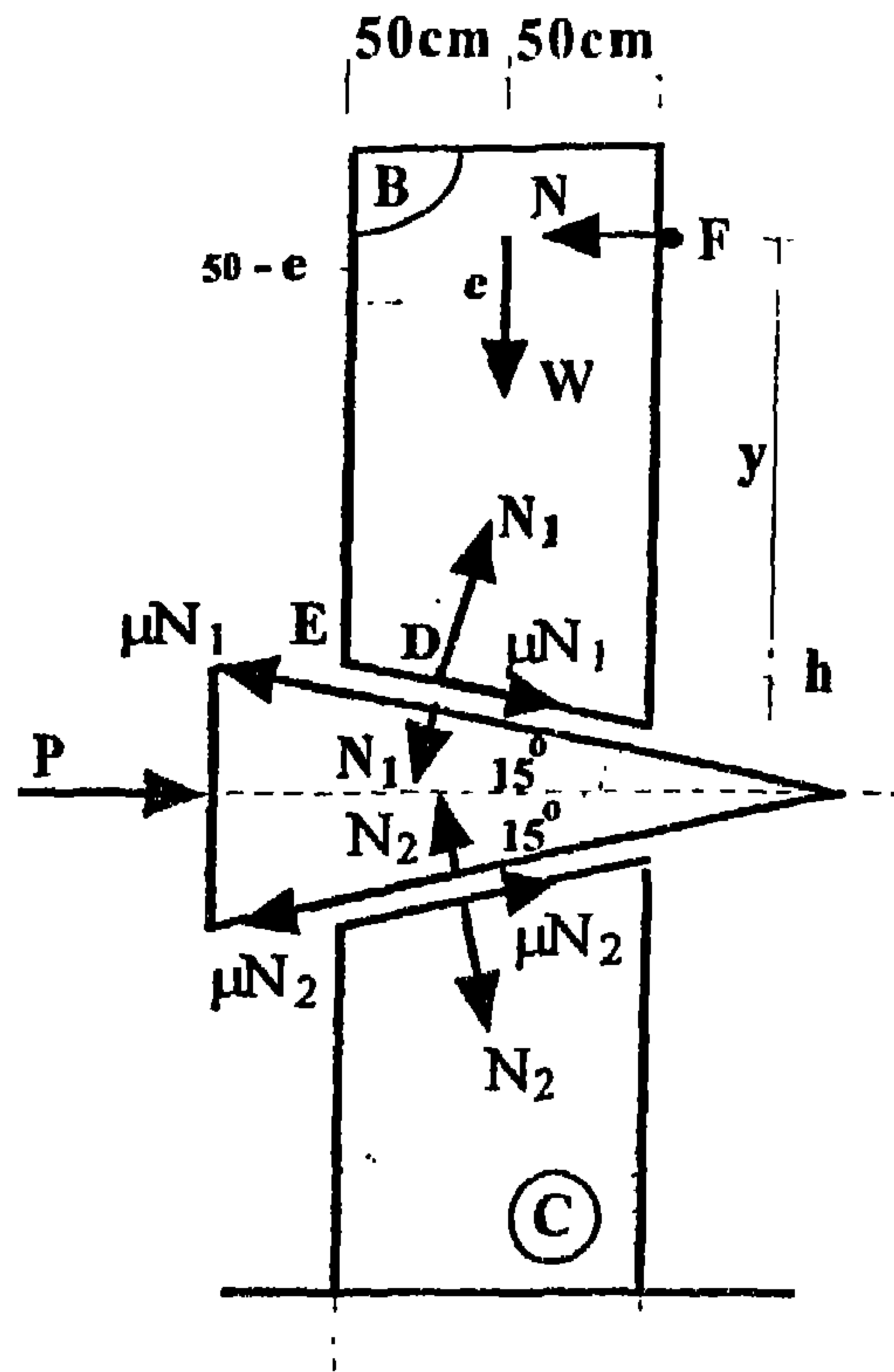
الحالة الثانية : بدراسة اتزان الجسيم ثم دراسة اتزان الخيط ثم دراسة اتزان القضيب يمكن تعيين القيم الأخرى لـ W .

مثال ٥ :

يراد رفع كتلة B وزنها W بواسطة اسفين A على شكل منشور مثلثي خشن زاوية رأسه ٣٠° و زاوية احتكاكه تساوي ١٥ ينزلق بين كتلة C مثبتة في الأرض و بين الكتلة B المرتكزة على وتد أملس عند F . عين أكبر بعد y للوتد حتى لا تنقلب الكتلة B و عين قيمة P بدلالة الوزن W .



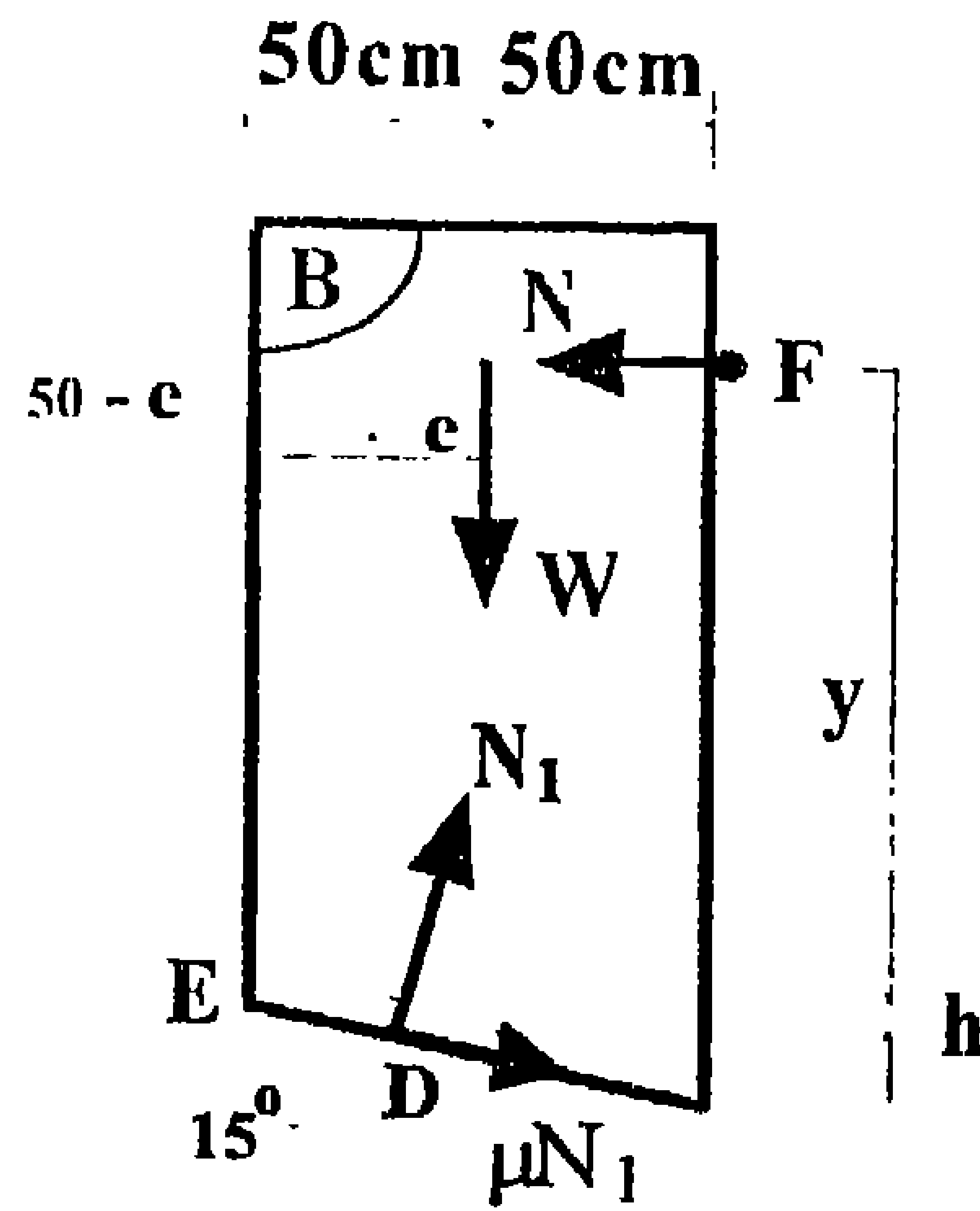
الحل :



$\mu = \tan\lambda = \tan 15^{\circ}$

$\frac{h}{50 - e} = \tan 15^{\circ}$

$\therefore h = (50 - e)\tan 15^{\circ}$



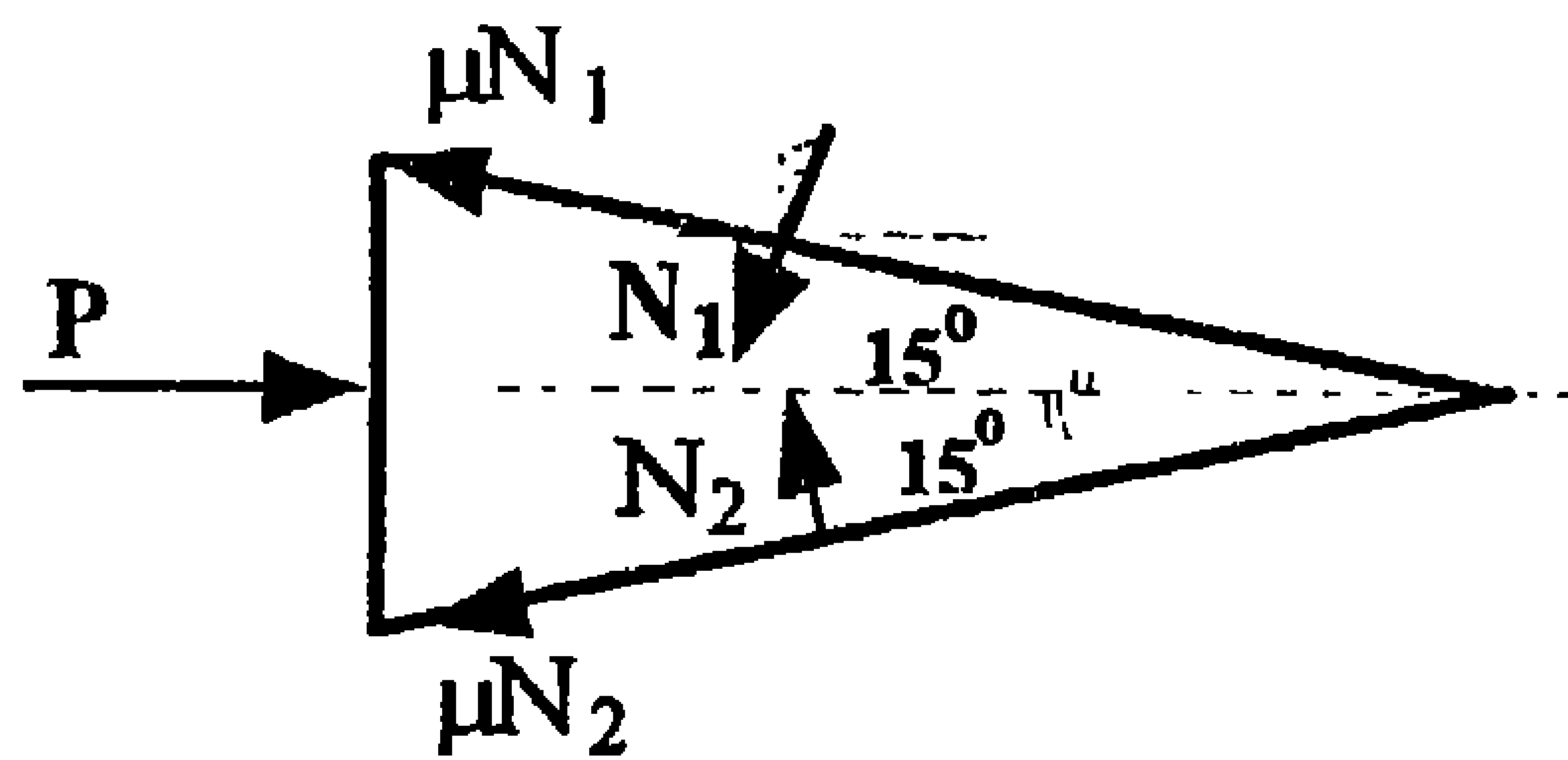
اتزان الكتلة B :

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$\therefore N_1 \cos 15^\circ - \mu N_1 \sin 15^\circ - W = 0$$

$$\therefore N_1 = \frac{W}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} \quad \text{...} \quad (1)$$

$$= 1.1154\,W$$



$\because \sum X = 0$

$\therefore N - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_1 \cos 15^\circ = 0$

$$\therefore N = \frac{W\left(\sin 15^\circ + \mu \cos 15^\circ\right)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = 0.5774\,W$$

$\therefore \sum M_D = 0$

$\therefore N\left(y + h\right) = We$

$0.5774\,W\left(Y + 13.3975 - 0.2679\,e\right) = We$

$$\therefore \frac{W\left(\sin 15^\circ - \mu \cos 15^\circ\right)\left(y(50 - e)\tan 15^\circ\right)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = We$$

$$\frac{0.5774y + 7.7357}{1.1547} = e$$

$\because \mu = \tan 15^\circ$

$$\therefore e = \frac{2\left(y + 50\tan 15^\circ\right)\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ \tan 15^\circ} \quad \text{.......................................} \quad (3)$$

$e = 0.5Y + 6.7$

و لتفادي الانقلاب حول E يجب ان تكون :

$e < 50\text{cm}$ .... (4)

$0.5y + 6.7 < 50$

$y < 86.6$

و بالتعويض من (3) في (4)

$\therefore y < 25\left(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ\right)$

$\therefore y < 87\ \text{cm}$ .... (5)

و لايجاد مقدار القوه p :

من اتزان الأسفين A :

$\because \sum Y = 0$

$$\therefore \mu N_1 \sin 15^\circ - N_1 \cos 15^\circ + N_2 \cos 15^\circ - \mu N_2 \sin 15^\circ = 0$$

$$\therefore N_1 = N_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

$\because \sum X = 0$

$$\therefore P = \mu N_1 \cos 15^\circ - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_2 \cos 15^\circ - N_2 \sin 15^\circ = 0 \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

و بالتعويض من (1) ، (6) في (7) مع مراعاة أن $\mu = \tan 15$

$$\therefore P = 2N_1 \sin 15^\circ + 2\mu N_1 \cos 15^\circ$$

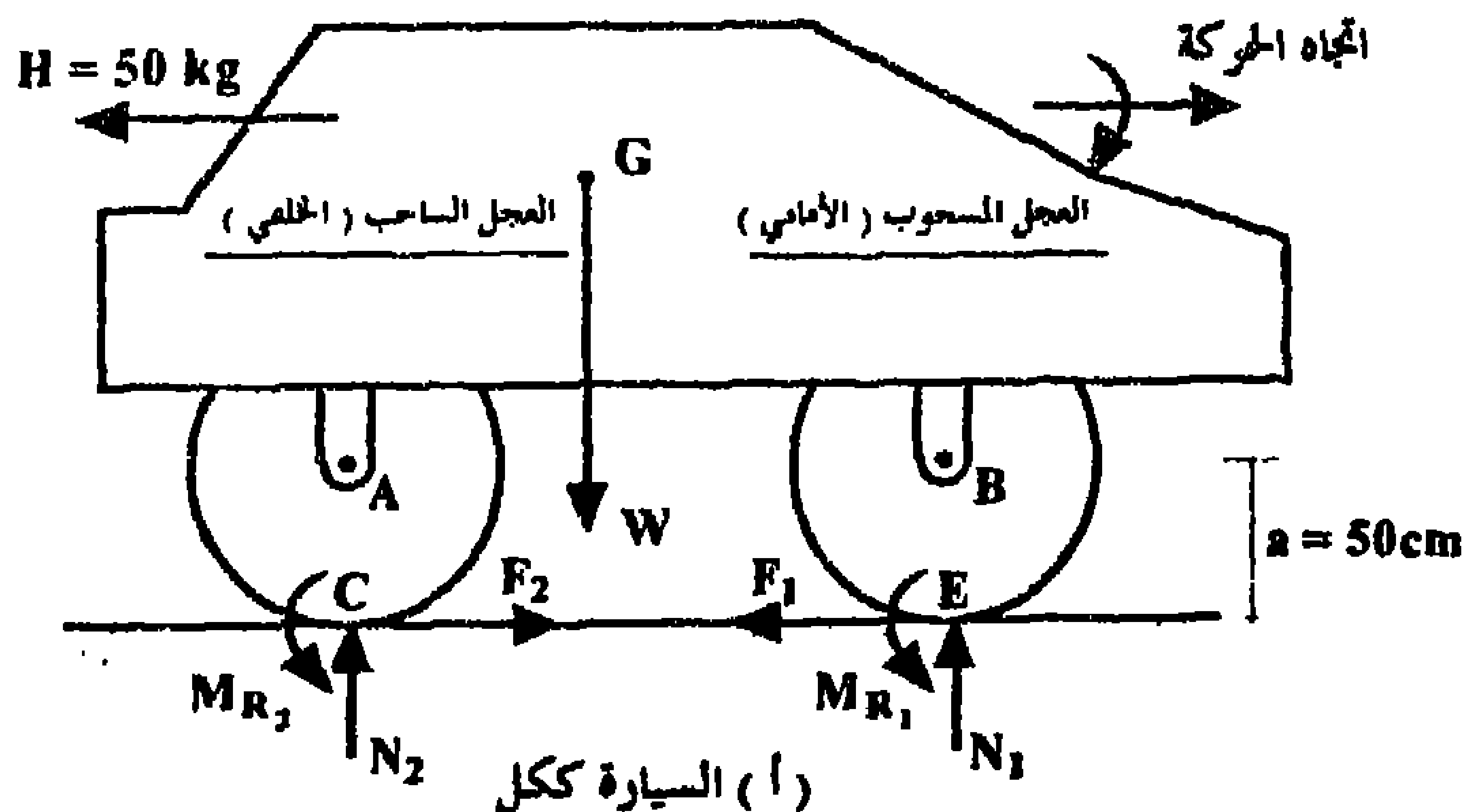
$$P = \frac{2W \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ \tan 15^\circ}$$

$$\therefore P = 1.15 \ W$$

مثال ٦ :

سيارة وزنها الكلي 1000 kg و وزن كل من عجلاتها الأربع 25 kg و نصف قطر كل منها 50 cm . فإذا كان مقاومة التدحرج لكل عجلة يساوي نصف قطر دائرة احتكاك محورها يساوي 0.05 cm . عين عزم الادارة اللازم لتحريك السيارة بسرعة منتظمة على ارض أفقية خشنة ضد مقاومة هواء قدرها 50 kg .

الحل :

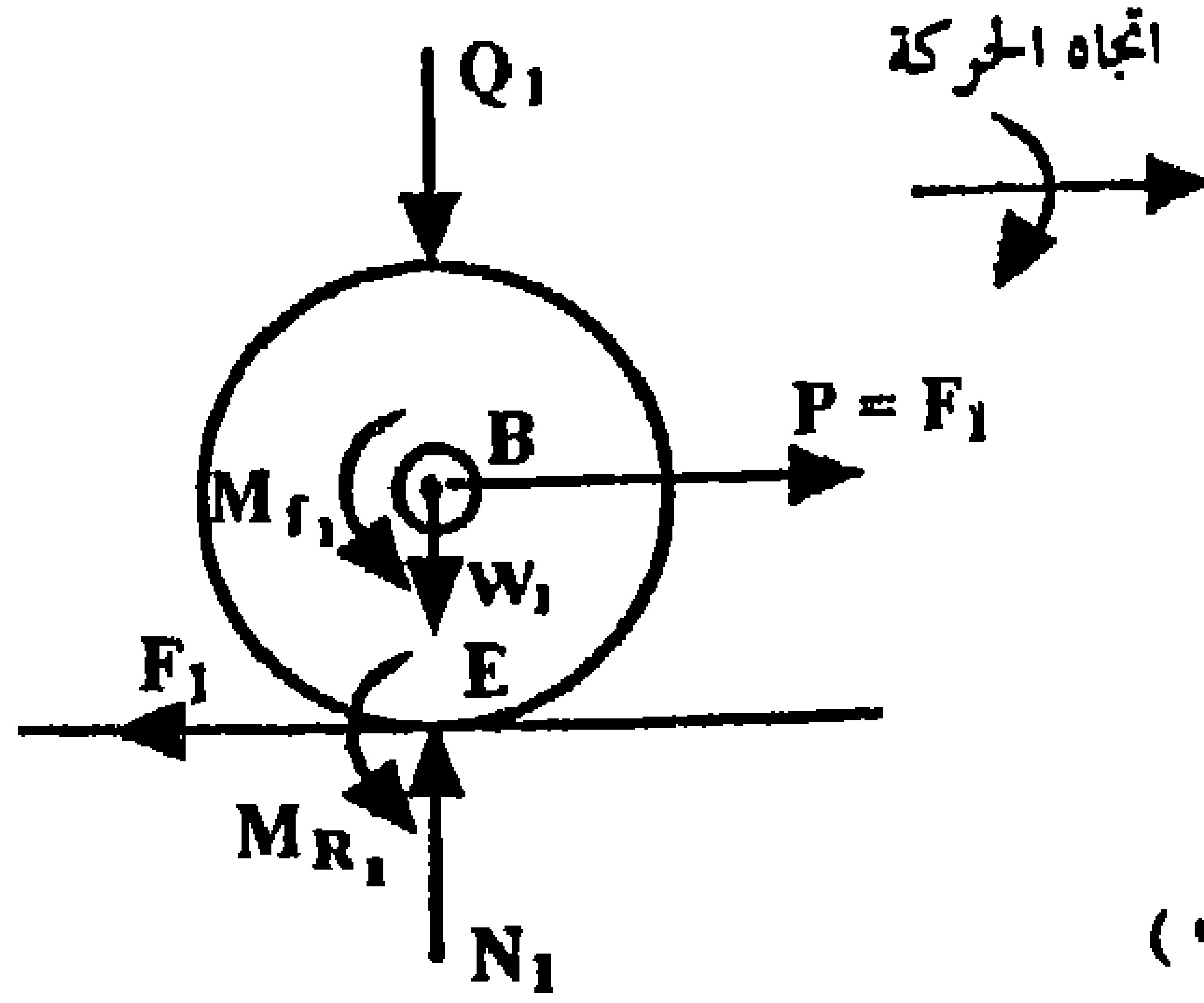


(أ) السيارة ككل

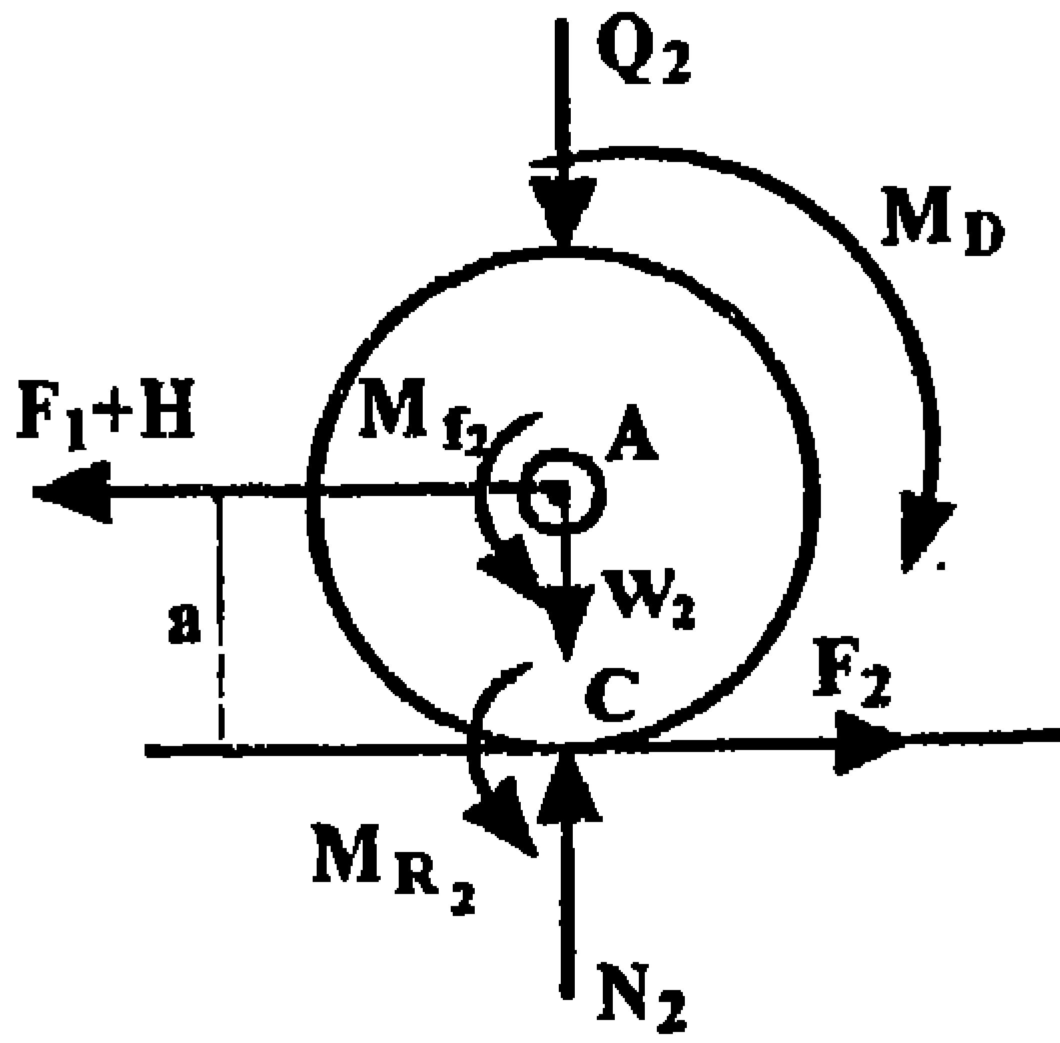
W = وزن السيارة كلها = 1000 kg .

W_1 = وزن العجلتين الأماميتين = 50 kg .

W_2 = وزن العجلتين الخلفيتين = 50 kg .



(ب) العجل الأمامي (المسحوب)



(جـ) العجل الخلفي (الساحب)

H = مقاومة الهواء = 50 kg .

a = نصف قطر العجلة = 50 cm .

a_r = ذراع مقاومة التدحرج = 0.05 cm .

r_f = نصف قطر دائرة الإحتكاك = 0.05 cm .

Q_1 = الحمل الواقع على العجل الأمامي فقط .

Q_2 = الحمل الواقع على العجل الخلفي فقط .

من اتزان السيارة ككل (شكل أ):

$$\sum Y = 0 \qquad N_1 + N_2 = W \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\sum X = 0 \qquad F_2 = F_1 + H. \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

من اتزان العجل الأمامي (المسحوب) شكل (ب) :

$$\sum Y = 0 \qquad \therefore N_1 = Q_1 + W_1$$

$$\therefore Q_1 = N_1 - W_1$$

$$\therefore M_{f1} = Q_1 \cdot r_f = (N_F - W_1) r_f$$

$$M_{R1} = N_1 a_r$$

$$\sum M_a = 0$$

$$\therefore F_1 a = M_a + M_{R1}$$

$$\therefore F_1 a = (N_1 - W_1) r_f + N_1 a_r \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

من اتزان العجل الخلفي (المساحب) شكل (جـ) :

$$\sum Y = 0 \qquad \therefore N_2 = Q_2 + W_2$$

$$\therefore Q_2 = (N_2 - W_2)$$

$$\therefore M_{f2} = Q_2 r_f = (N_2 - W_2) r_f$$

$$M_{R2} = N_2 a_r$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\therefore M_D = M_{f2} + M_{R2} + F_2 a$$

$$\therefore M_D = (N_2 - W_2) r_f + N_2 a_r + F_2 a \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

وبالتعويض من (2) ، (3) في (4) :

$$\therefore M_D = (N_2 + W_2) r_f + N_2 a_r + (N_1 - W_1) r_f + N_1 a_r + Ha$$

$$M_D = (N_1 + N_2) a_r + (N_1 + N_2 - W_1 - W_2) r_f + Ha \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

ومن التعويض من (1) في (5) :

$$\therefore M_D = Wa_r + (W - W_1 - W_2)r_f + Ha \quad \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

و للحالة العددية المعطاة :

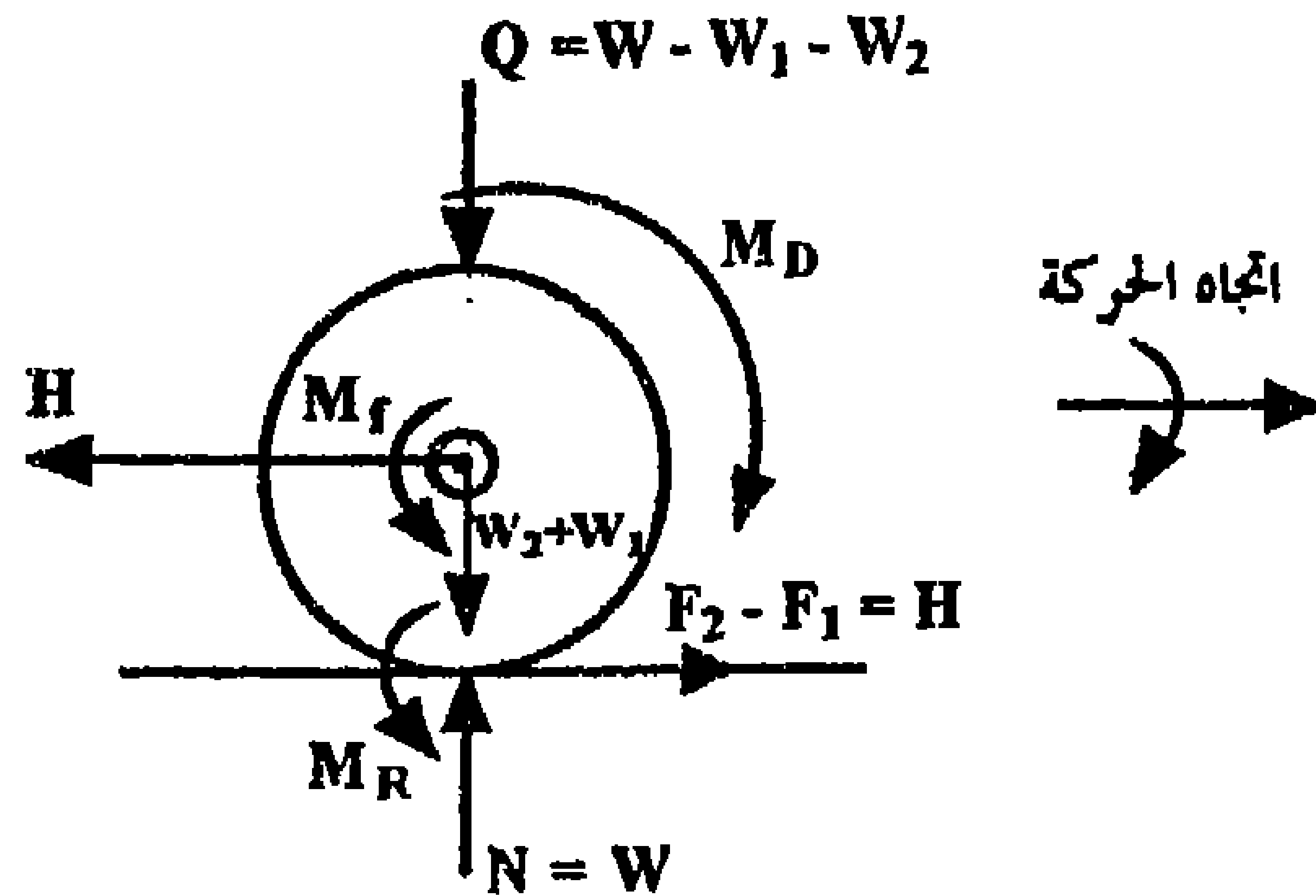
$$\therefore M_D = 1000 \times \frac{5}{100} + (1000 - 50 - 50) \times \frac{5}{100} + 50 \times 50$$

$$\therefore M_D = 2595 \ \text{kg} \cdot \text{cm}$$

ملاحظة :

المعادلة (6) التي تعطي مقدار عزم الإدارة M_d اللازم للعجل الساحب يمكن الحصول عليها فيما لو اعتبرنا جميع العجلات عجلة واحدة ساحبة وزنها هو وزن العجلات الأربع) $(W_1 + W_2$ و الحمل الواقع عليها Q هو الوزن للسيارة دون العجلات($W - W_1 - W_2$) و يؤثر عند مركزها مقاومة الهواء H كما هو مبين بشكل (د) . و من هذا الشكل يتضح :

$$M_f = Qr_f = (W - W_1 - W_2)r_f \qquad ; \qquad M_R = Na_r = Wa_r$$



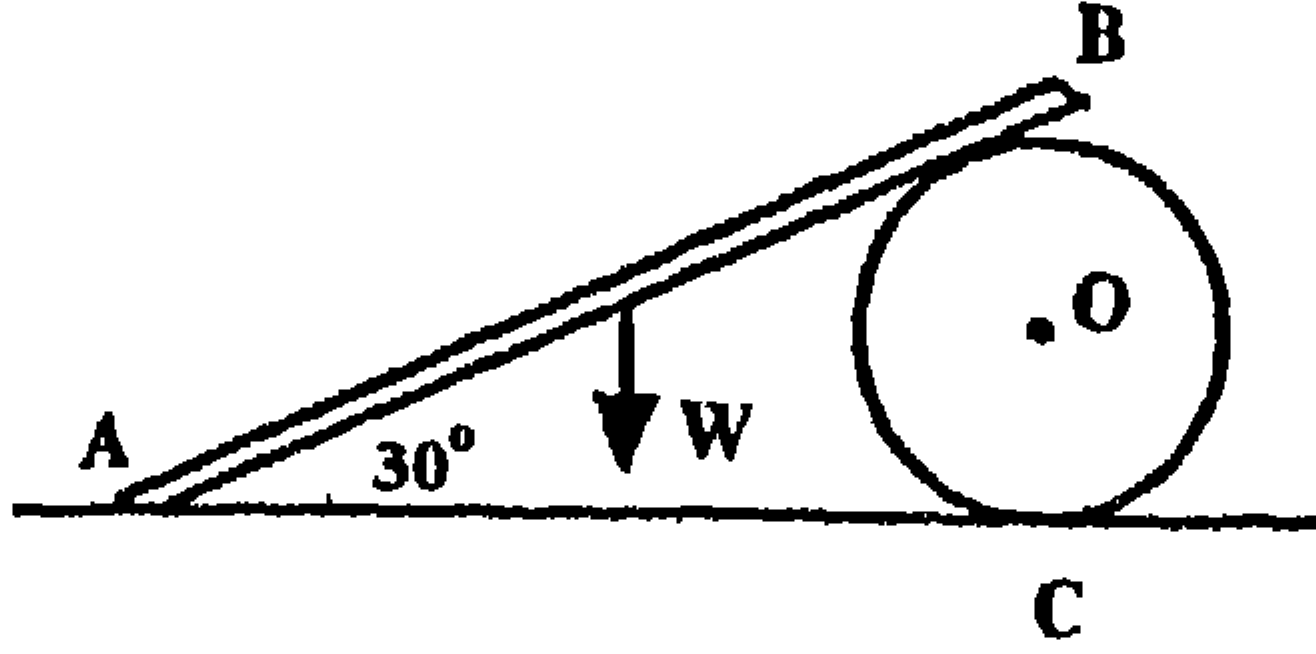
$$\sum M_O = 0$$

$$\therefore M_D = M_R + M_f + H \cdot a = Wa_r + (W - W_1 - W_2)r_f + H \cdot a$$

و هي نفس المعادلة (6) .

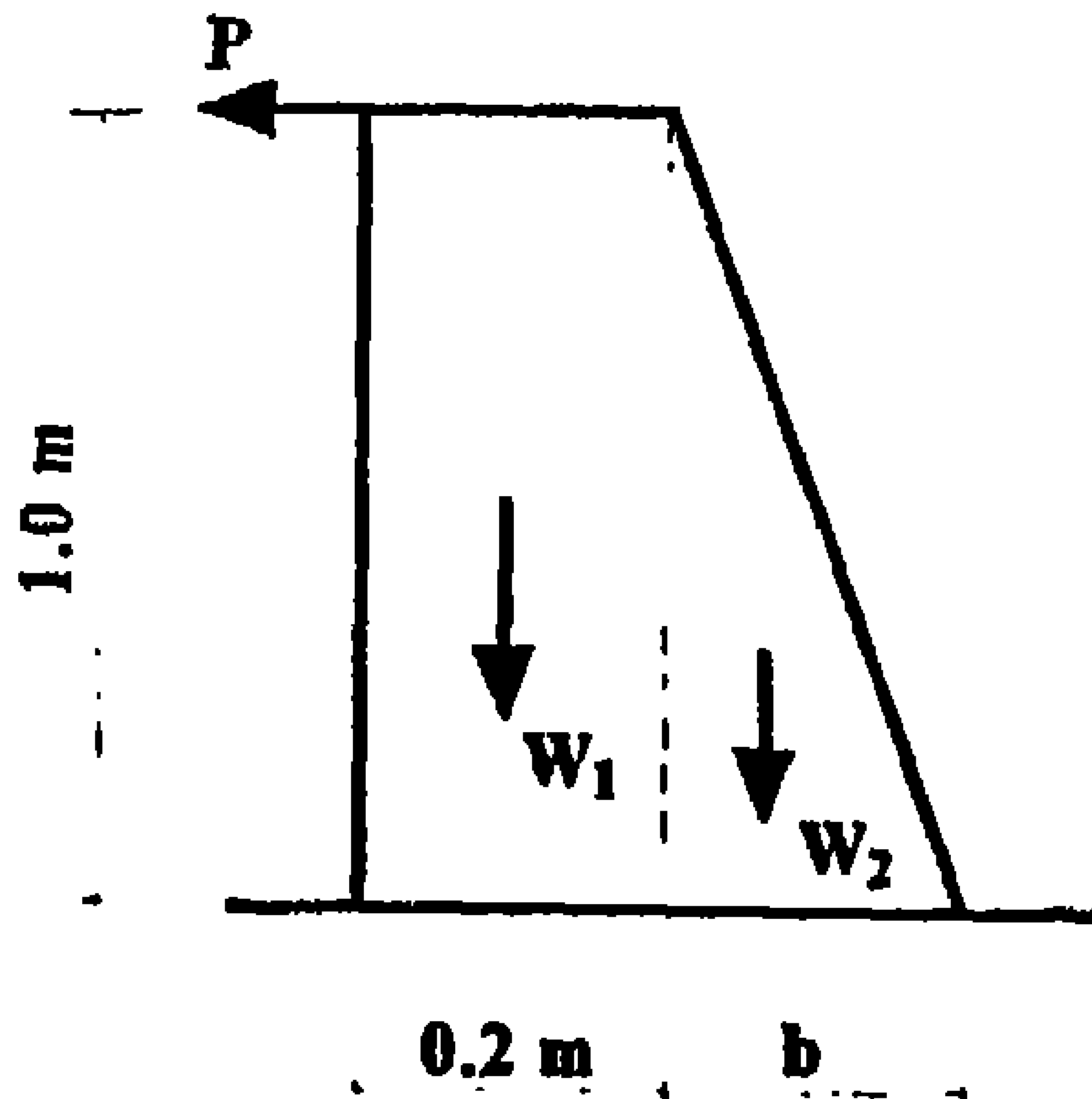
تمارين

١ – قضيب AB وزنه W يرتكز في وضع اتزان حرج على أرض خشنة و على اسطوانة خفيفة مساوية لها في الخشونة و نصف قطرها a . اثبت أن زاوية الإحتكاك = ١٥° و عين طول القضيب . أحسب رد فعل الأرض في C .



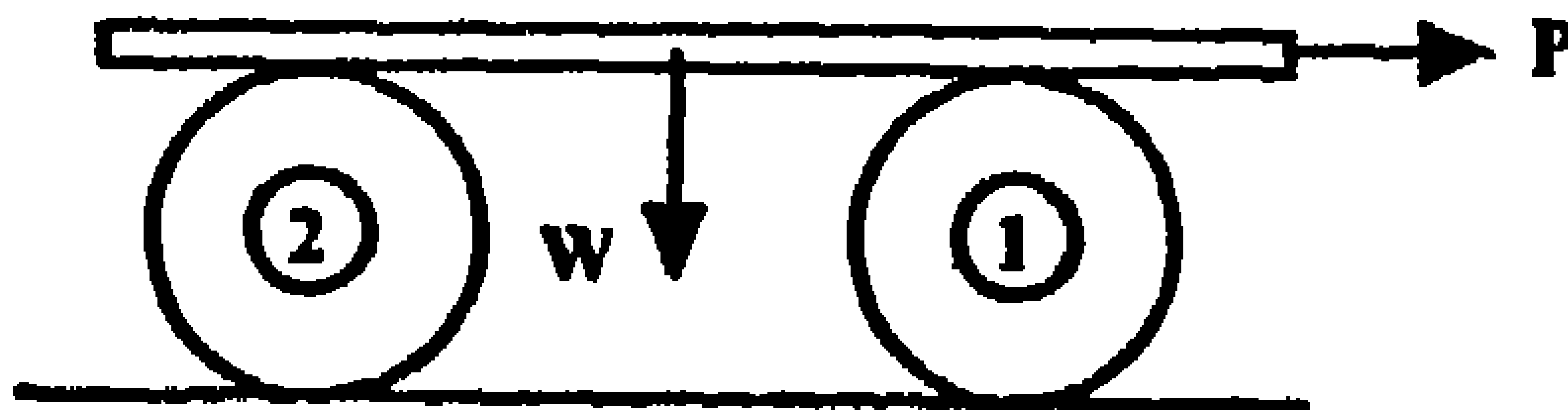
الجواب : $l = 4.32\,a\,,\ R_D = R_C = 0.52\,W$

٢ – منشور ثقيل متجانس مقطعه شبه منحرف بعده العمودي على الورقة متر موضوع فوق أرض أفقية خشنة ($\mu = 1/3$) كما في الشكل عين أقل قيمة للبعد لو اثرت قوة أفقية كافية P على المنشور لانزلق دون أن ينقلب .



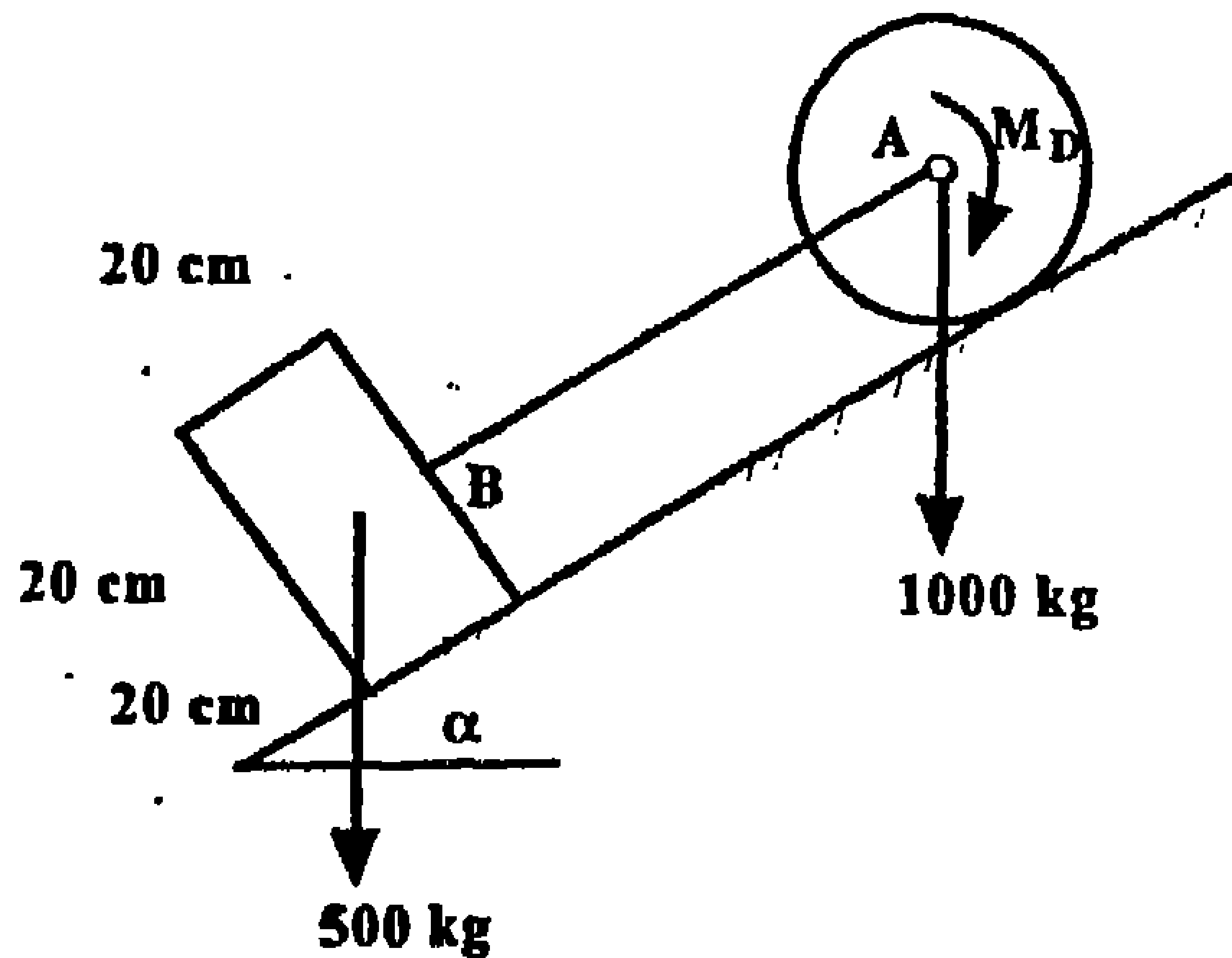
الجواب : $b = 0.764\ m$

٣ – لوح ثقيل وزنه W موضوع فوق اسطوانتين خشنتين مهملتين الوزن كما في الشكل ذراع مقاومة التدحرج بين

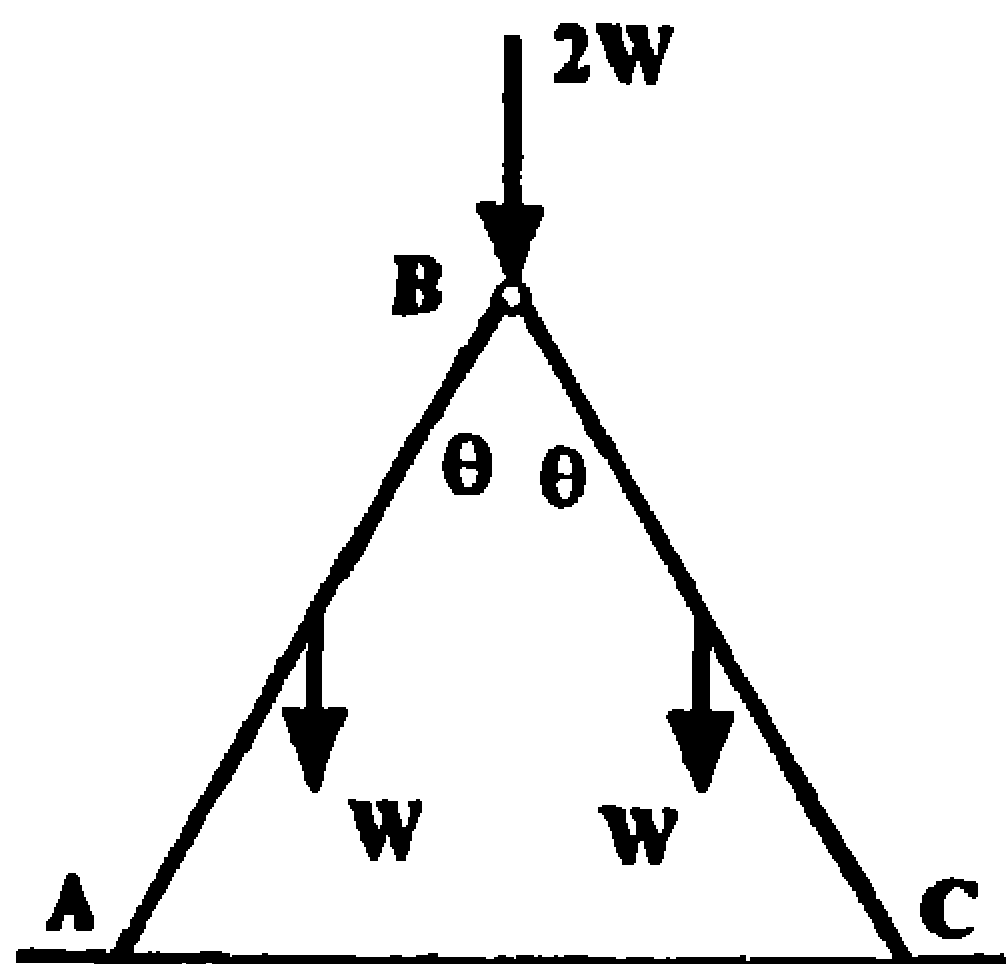


الإسطوانتين و اللوح a_2 و بين الاسطوانتين و الأرض $\overline{a_2}$ و نصف قطر كلاً من الإسطوانتين a و المطلوب تعيين أقل قوة P تكفي لسحب اللوح .

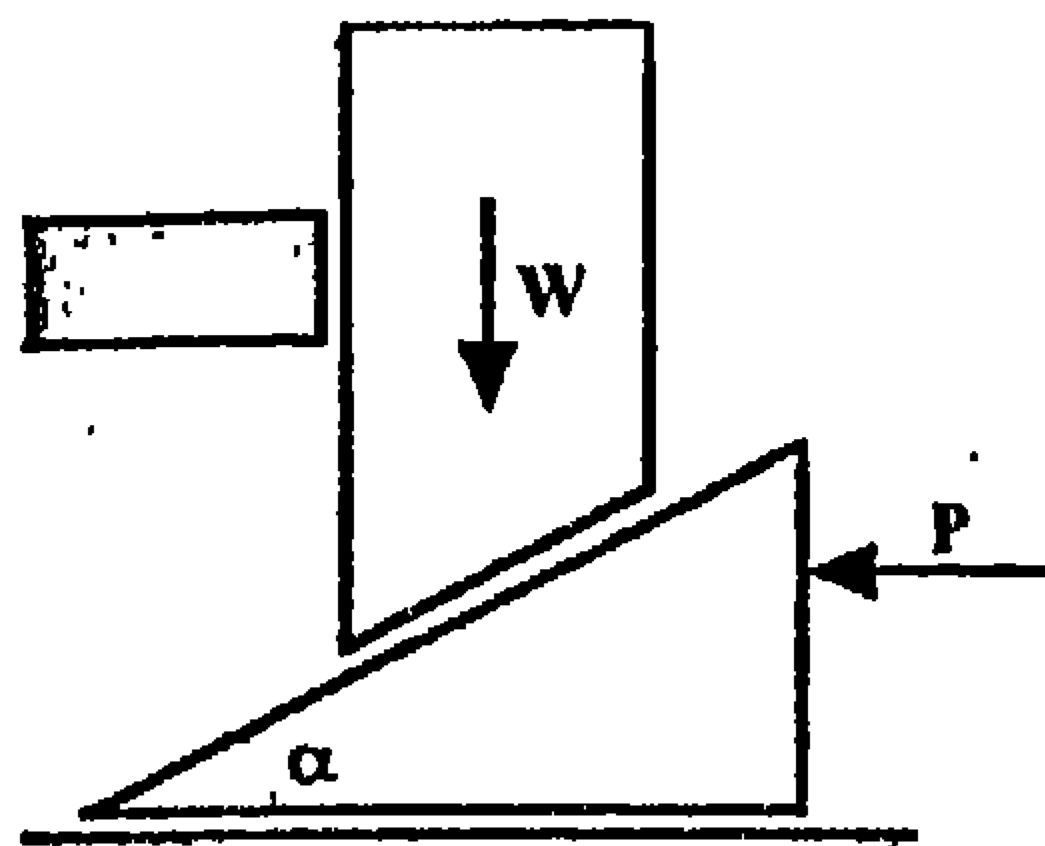
٤ – تتدحرج عجلة نصف قطرها 20 cm ووزنها 1000 kg أعلى مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاويه α حيث tan α = 0.1 . و يرتبط مركز العجلة A بمنتصف كتلة خشبية مستطيلة المقطع عند B (وزن الكتلة 500 kg)بواسطة خيط AB . فإذا كانت العجلة تتدحرج تحت تأثير عزم إدارة M_D و نصف قطر دائرة احتكاك محورهاA يساوي ذراع مقاومة التدحرج لها = 0.05 cm . عين أقل و أكبر قيمة لمعامل احتكاك المستوى الخشن حتى لا تنزلق العجلة و لا تنقلب الكتلة الخشبية . و اذا اتخذ معامل الإحتكاك قيمة متوسطة عين عزم الإدارة اللازم لتحريك المجموعة حركة منتظمة على المستوى .



٥ – لوحان منتظمان طول كل منهما 2a يرتبطان مفصليا في B و يرتكزان في C.A على أرض خشنة معامل احتكاكها 1/2 . عين زاوية الميل θ لكل من اللوحين على الرأسي عند وشك الانزلاق . اذا كان هناك احتكاك مفصلي في B يساوي $\frac{Wa}{4}$ أوجد θ في هذه الحالة عند وشك الانزلاق أيضاً .



٦ – تؤثر قوة أفقية P على منشـور ثلاثي زاويته α (tan α = 1/3) لترفع وزنا W كما في الشكل أوجد P بدلالة W في كل من الحالات الآتية :



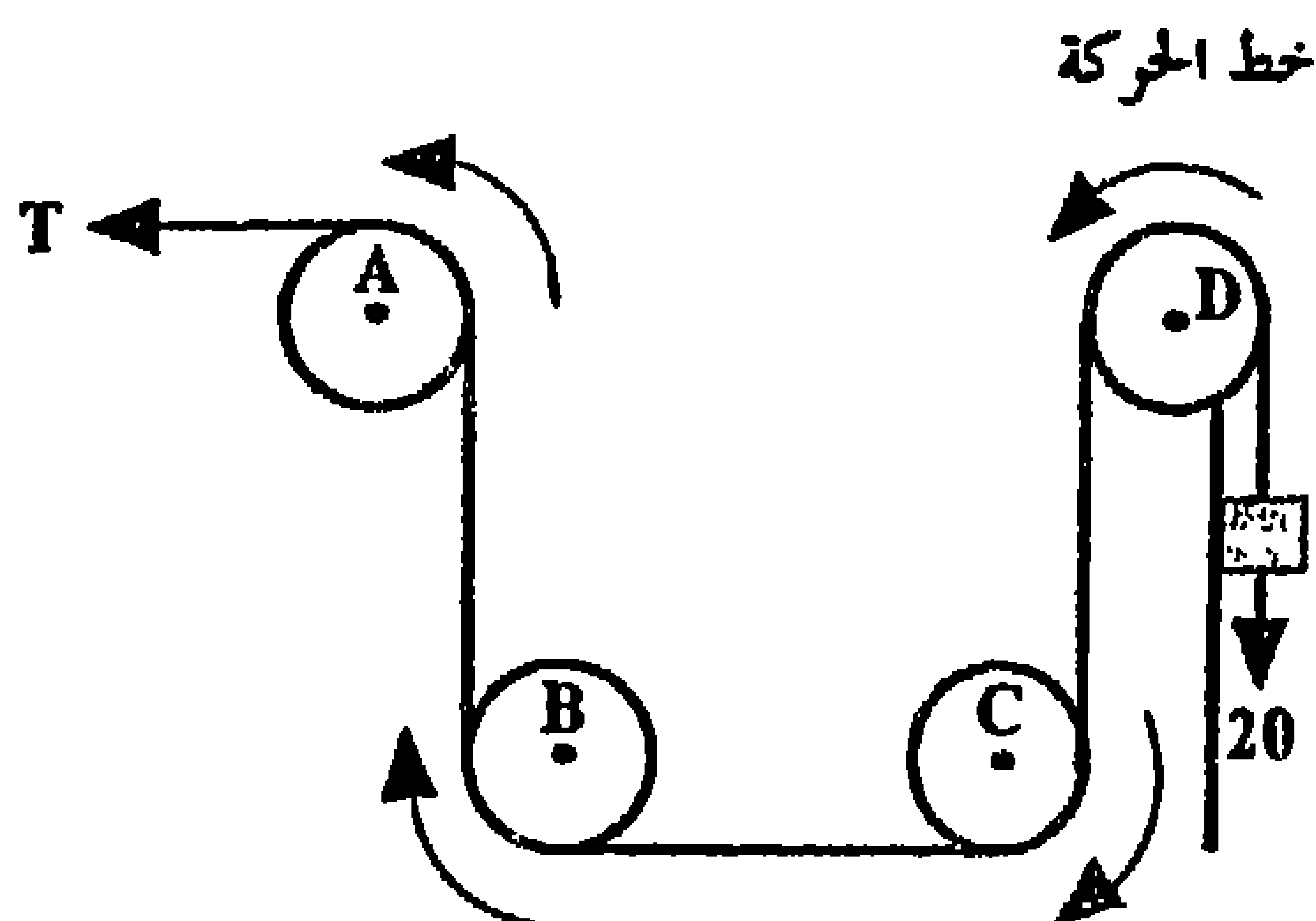
أ – جميع مواضع التلامس ملساء .

ب – جانبا المنشور خشنان بمعامل احتكاك قدره ٠،٢ .

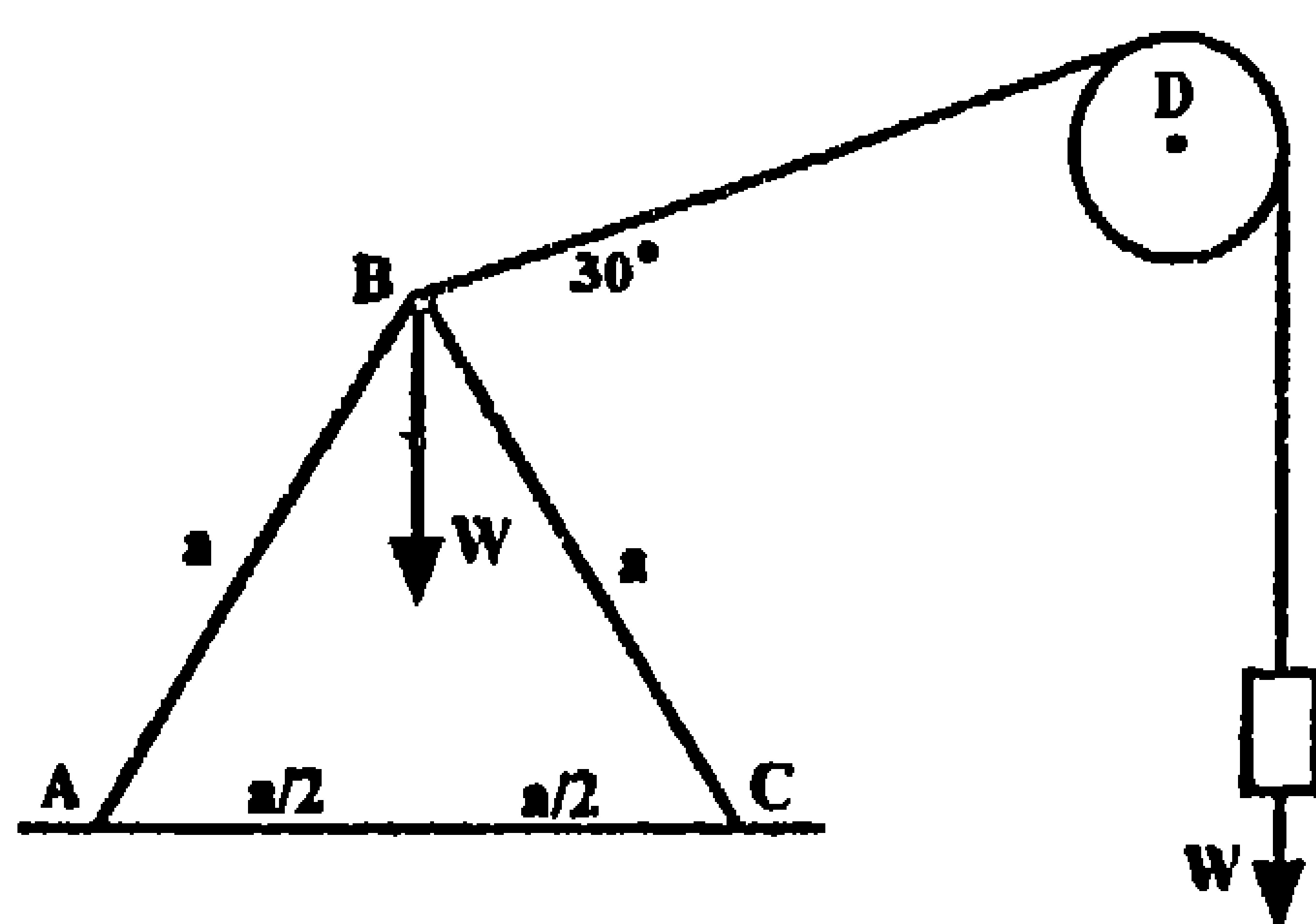
و إذا أزيلت P في الحالة الثانية هل ينزلق المنشور الى الخارج .

الجواب : أ – P = W/3 ، ب – P = 0.57 ، المنشور لاينزلق .

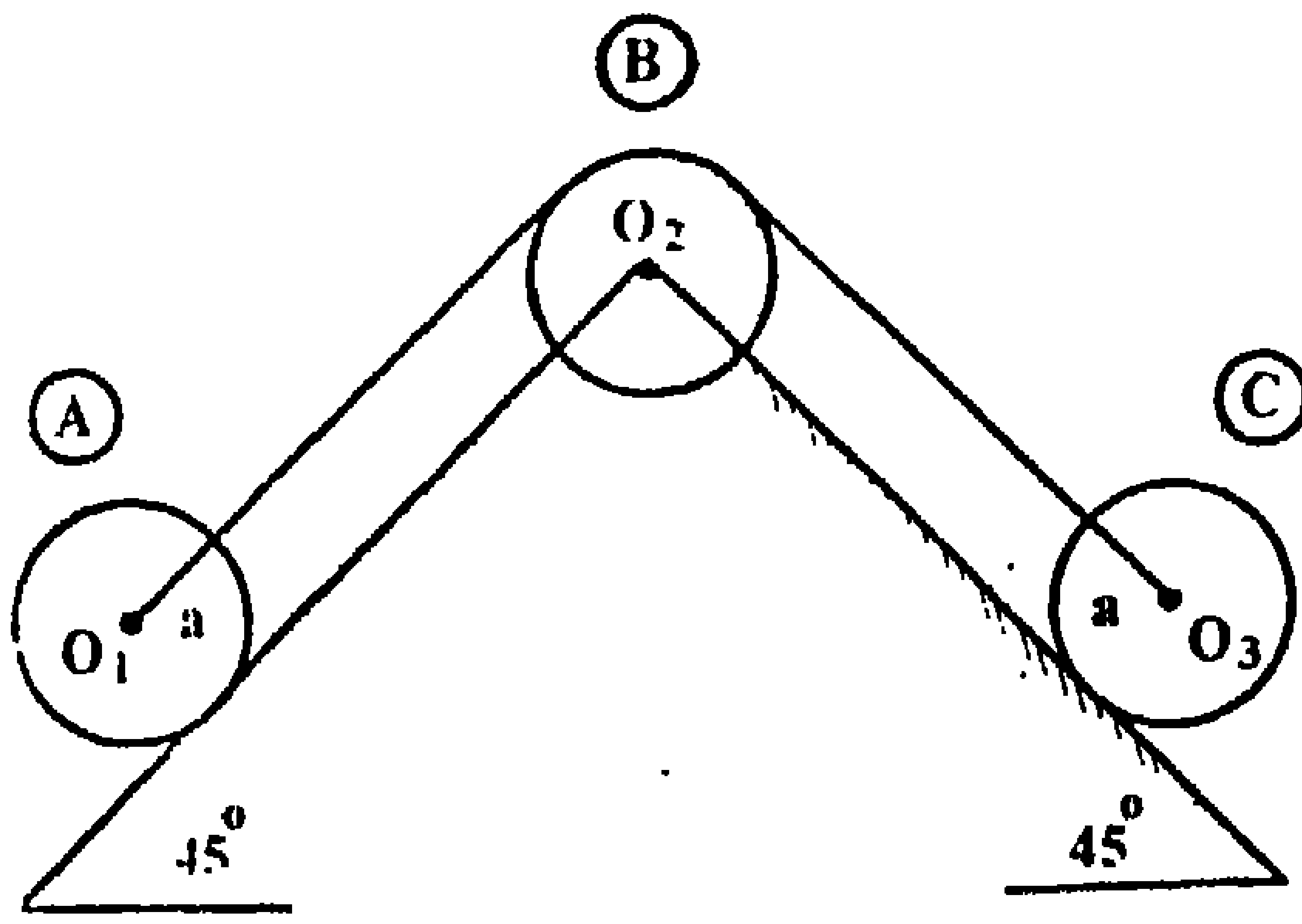
٧ – عين قيمة الشد للتركيبة المبينة بالشكل اذا علمت أن معامل الإحتكاك بين الإسطوانات و الحبل $\mu = \frac{1}{\pi}$.



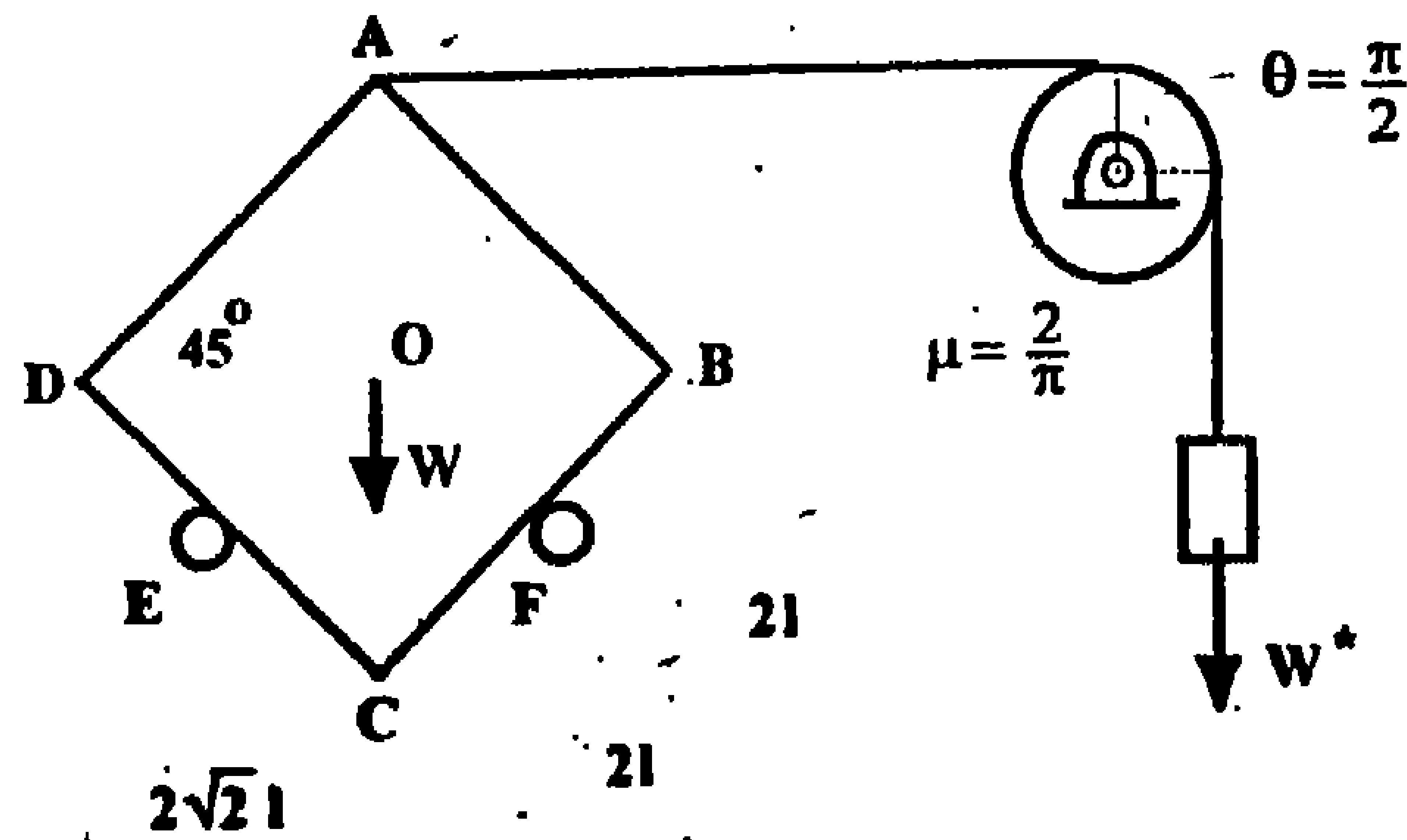
٨ – اذا كانت البكرة D في المجموعة المبينة بالشكل خشنة و معامل احتكاك $\mu = \frac{3}{2\pi}$ و ثابتة .عين وزن المنشور ABC بدلالة W لكي ينزلق و أثبت أنه لاينقلب . معامل الإحتكاك بين المنشور و الأرض هو : $\mu^* = \frac{\sqrt{3}}{8}$.



٩ – العجلتان A و C وزن الأولى A هو W و وزن الثانية C هو 'W و نصف قطر كل منهما a يتدحرجان على مستويين مائلين خشبيين كما بالشكل حيث يرتبط محورا العجلتين O3 و O1 بخيط خفيف يمر على بكرة خشنة ثابتة B معامل احتكاكها يساوي $\frac{2}{\pi}$.فإذا كان نصف قطر دائرة احتكاك كل من المحورين O3 و O1 يساوي ذراع مقاومة التدحرج لكل من العجلتين = $\frac{a}{20}$. عين أقل قيمة للوزن 'W بدلالة الوزن W حتى تتدحرج العجلة C أسفل المستوى .



١٠ – لوحة مربعة ABCD طول ضلعها 4 l وزنها W ، القطر AC رأسي و يرتكز في الوضع المبين على وتدين خشبين F و E في المستوى الأفقي واحد عند منتصفي CB و DC و معامل الاحتكاك لكل من الوتدين مقداره (μ = 1/2) ، و اذا ربطت اللوحة من A بخيط يمر على بكرة خشنة و يتدلى من طرفه الآخر ثقل مقداره 'W و معامل الإحتكاك بين البكرة و الخيط مقداره) ($\mu' = 2/\pi$. عين مقدار الثقل 'W بدلالة اللوحة (W) عندما تكون اللوحة على وشك الإنزلاق .





مركز الكتل ومركز الثقل

يعتبر تعيين مركز الثقل من الخواص العامة في دراسة اتزان أي جسم كما يستفاد من تعيين مركز المساحة في معرفة ودراسة الخواص الخاصة بها وهو ما يلزم في دراسة نظرية الإنشاء وغيرها.

تعريف مركز الكتل :

مركز الكتل هو ذلك المركز الذي يتوسط تلك المجموعة من الكتل والتي لو ركزت جميعاً في هذا المركز لأصبح عزم الكتلة الكلية حول أي محور مساويا لمجموع عزوم الكتل الفردية حول نفس المحور.

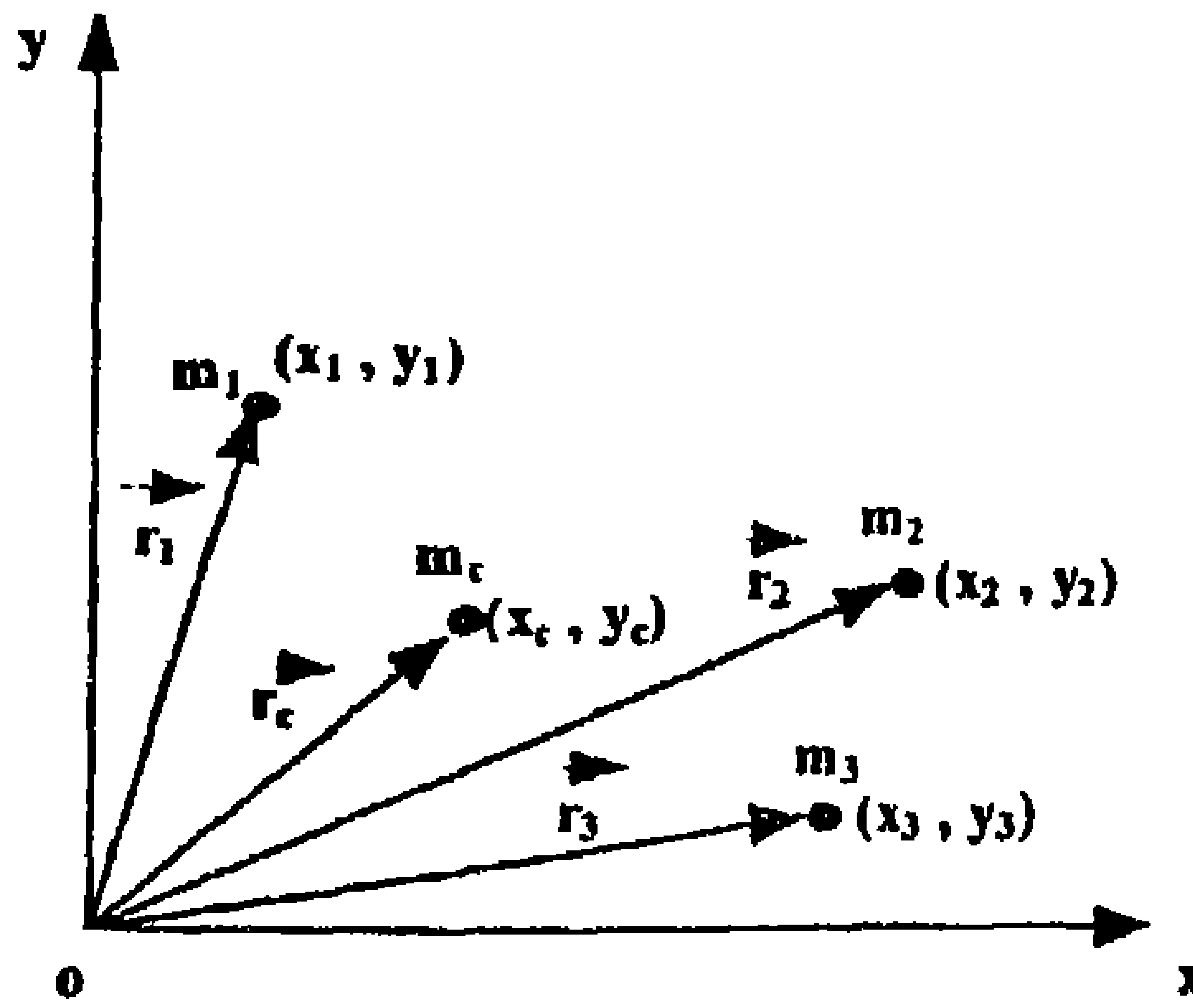
فإذا توافر لدينا عدد من الكتل ولتكن (m1, m2, m3) وكان مركزها المتوسط هو C ، وتطبيقاً لهذا التعريف بأخذ العزوم حول المحورين الرأسي والأفقي شكل (١)

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = (m_1+m_2+\ldots.)x_c$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = (m_1+m_2+\ldots.)y_c$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

وبجمـــع هـــاتين المعـــادلتين التحليليتين في معادلة اتجاهية واحدة على الصورة



$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{...... (2)}$$

وبالنسبة لحالة الأجسام المتماسكة يكون توزيعها توزيع متصلا بحيث تقسم الكتلة إلى شرائح صغيرة Δm ويطبق عليها نفس التعريف السابق مع استخدام التكامل بدلا من المجموع.

$$x_c = \frac{\int x\, dm}{\int dm} \quad , \quad y_c = \frac{\int y\, dm}{\int dm} \quad \text{.................................... (3)}$$

وبالمثل للإحداثي Z في الحالة الفراغية العامة .

أما مركز الثقل فهو مركز أوزان هذه الكتل ولما كانت الأوزان عبارة عن مجموعة من القوى المتوازية المناسبة في مقاديرها لمقادير الكتل ومعامل التناسب هو عجلة الجاذبية فإن مركز الثقل يطابق مركز الكتل .

الأجسام المتجانسة :

في حالة ما اذا كان للجسم كثافة ثابتة مقدارها ρ لجميع أجزائه يمكن الاستعاضة عن الكتلة بالحجم V نظراً لتناسب الإثنين في هذه الحالة.

$$x_c = \frac{\int x\ dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho\, dv}{\int \rho\, dv} = \frac{\int x\ dv}{\int dv}$$

.... (4)

$$y_c = \frac{\int y\ dm}{\int dm} = \frac{\int y \rho\, dv}{\int \rho\, dv} = \frac{\int y\ dv}{\int dv}$$

ويمكن تسمية المركز C فى هذه الحالة بمركز الحجم .

الأجسام الرقيقة :

في حالة الأجسام القشرية الرقيقة المتناهية السمك فيكون الحجم V رقيقا متجانس السمك ولذا يستعيض عنه بالسطح S ويسمى المركز C في هذه الحالة مركز المساحة السطحية أو مركز السطح.

$$x_c = \frac{\int x\ ds}{\int ds} \quad , \quad y_c = \frac{\int y\ ds}{\int ds}$$ .... (5)

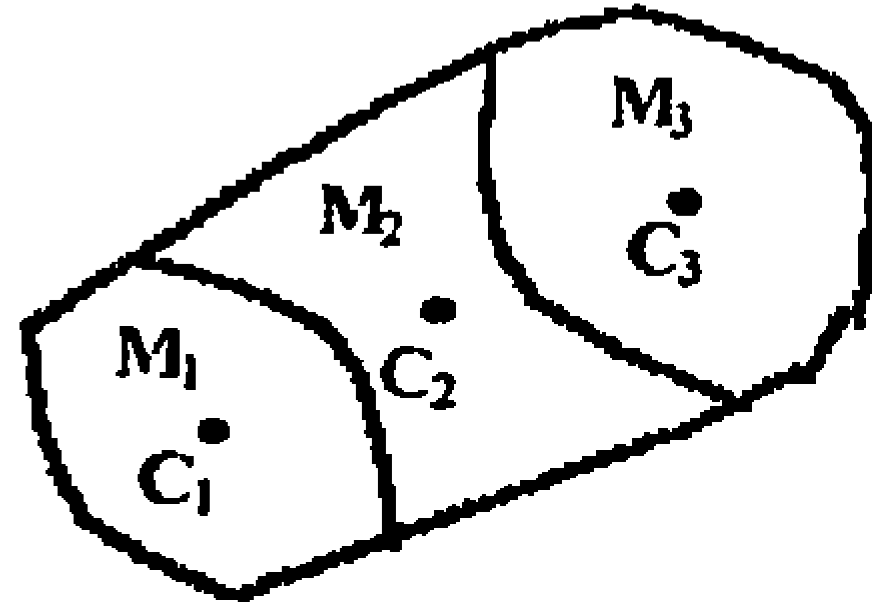
الأجسام الطولية

وفى حالة الأجسام الطولية أو الخطية المتجانسة المقطع يستعاض عن الحجم V بالطول L ويسمى المركز C فى هذه الحالة بمركز المنحنى ويتعين بالمعادلتين .

$$x_c = \frac{\int x\ dl}{\int dl} \quad , \quad y_c = \frac{\int y\ dl}{\int dl}$$ .... (6)

١- نظرية مراكز الأجزاء :

إذا كان جسم ما مكونا من أجزاء معروفة الكتل والمراكز فإن مركز الجسم بأكملة يتعين كما لو كانت كتل الأجزاء مركزة فى مراكزها (شكل٢).



شكل (٢)

$$x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3} \quad , \quad y_c = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3}{M_1 + M_2 + M_3} \quad ..... (7)$$

وإذا احتوى الجسم على بعض الثقوب فإن مادة الثقب تعتبر كتلة سالبة عند التعويض فى المعادلتين السابقتين.

المستويات المركزية والتماثل :

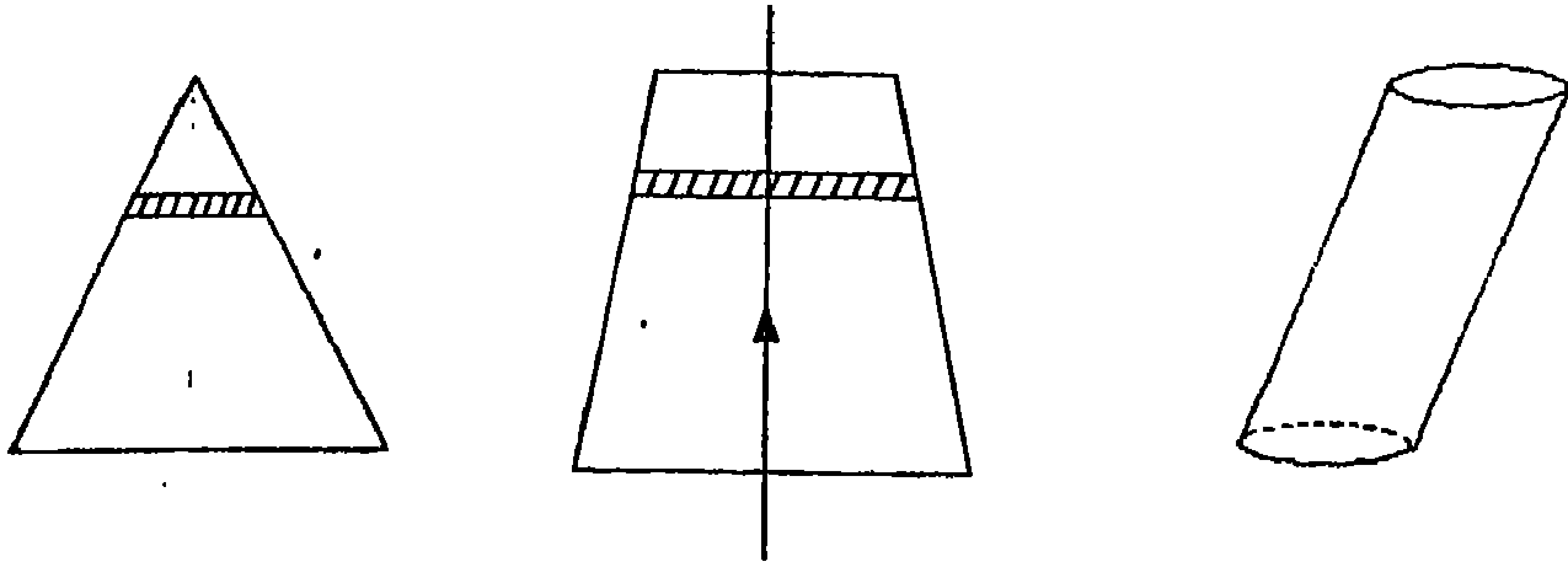
لنفرض أن المستوى x y يمر بمركز الكتلة فيكون

$$Z_c = 0 \qquad \therefore \int Z\,dm = 0$$

وعلى ذلك يجب أن يقطع المستوى xy الجسم لتواجد قيم موجبة وقيم سالبة للمتغير z بحيث يتلاشى التكامل .

وعلى ذلك إذا كان الجسم متماثلا بالنسبة لمستوى معين فلابد أن يقع المركز فى ذلك المستوى وكل محور تماثل يمر بالمركز .

وإذا كان هناك مركز تماثل (ملتقى محاور تماثل) فإن مركز الكتلة يقع علية كمركز الكرة ومركز المربع .



شكل (٣)

تسرى هذه القاعدة فى حالة ما إذا كان محور التماثل مائلا أو متعامدا (شكل ٣)

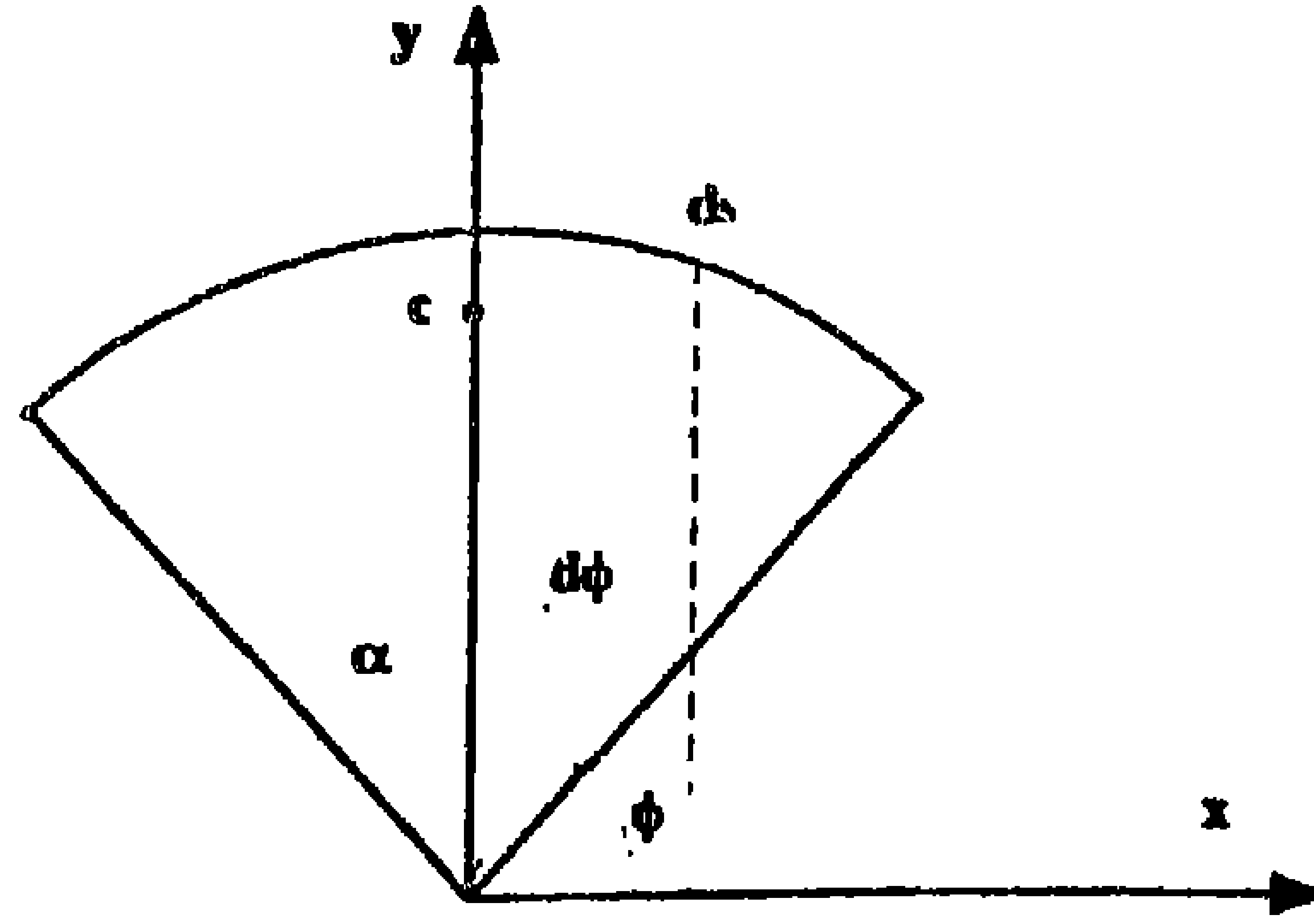
بعض الأمثلة بالتكامل المباشر :

تسهل عمليات التكامل الواردة بالمعادلات (٤)و(٥)و(٦) إذا أحسنا تجزئ الجسم إلى عناصر تفاضلية معروفة المركز وبذلك يمكن تفادى التكاملات المعقدة ومن المهم اختيار المتغير المناسب لتظهر التكاملات فى الصورة المألوفة.

(١) مركز قوس دائرى:

تفرض الزاوية المركزية للقوس 2α ونصف قطر الدائرة a . يتماثل القوس حول منصف زاويته المركزية وهو المحور بشكل(٤) ولذلك يقع مركز القوس C على المحور y وتتلاشى x_c وأما y_c فتعينها ثانية المعادلين (٥)

$$y_c = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} (a \sin\phi)\, a\, d\phi}{a\ 2\alpha} = \frac{a}{\alpha}\sin\alpha$$



شكل (٤)

لربع دائرة تعطى النتيجة السابقة بتعويض α بالتقدير الدائرى

$$y_c = \frac{a.(1/\sqrt{2})}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}$$

ولنصف دائرة :

$$y_c = \frac{a.1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

(٢) مركز قطاع دائرى:

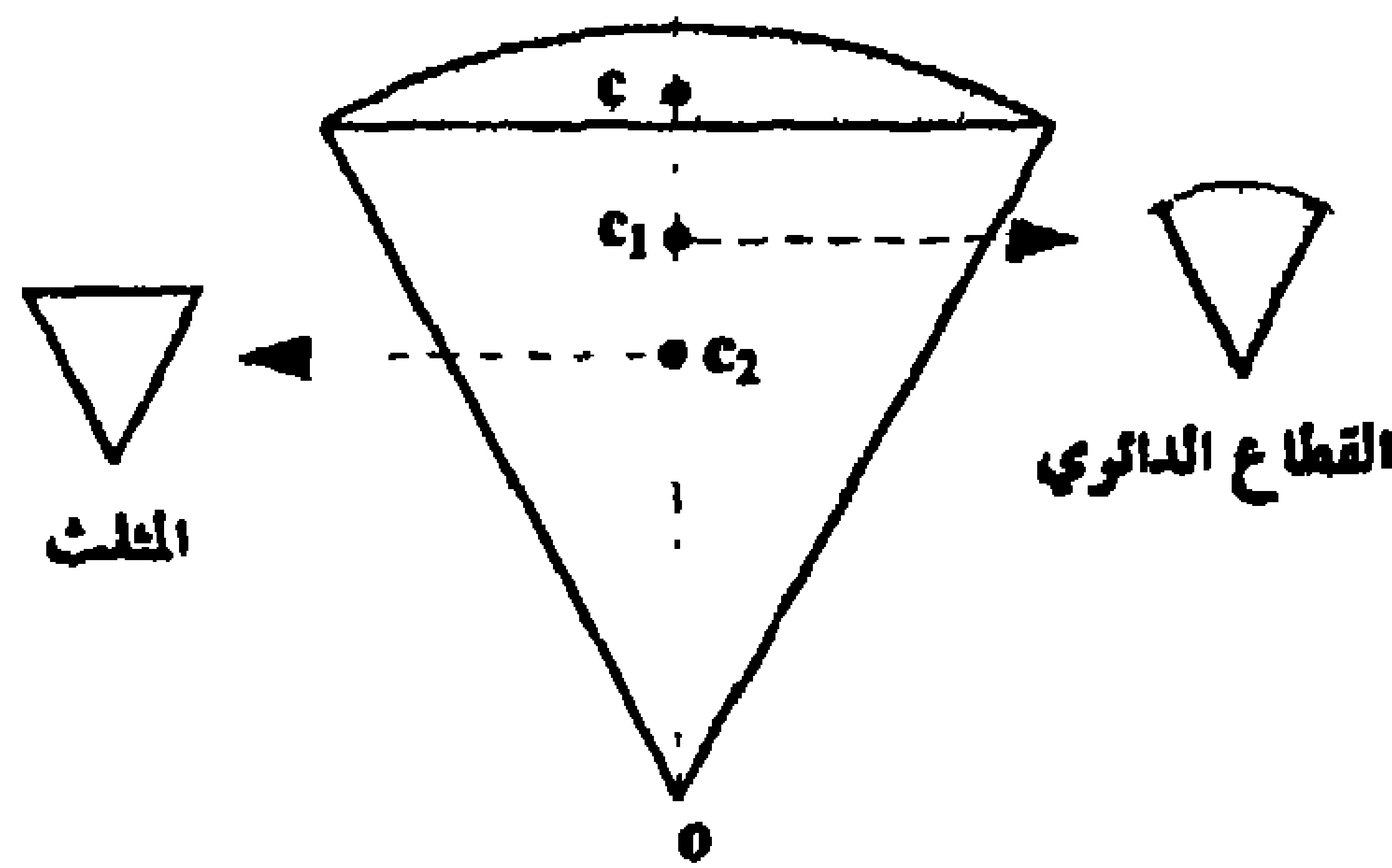
بالتقسيم إلى مثلثات صغيرة زاويتها المركزية $d\,\phi$ وتطبيق ثانية المعادلتين (٥) نحصل على y_c

$$y_c=\frac{\int y\,ds}{\int ds}=\frac{1}{s}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}\frac{2}{3}2\sin\phi\frac{a^2}{2}d\phi$$

$$y_c=\frac{2}{3}\frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

(٣)مركز قطعة دائرية:

سنستعمل هنا نظرية مراكز الأجزاء الموضحة بالبند (١)وذلك باعتبار القطعة الدائرية الفرق بين القطاع الدائرى والمثلث شكل(٥)

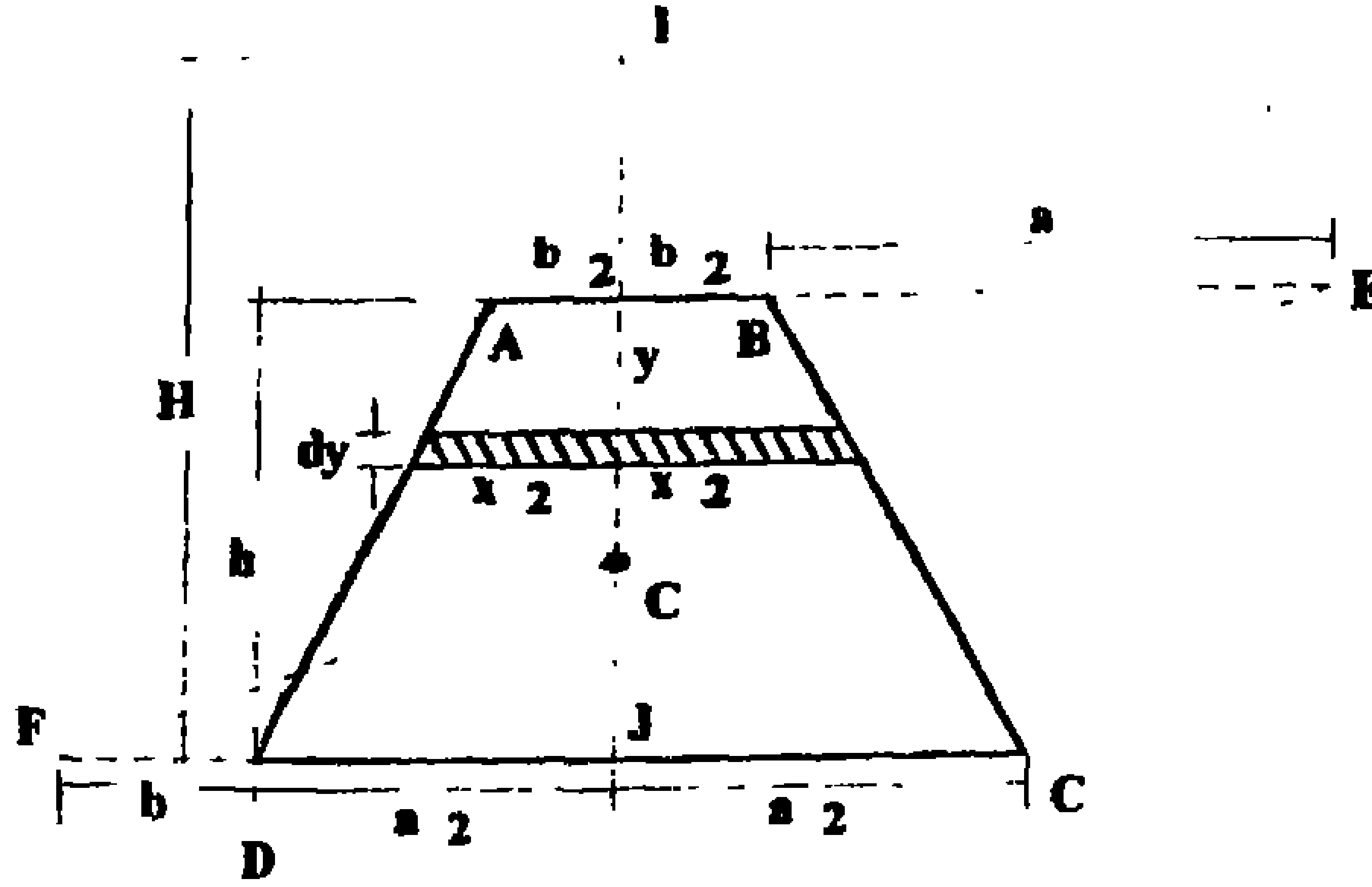


شكل (٥)

$$y_c\,(a^2\,\alpha-a^2\sin\alpha\cos\alpha)=a^2\,\alpha\,.\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}-a^2\sin\alpha\cos\alpha\,.\frac{2a}{3}\cos\alpha$$

$$y_c=\frac{2a\sin^3\alpha}{3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}$$

(٤)مركز شبة منحرف:



بأخذ شريحة x وارتفاعها dy الشكل وتطبيق المعادلتين (٥) نحصل على

$$y_c = \frac{\int_0^h y\, ds}{S} = \frac{\int_0^h x\, y\, dy}{S}$$

ومن تشابة المثلثات :

$$\because \frac{x}{a} = \frac{H-y}{H} \quad , \quad \frac{H-h}{H} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore x = \alpha - \frac{a-b}{h} \cdot y$$

$$y_c = \frac{\left[\frac{a y^2}{2} - \frac{a-b}{h}\frac{y^3}{3}\right]_0^h}{\frac{h}{2}(a+b)}$$

وبتعويض الحدين الأعلى والأدنى للتكامل نحصل بعد شيء الاختزال على y_c ويمكن تعيين المركز C بالرسم وذلك بمد BA إلى E بحيث $BE = \alpha$ وبمد CD إلى F بحيث $DF = b$ فإن المركز C هو نقطة تقاطع I J وFE كما هو موضح بشكل (٦)

(٥) مركز مساحة محدودة بقطع مكافئ:

(ا)المساحة المحدودة بالقطع المكافئ ($y^2=4ax$) ومحور x والخط الرأسى $x = b$

.

تقسم المساحة إلى شرائح رأسية (شكل ٧) مساحة كل منها $y \Delta x$ تركز مادة الشريحة فى مركزها C_1 واحداثياته $(x, y/2)$ ثم تؤخذ عزوم هذه الماده المركزة فى C_1 وعزم المادة الكلية للقشرة الرقيقة التى تمثلها المساحة باعتبارها مركزة فى المركز العام C_1 وذلك حول المحورين (x,y) لنحصل على معادلتين على النمط (٥)

$$x_{c_1} = \frac{\int x\,ds}{\int ds} = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}$$

$$y_{c_1} = \frac{\int \frac{y}{2}\,ds}{\int ds} = \frac{\int \frac{y}{2}\,y\,dx}{\int y\,dx}$$

وبالتعويض عن y من معادلة القطع المكافئ المعطاه نحصل على

$$x_{c_1} = \frac{\int_0^b 2\sqrt{a}\,x^{3/2}\,dx}{\int_0^b 2\sqrt{a}\,x^{1/2}\,dx} = \frac{(\frac{2}{5})\left[x^{5/2}\right]_0^b}{(\frac{2}{3})\left[x^{3/2}\right]_0^b} = \frac{3}{5}b$$

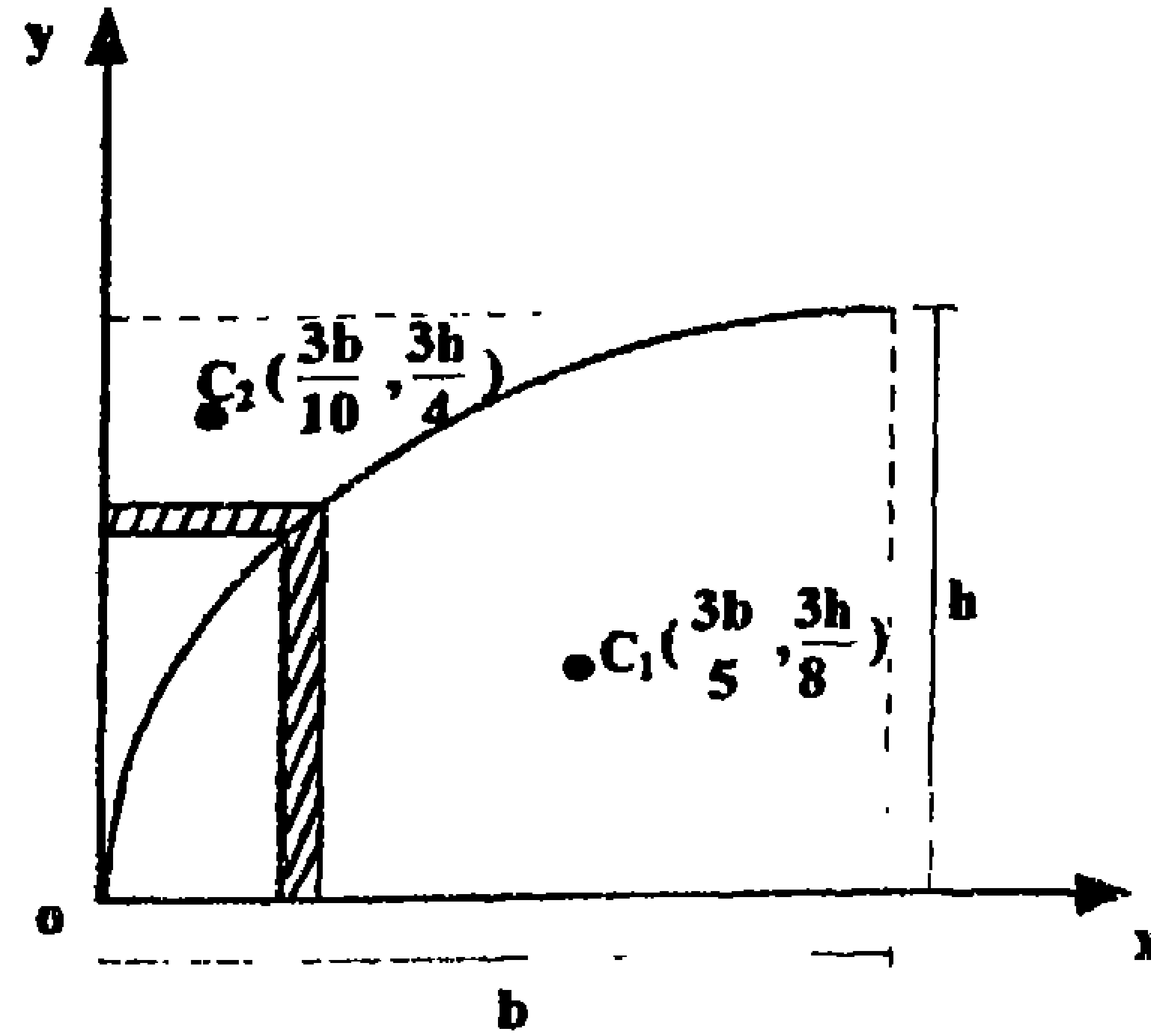
$$y_{c_1} = \frac{\int_0^b 2a\,x\,dx}{\int_0^b 2\sqrt{a}\,x^{1/2}\,dx} = \frac{a\left[x^{1/2}\right]_0^b}{(\frac{4}{3}\sqrt{a})\left[x^{3/2}\right]_0^b} = \frac{3}{4}\sqrt{a\,b}$$

وبتعويض احداثى نقطة A فى معادلة القطع المكافئ نحصل على

$$h = 2\sqrt{2b} \quad , \quad y_{c_1} = \frac{3}{8}h$$

(ب) المساحة المحدودة بالقطع المكافئ ($y^2 = 4ax$) ومحور y والخط الأفقي $y = h$

تقسم المساحة إلى شرائح أفقية كما في الشكل مساحة كل منها $x\ \Delta y$ وتركز مادة الشريحة في مركزها واحداثياه ($x/2, y$) ثم تؤخذ العزوم حول المحورين كما في الحالة السابقة .



شكل (٧)

$$x_{c_2} = \frac{\int \frac{x}{2} ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h \frac{x}{2} x\, dy}{\int_0^h x\, dy}$$

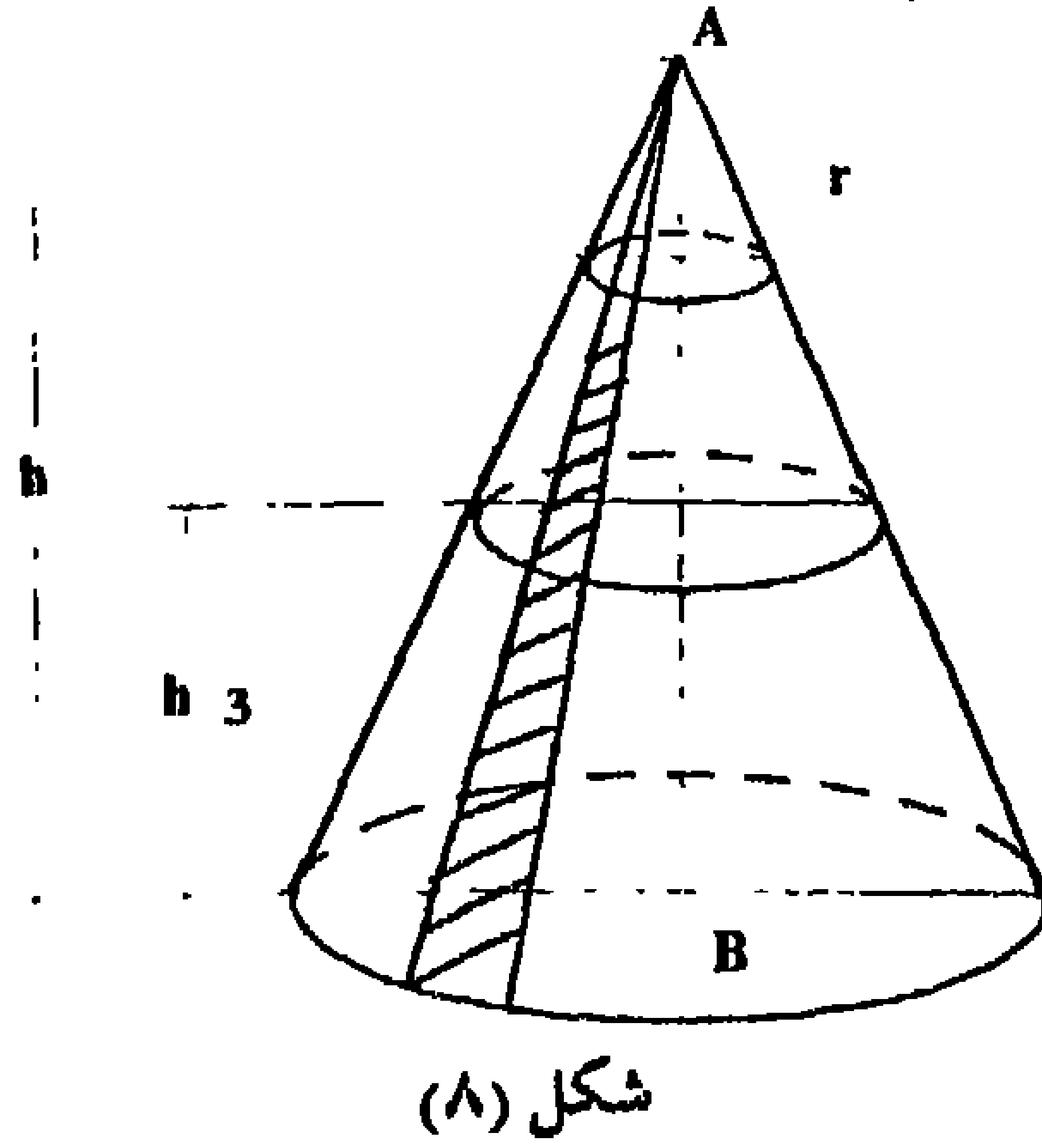
$$y_{c_2} = \frac{\int y\, ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h y\, x\, dy}{\int_0^h x\, dy}$$

وبالتعويض عن y من معادلة القطع المكافئ نحصل بعد اجراء التكاملات وتعويض النهايات كما في الحالة (ا) على النتائج الأتية :

$$x_{c_2} = \frac{3}{10} b \quad , \quad y_{c_2} = \frac{3}{4} h$$

ونتائج الحالتين مجمعة في شكل (٧)

(٦) مركز سطح مخروطى أو هرمى:



شكل (٨)

بتقسيم السطح إلى مثلثات صغيرة كالمثلث المظلل بشكل (٨) فإن مركزها جميعا تقع على ارتفاع h/3 من القاعدة وكذلك مركز السطح ولكن لايقع مركز السطح على المحور BA إلا إذا كان المخروط

أو الهرم قائما مع توفر شروط التماثل المساحى بالنسبة إلى المحور وإذا قطعنا أجزاء من السطح المخروطى بمستو مواز للقاعدة حصلنا على مخروط ناقص يقع على مركزه على ارتفاع قدرة

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{R+2r}{R+r}$$

حيثR نصف قطر القاعدة الكبرى r نصف قطر القاعدة الصغرى .

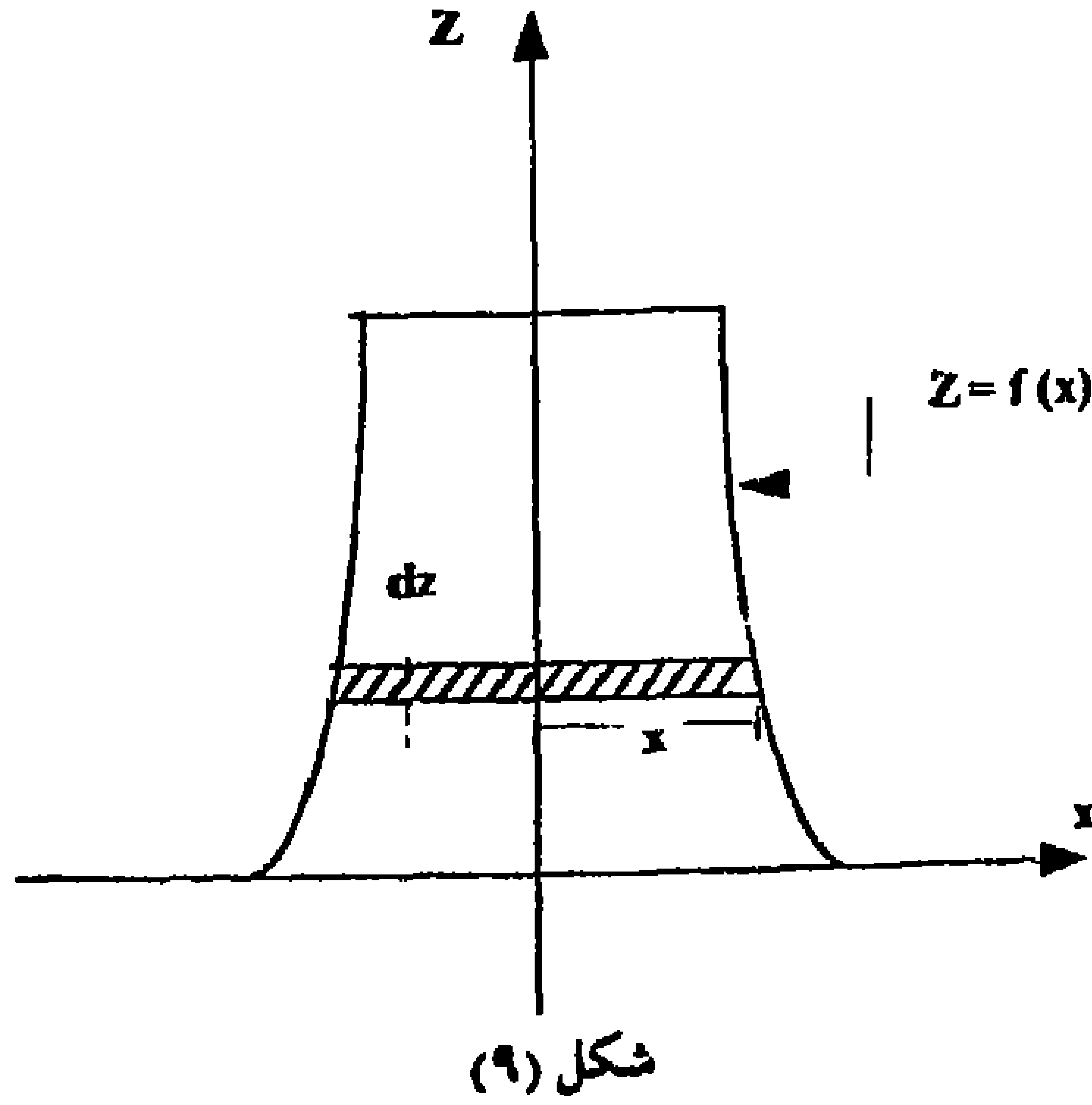
والنتيجة السابقة يمكن برهنتها بتقسيم السطح إلى أشباه منحرفة وتطبيق نتيجة مركز شبه المنحرف التى حصلنا عليها بالحالة (٥).

(٧)مركز الحجم المخروطى أو الهرمى :

يقع المركز على المحور المركزى على ارتفاع $h/_4$ من القاعدة والمحور المركزى هو الخط المار برأس المخروط وبمراكز المقاطع المتشابهة الموازية للقاعدة .

(٨)مركز الحجم الدورانى :

إذا أدير المنحنى $z = f(x)$ حول المحور z فإنه ينتج جسم دورانى مقطعة العمودى على z دائرى (شكل٩)



شكل (٩)

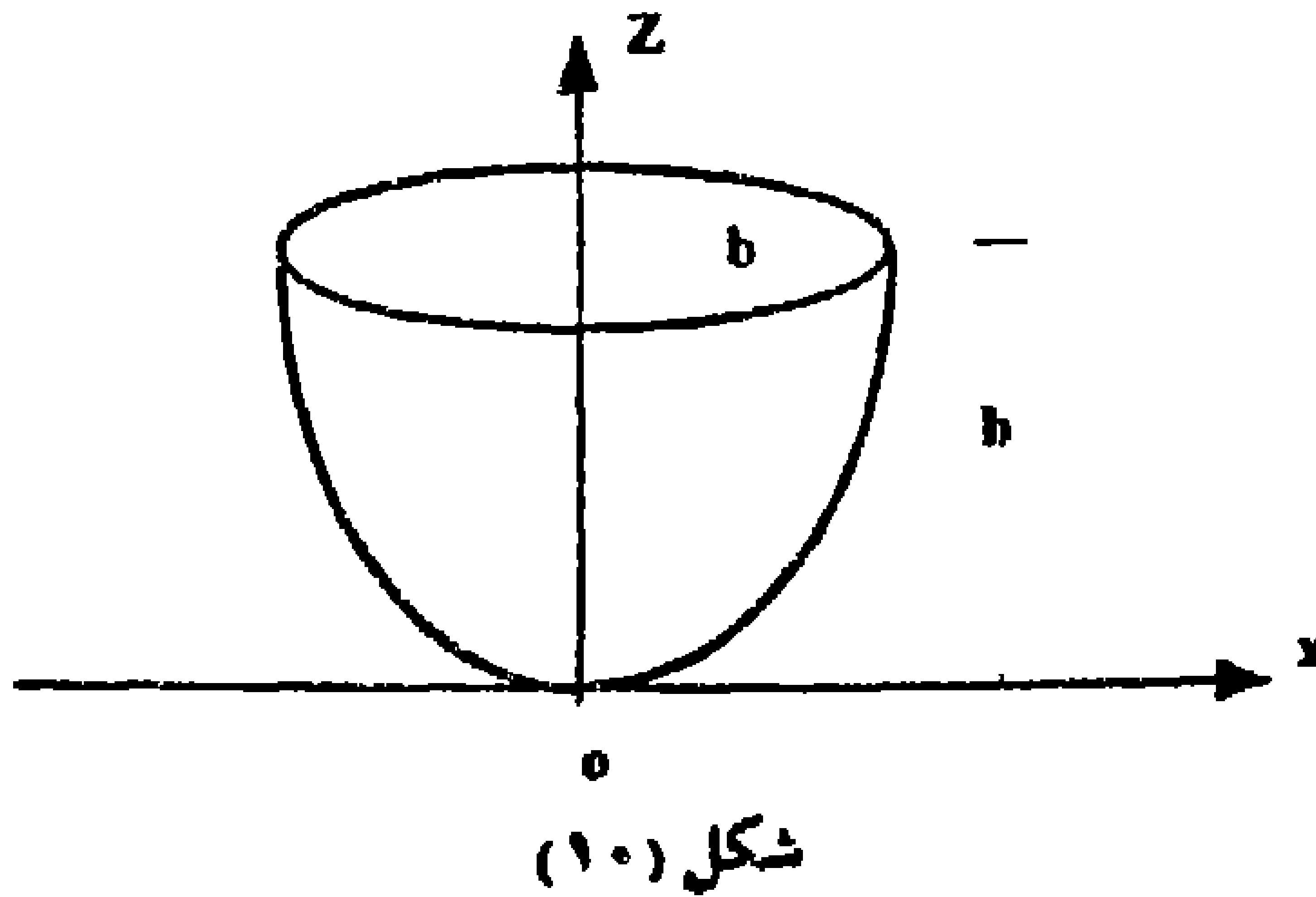
يقع مركز ثقل هذا الجسم على محور التماثل z ويبقى تعين احداثية الرأسى z_c لتعيين هذا الاحداثى يقسم الجسم إلى شرائح بواسطة مستويات أفقية متقاربة وتركز مادة الشريحة فى مركزها واحداثياه (o و z) وأما مقدار حجمها فهو

$(\Pi x^2 \Delta z)$ تؤخذ العزوم لمادة الشريحة المركزة حول المحور x فنحصل على معادلة على النمط (٤)

$$z_c = \frac{\int_{z_1}^{z_2} (\pi x^2\, dz) \cdot z}{\int_{z_1}^{z_2} \pi x^2\, dz}$$

أمثلة :

١ – عين مركز الحجم الدورانى الناشئ من دوران القطع المكافئ $(x^2 = 4az)$ بين z=0 و z=h حول المحور z (الشكل)

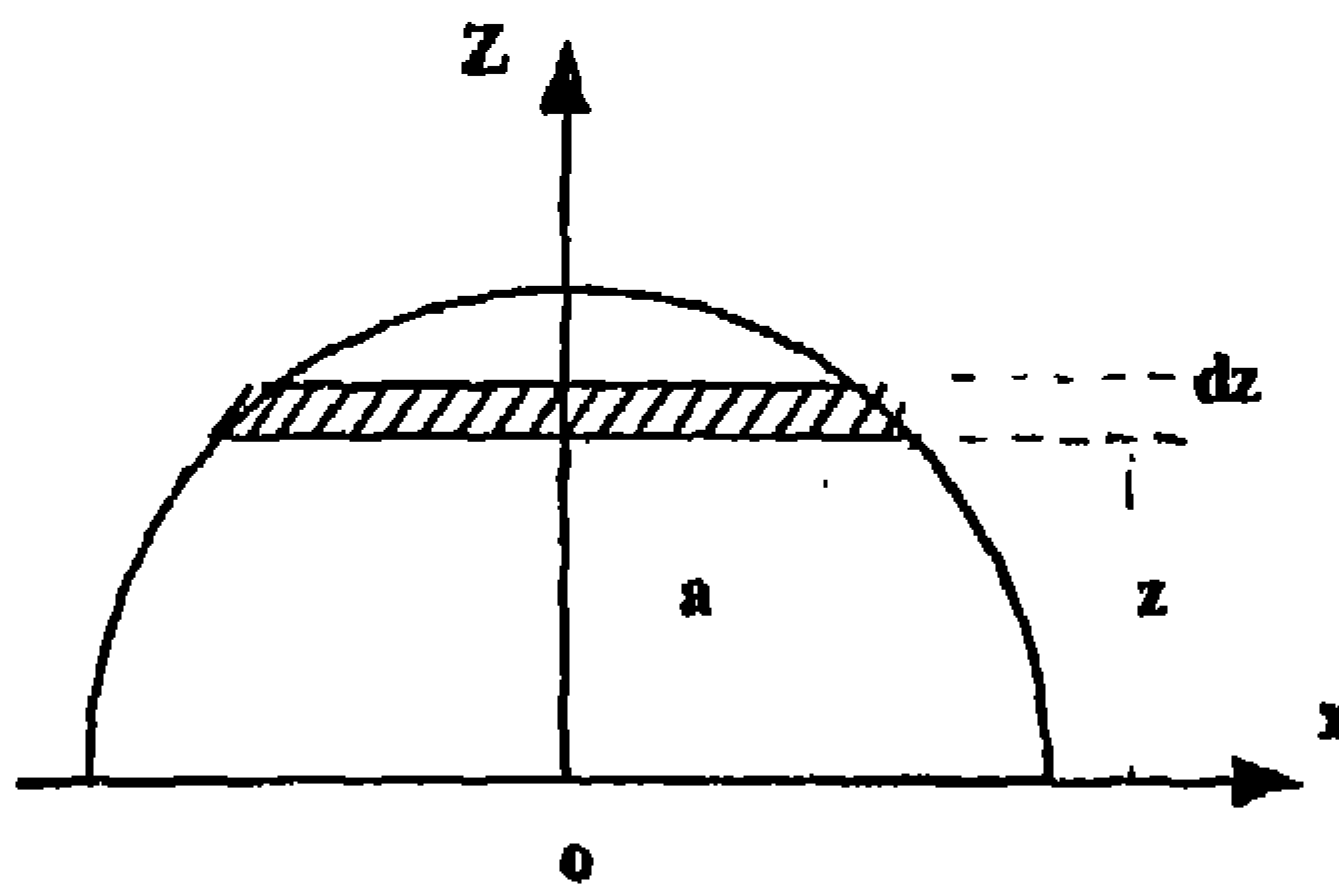


شكل (١٠)

$$z_c = \frac{\int_0^h (\pi x^2\, dx).z}{\int_0^h \pi x^2\, dz} = \frac{\int_0^h 4 a z^2\, dz}{\int_0^h 4a z dz}$$

$$= \frac{\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h}{\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h} = \frac{2}{3} h$$

أى أن مركز الحجم المكافئ الدورانى يقع فى ثلثى ارتفاعة من ناحية الرأس .



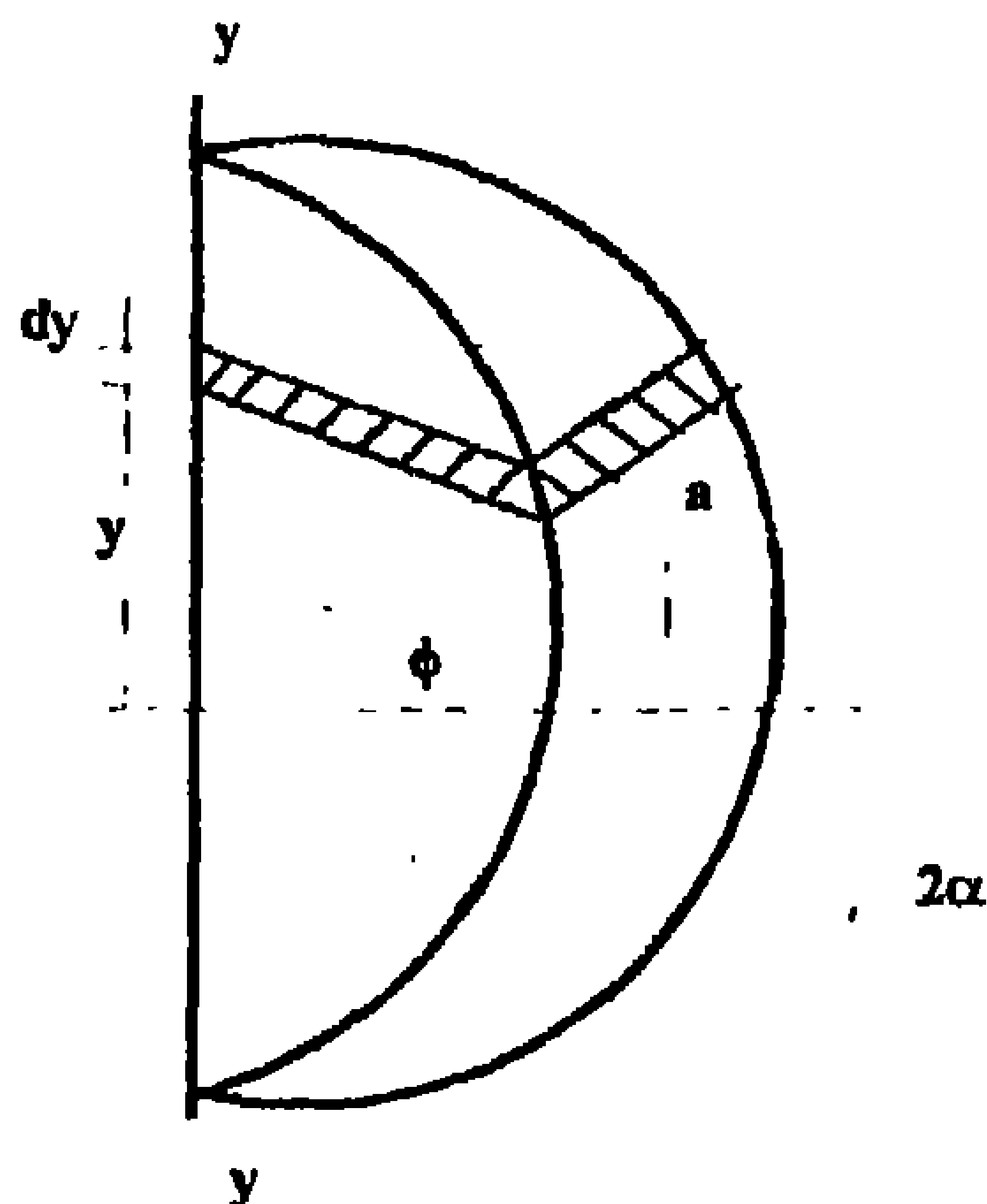
٢ – عين مركز الحجم لنصف كرة مصمتة نصف قطرها a (الشكل) وتقسم نصف الكرة إلى شرائح أفقية كالمبينة بالرسم ونستخدم المعادلة (٩) لتعيين Z_c

$$z_c = \frac{\int_0^a (\pi x^2\, dz).z}{\int_0^a \pi x^2\, dz} = \frac{\int_0^a z(a^2 - z^2)\, dz}{\int_0^a (a^2 - z^2)\, dz}$$

$$= \frac{\left[\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^a}$$

$$= \frac{3}{8} a$$

أى أن مركز ثقل نصف كرة مصمتة يقع على محور تماثله ويبعد عن مركز الكرة بمقدار ٨/٣ نصف القطر .



٣ – عين مركز شقة كروية مصمتة زاويتها المركزية 2α بتقسيم الشقة إلى شرائح أفقية كما هو مبين بالشكل يكون حجم كل شريحة

$$\Delta v = \alpha x^2 . \Delta y$$

وبعد مركزها عن المحور yy هو

$$\frac{2x \sin \alpha}{3\alpha}$$

وبذلك يكون بعد مركز الشقق e عن yy في القطاع الأوسط معطى بالمعادلة

$$v . e = \int_0^a \alpha x^2 \, dy . \frac{2\alpha \sin \alpha}{3\alpha}$$

بالتعويض

$$x = a \cos\phi \ , \quad dy = a \cos\phi \ d\phi$$

$$\alpha . \frac{4}{3} a^2 e = \frac{4}{3} a^4 \sin\alpha . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \phi \ d\phi$$

$$= a^4 \sin\alpha . \frac{3\pi}{16}$$

$$e = \frac{3\pi a}{16} . \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

بالتعويض عن $\alpha = \frac{\pi}{2}$ نحصل على بعد مركز نصف الكرة المصمتة

$$e_{max} = \frac{3}{8} a$$

كما سبق أن اوجدناه بطريقة اخرى .

(٩) مركز السطح الدوراني:

يقسم السطح إلى شرائح تحدها مستويات عمودية على محور تماثل السطح (شكل٩) المساحة الجانبية لكل شريحة تساوى

$$\Delta S = 2\pi x \Delta s$$

حيث Δs طول جزء المنحنى الذى تتولد الشريحة من دورانه تركز مادة كل شريحة فى مركزها وإحداثياه (٠و z) ثم تؤخذ العزوم حول محور x للحصول على

$$Z_c = \frac{\int z\, ds}{\int ds} = \frac{\int 2\pi x\, ds . z}{\int 2\pi x\, ds}$$

للسطح نصف الكروى المبين بشكل (٩) تعطى المعادلة (١٠) ما يأتى :

$$Z_c = \frac{\int z\, ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin\theta \;\; 2\pi a^2 \cos\theta \; d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2 \cos\theta \; d\theta}$$

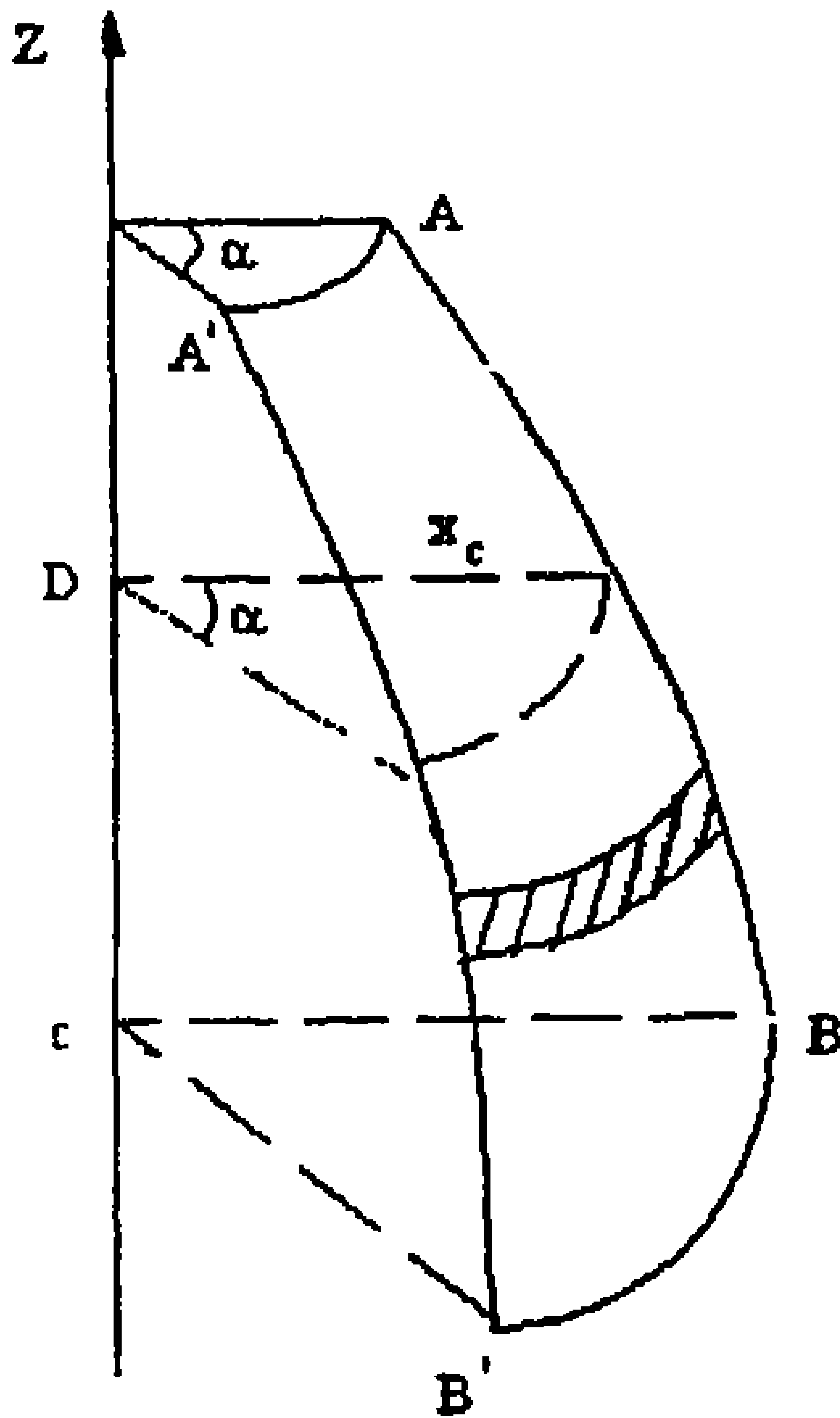
$$= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin\theta \;\; d\sin\theta}{\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{0}}} = \frac{a\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{1} = \frac{a}{2}$$

نظرية بابوس:

أ-إذا دار جزء من منحنى مستوى حول محور فى مستوية زاوية قدرها α فإن المساحة الجانبية للسطح الدورانى الناتج يساوى طول المنحنى مضروبا فى مسار مركزه . فإذا دار المنحنى AB حول المحور Z (شكل١٢) زاوية قدرها α وكان x_c بعد مركزه عن المحور z فإن مساحة السطح الدورانى ABAB تعطيها المعادلة ؟

$$S=\int \alpha\, x\, ds=\alpha \int x\, ds$$

ولكن مركز المنحنى يتعين بالمعادلة



$$x_c=\frac{\int x\, ds}{\int ds}=\frac{\int x\, ds}{L}$$

حيث L هى الطول الكلى للمنحنى، ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$S=L\,.\,(\alpha\, x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الأول من النظرية .

وإذا كانت α دورة كاملة فإن

$$S=L\,.\,(2\pi\, x_c)$$

و بتطبيق ذلك على قوس نصف دائرى نحصل على

$$S=4\,\pi\, a^2=2\,\pi\, x_c\,.\,\pi\, a$$

$$x_c=\frac{2a}{\pi}$$

وهو ما يمكن الحصول عليه بتطبيق المعادلة

ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعين مركز منحنى معلوم طوله ومساحة السطح المتولد من دورانه .

ب – إذا دارت مساحة مستوية حول محور في مستويها فإن الحجم الدوراني الناتج يساوي المساحة مضروبا في مسار مركزها

بالإشارة إلى شكل (١٢) الحجم الناتج من دوران المساحة ABCD حول محور z تساوى

$$v = \int \alpha\, x\, dA$$

وفيها A∝ جزء صغير من المساحة ABCD ولكن مركز هذه المساحة يتعين من المعادلة

$$x_c = \frac{\int x\, dA}{\int dA} = \frac{\int x\, dA}{A}$$

ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$v = A\,.\,(\alpha\, x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الثاني من النظرية .

وإذا كانت ∝ دورة كاملة فإن

$$v = (2\pi\, x_c)\,.\,A$$

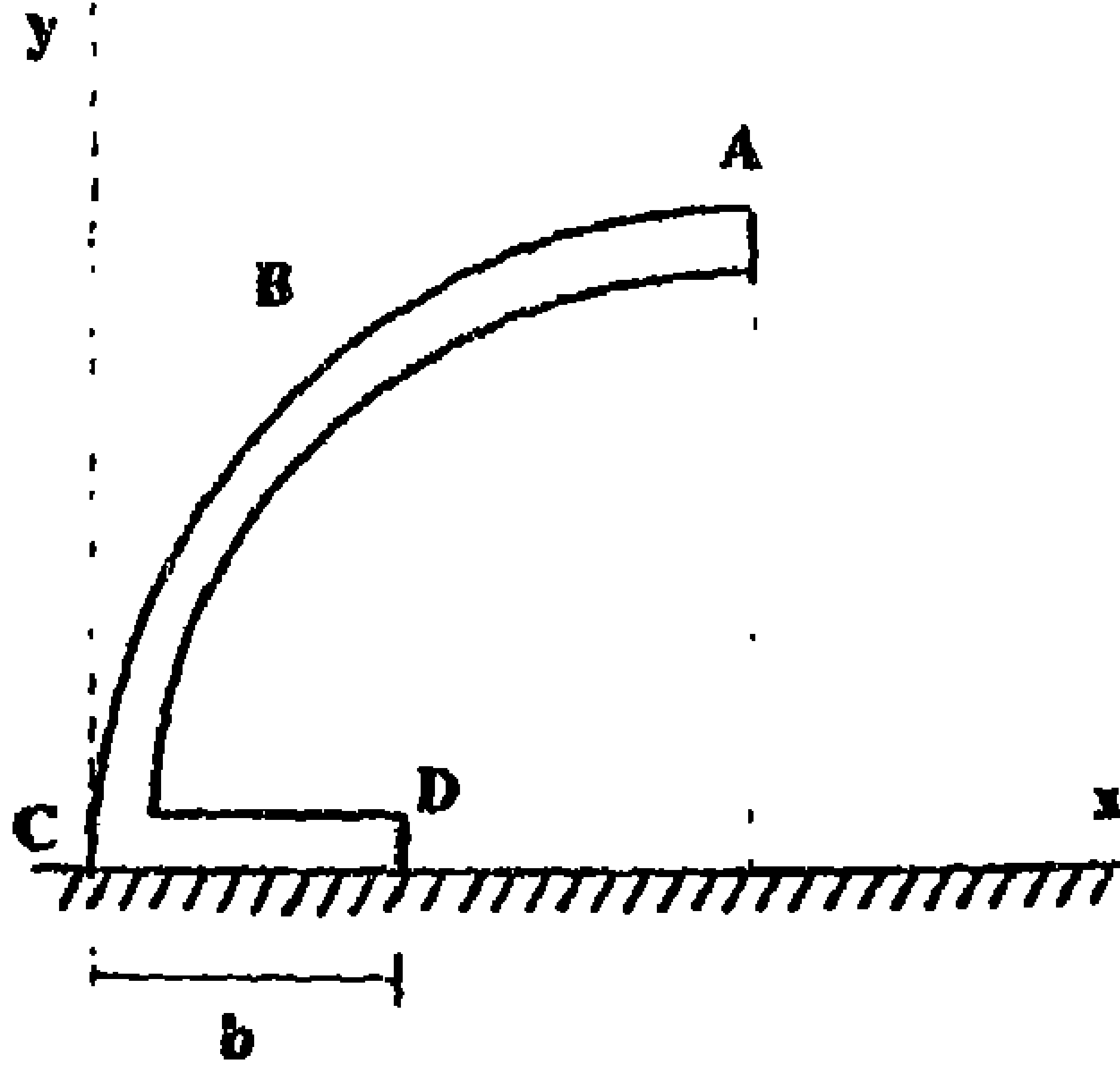
وبتطبيق ذلك على مساحة نصف دائرية ينتج أن

$$\frac{3}{4}\pi a^3 = 2\pi\, x_c\,.\frac{\pi a^2}{2} \quad \rightarrow \therefore\ x_c = \frac{4a}{3\pi}$$

وهذا هو مركز مساحة نصف دائرية .

ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعين مركز مساحة مستوية معلومة إذا كان الحجم المتولد من دورانها معلوما .

أمثلة محلولة



١ – مظلة مقطعها يتألف من ربع دائرة ABC بنصف قطر ٣ أمتار وقاعدة مستقيمة CD . عين عرض القاعدة بحيث لا تنقلب المظلة حول D علما بأن وزن وحدة الأطوال من مقطع المظلة = w

الحل:

الجزء الدائرى ABC

ليكن وزنة W_1 ومركز ثقلة G_1 $(x_1 y_1)$

$$W_1 = \frac{1}{4} 2\pi \; 3w = \frac{3}{2}\pi w$$

$$x_1 = r - \frac{r\sin\alpha}{\alpha}.\cos\alpha = 3(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\frac{\pi}{4}}) = 1.09 \;\; m$$

$$y_1 = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}.\sin\alpha = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\frac{\pi}{4}} = 1.91 \;\; m$$

الجزء المستقيم CD:

ليكن وزنه W_2 ومركز ثقله C_2 (x_2 , y_2)

$$W_2 = w\,b$$

$$x_2 = b \quad , y_2 = 0$$

مركز ثقل الجزئين G

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$

عند وشك الانقلاب حول نقطة D تمر محصلة وزني الجزئين بهذه النقطة .

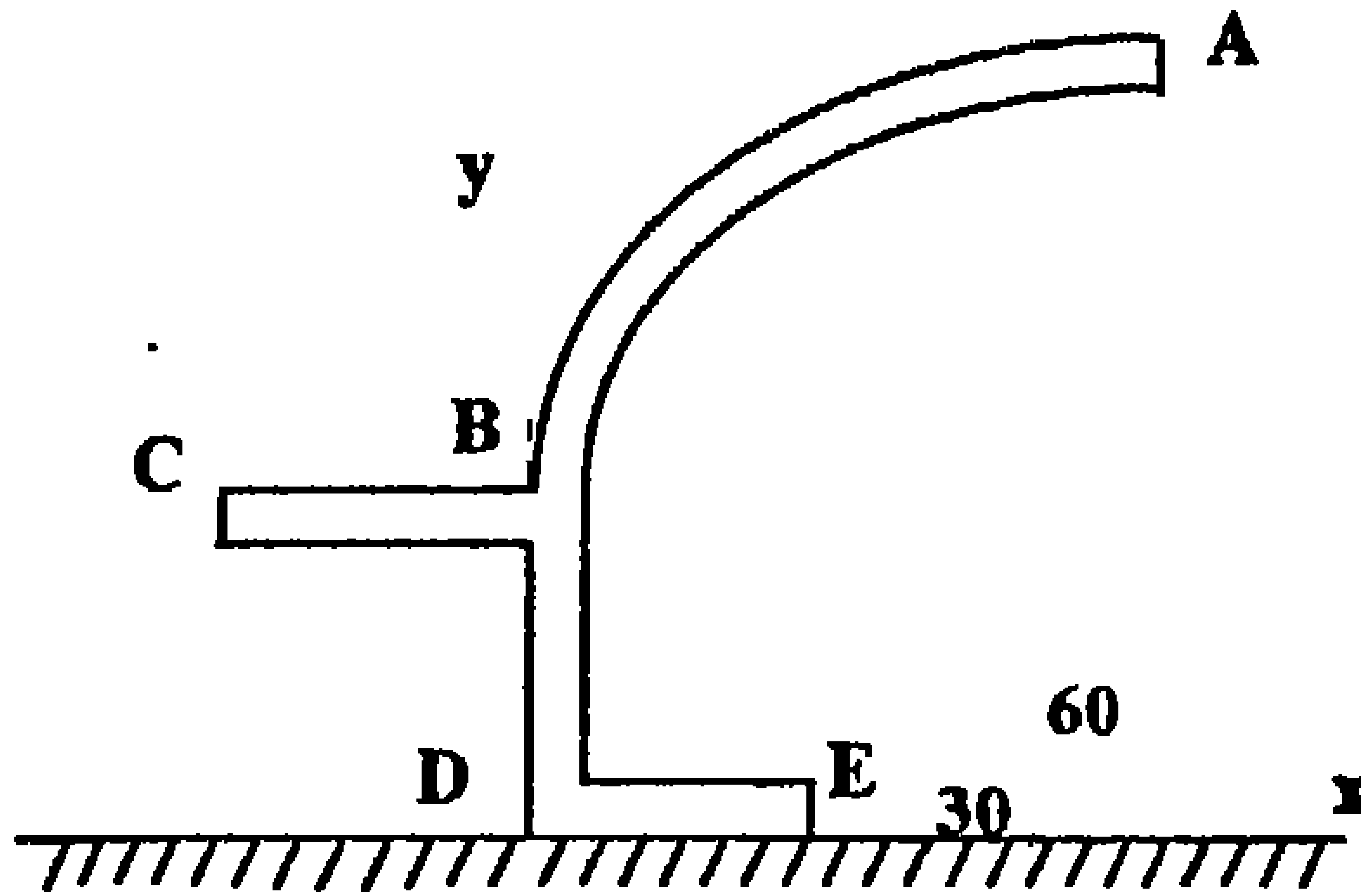
$$x_G = b = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$

$$\therefore b(\frac{3}{2}\pi W + b W) = 1.09 \times \frac{3}{2}\pi W + b W . \frac{b}{2}$$

$$\therefore b^2 + 3\pi b - 3 \times 1.09 \pi = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية فى b ويعطي حلها بالطرق الجبرية المعروفة الجذر الموجب الآتي :

$b = 1.00 \ m$



٢ – مظلة مقطعها يتألف من جزء دائرى AB بنصف قطر قدرة ٥ أمتار وباقى الأجزاء مستقيم كما فى الشكل . عين مركز ثقل الجزء الدائرى AB ثم عين عرض القاعدة DE بحيث لا تنقلب المظلة حول E علما بأن وزن وحدة

الأطوال من مقطع المظلة = w

الحل:

الجزء الدائرى BA

ليكن وزنة W_1 ومركز ثقلة G_1 $(x_1 y_1)$

$$W_1 = 2\pi \times 5 \times \frac{60}{360} w = 5.22\, w$$

$$x_1 = r\cos 30^\circ - \frac{r\sin\alpha}{\alpha}\cos 60^\circ$$

$$= r\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{\frac{\pi}{0}}\right] = 1.95\ m$$

الجزء الدائرى BC

ليكن وزنة W٢ ومركز ثقلة G٢ (x٢y٢)

$$W_2 = w$$

$$x_2 = -50\ m$$

الجزء الدائرى BD ليكن وزنة W٣ ومركز ثقلة G_3 (x_3 , y_3)

$$W_3 = 5 \times 0.5\, w = 25\, w$$

$$x_a = 0$$

الجزء الدائرى DE ليكن وزنة W_4 ومركز ثقلة G_4 (x_4 , y_4)

$$W_4 = b\, w$$

$$x_4 = \frac{b}{2}$$

مركز ثقل المظلة كلها G

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3 + W_4 x_4}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}$$

عند وشك الانقلاب حول E تمر محصلة الأوزان بالنقطة E نفسها

$$\therefore x_G = b = \frac{5.22 \times 1.95 - 1 \times 5 + 0 + b.\frac{b}{2}}{5.22 + 1.0 + 2.5 + b}$$

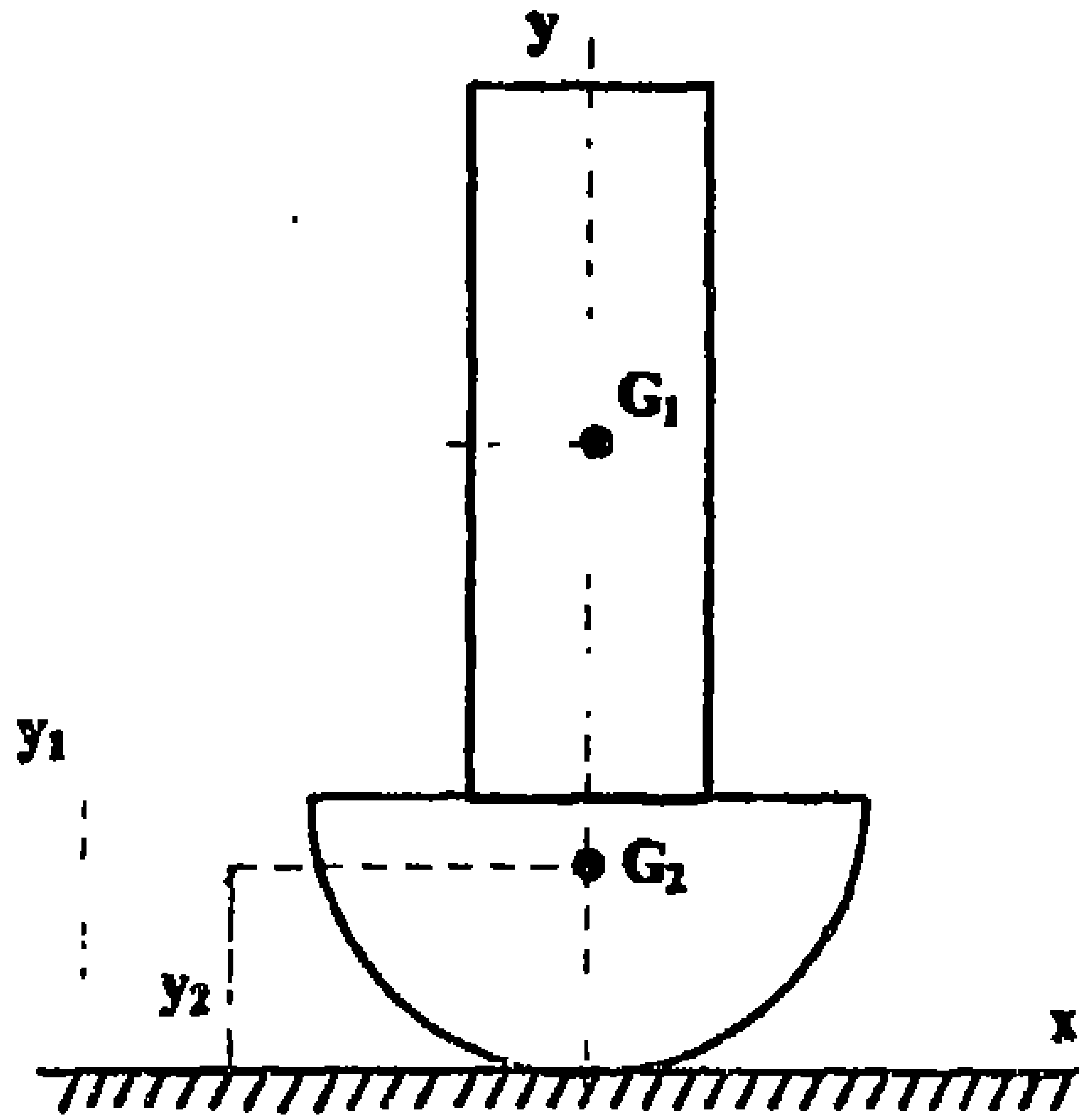
وباختزال هذه العلاقة نحصل على المعادلة الآتية من الدرجة الثانية فى b

$$b^2 + 17.45\, b - 19.4 = 0$$

ويعطى حل هذه المعادلة جبريا الجذر الموجب الآتى

$$b = 1.00 \quad m$$

(٣) نصف كرة مصمتة نصف قطرها a مركب عليها اسطوانة من نفس مادتها وطولها $\frac{8a}{3}$. إذا وضع الجسم على أرض أفقية كان وضعة القائم وضعاتزان مستقر. عين أكبر نصف قطر للاسطوانة فى هذه الحالة



الحل:

نفرض ان نصف قطر الاسطوانة r وأن وزن الأسطوانة W_1 ووزن نصف الكرة W_2 وأن وزن وحدة الحجوم من مادة الجسم W

$$W_1 = \pi r^2 . \frac{8a}{3} w$$

$$W_2 = \frac{1}{2} . \frac{4}{3} \pi a^2 w$$

G_1 مركز ثقل الأسطوانة فى منتصف ارتفاعها و G_2 مركز ثقل نصف الكرة المصمتة على بعد $\frac{3}{8}a$ من مركزها

$$\therefore y_1 = a + \frac{1}{2} . \frac{8}{3} a = \frac{7}{3} a$$

$$y_2 = \frac{5}{8} a$$

رد الفعل العمودى من الأرض يمر بمركز نصف الكرة ولهذا إذاوقـع مركـز ثقـل الجزئـين G تحت مركز الكرة وميل الجسم كون رد فعل الأرض والـوزن الكلـى إزدواجـا يعمـل علـى إعـادة الجســم إلى وضعة القائم وبالتالى يكون اتزانة مستقرا وبالعكس إذا وقعت G فوق مركز الكرة

أما إذا وقعت G على مركز الكرة بالضبط كان الاتزان مستمرا وفى هذه الحالى

$$W_1 y_1 + W_2 y_2 = (W_1 + W_2) a$$

$$\therefore \pi r^2 . \frac{8a}{2} . \frac{7}{3} a + \frac{2}{3} \pi a^3 \frac{5a}{8} = (\pi r^2 . \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \pi a^3) a$$

باختزال هذه المعادلة نحصل على :

$$r = \frac{3}{8\sqrt{2}}$$




مكتبة
بستان المعرفة